外周、各孔共に任意形な多孔真直梁の捩り、曲げ應力の一解法⁽¹⁾

(昭和 12 年 10 月 17 日機械学会創立満 40 周年記念学術講演會に於て講演)

正 員 根 来 祥 三 郎⁽²⁾

摘 要

本問題の梁に於ては、断面内の任意閉曲線に添うて行ふ捩り函数及び撓函数の外向き勾配 $\partial\psi/\partial\nu$ 及び $\partial\chi/\partial\nu$ の一周積分値は常に零になることを証明し、この条件は均一直断面を持つ多孔真直梁の捩り、曲げ應力を求める場合には独立性を持つ必要条件になることを論じ、更に砂谷教授の應力式⁽³⁾にこの条件を附加すれば、如何なる多孔な真直梁の捩り、曲げ應力でも該應力式より常に求め得ることを立證し、尙進んで實際問題として外側周辺並に各孔周辺が共に全く任意形な上記多孔梁の捩り、曲げ應力を、平面調和函数の、実験的解法⁽⁴⁾又は近似計算解法⁽⁵⁾を利用して該應力式より求める方法に就て詳述した。

1. 緒 言

均一直断面を持つ多孔真直梁の捩り應力を求める方法に就ては既に実験的に石鹼膜を利用する方法⁽⁶⁾が発表されてゐる。而し未だ適確な取扱ひ方法の指示が無い様である。

本論文では先づ上記多孔梁の捩り、曲げ應力を求める應力式に就て理論的考察をなし、砂谷教授の應力式⁽⁷⁾に本文で示す如き一條件を附加すれば、均一直断面を持つ如何なる多孔梁の捩り、曲げ應力でも該應力式より常に求め得ることを立證し、更に實際問題として外側周辺並に各孔周辺が共に全く任意形な上記多孔梁の捩り、曲げ應力を、平面調和函数の、実験的解法⁽⁸⁾又は近似計算解法⁽⁹⁾を利用して該應力式より求める方法に就て詳述する。

2. 基 礎 式

真直梁の捩り及び曲げ弾性の一般應力は次式⁽¹⁰⁾で表される。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{z}z &= M_y y / I_x, & \widehat{x}x &= \widehat{y}y = \widehat{x}y = 0, \\ \widehat{x}z &= -\partial/(\partial y)(\tau\Psi + a\chi), \\ \widehat{y}z &= \partial/(\partial x)(\tau\Psi + a\chi) + a(\sigma x^2 - (1+\sigma)y^2). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

但し Ψ 及び χ は次記で示される函数である。

直断面内の任意点では、

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \psi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \\ \nabla_1^2 \psi &= 0, \quad \nabla_1^2 \chi = 0, \quad \nabla_1^2 = \partial^2/(\partial x^2) + \partial^2/(\partial y^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

直断面の各周辺上では、

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \psi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{一定} \\ \chi + \int^x \{\sigma x^2 - (1+\sigma)y^2\} dx &= \text{一定} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

尙 $\tau = \tau_1 + a\tau_2$, $\tau_1 = T/C$, $a\tau_2 = D/C$.

$$a = F_y \{2(1+\sigma)I_x\}^{-1}, \quad C = \iint \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dA,$$

$$D = -a \iint \left\{ x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} + \sigma x^3 - (1+\sigma)xy^2 \right\} dA$$

これ等二重積分は全断面に就て行ふ。

上式に於て 曲げモーメント を受ける梁の場合は z 軸は真直梁の重心を通り梁軸と一致し x 軸は梁直断面の中立軸と一致するやうな直交座標であるが、捩りモーメント のみを受る棒では z 軸は棒の軸方向でありさへすれば xy 軸は、これと直角方向の任意直角座標であつて宜い。 T は z 軸周りの直断面の 捩りモーメント、 I_x は x 軸周りの直断面の慣性モーメント、 M_y は直断面の 曲げモーメント の y 軸方向分値、 F_y は直断面の剪断力の y 軸方向分値、 σ は ポアソン比 である。

断面内における任意点の変位は第一應力式より次式の如く求まる。

$$\left. \begin{aligned} EI_x u &= -\{\sigma M_y x + 2\tau(1+\sigma)I_x z\}y, \\ EI_x v &= -\frac{1}{2}M_y \{z^2 - \sigma(x^2 - y^2)\} + \frac{1}{3}\{6\tau(1+\sigma)I_x x + F_y z\}z, \\ EI_x w &= M_y y z + 2(1+\sigma)I_x \phi - \frac{1}{6}F_y \{3(z^2 - \sigma x^2) \\ &\quad + (2+\sigma)y^2\}y, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

但し、 $\xi_e + i\phi = f(x + iy)$, $\xi_e = \tau\psi + a\chi$.

尙 u, v, w は夫々 x, y, z 軸方向の変位分値とする。

以上の應力式及び変位式は有孔梁、無孔梁の區別なく常に成立する関係式である。然るに有孔梁の場合は各周辺に於て (3) 式の一定常数を如何に定む可きかが問題になる。これ等の常数の決定方法を示すのが本論文の目的の一つである。

先づ本問題に於て変位は常に位置の一価函数であるから次記式の如く断面内の任意閉曲線に添うて行ふ変位増加量の一週積分値は當然零になる可きである。

$$\oint du = 0, \quad \oint dv = 0, \quad \oint dw = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

然るに第 (5) 式の第 (1), 第 (2) は (4) 式より直ちに満足さ

[第 4 卷 第 14 号]

(1) On a Method of Solution of Torsion and Bending Problems of a Straight Beam with Axial Holes. (2) Shōsaburō NEGORO, Member. The Tōhoku Imperial University Hall, 東北帝大工学部大学院. (3) 砂谷智導, 機械学会誌, 37, 209, (昭 9-9), 581. (4) 根来, 佐藤, 機械学会誌, 2, 6, (昭 11-2), 113. 砂谷, 松山, 畠村, 機械学会誌, 2, 9, (昭 11-11), 423. (5) 砂谷, 根来, 機械学会誌, 3, 10, (昭 12-2), 6. (6) G. G. Griffith, G. I. Taylor, Tech. Rep. Adv. Comm. Aeronautics, 3, (1917-1918), 910-938. P. Neményi. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech. (1921), 364. S. Timoshenko, Theory of Elasticity, 1st Ed. 268-269. L. Föppl, Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech. (1936), 37. (7) 脚註 (3) 参照. (8) 脚註 (4) 参照. (9) 脚註 (5) 参照. (10) 脚註 (3) 参照.

れるが第 (5) 式の第 (3) と第 (4) とより次記関係式が残る。

$$\oint \frac{\partial \xi}{\partial \nu} ds = 0 \dots\dots\dots (5')$$

但し ν は任意閉曲線の一部 ds に立てた外向き垂直方向を表す。更に (5') 式は又次式を意味する。

$$\frac{T}{C} \oint \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds + a \left\{ \frac{D}{C} \oint \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds + \oint \frac{\partial \chi}{\partial \nu} ds \right\} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式は a の値の如何に拘らず、即ち剪断力 F_y の如何なる値に於ても常に成立するを要する。そのためには次記関係式が満足されることが必要である。

$$\oint \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds = 0 \dots\dots\dots (7_1),$$

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial \nu} ds = 0 \dots\dots\dots (7_2)$$

尚 (7₁) 式は次記式ともなる。

$$\oint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds = \oint (x dy - y dx),$$

$$\therefore \oint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds = 2F \dots\dots\dots (7_3)^{(11)}$$

但し F は該閉曲線内にある面積を示す。

以上の結果より無孔梁、有孔梁の區別なく、振り及び撓函数は断面内の任意閉曲線に添うて常に (7) 条件式を満足することが必要である。然るに (7) 式における ψ, χ 函数は共に Laplace 式を満足するポテンシャル函数であるから、(7) 式の表す物理的意味は、断面内に如何なる閉曲線を取つてもその閉曲線より外に出るこれ等のポテンシャル量と内に入るこれ等のポテンシャル量とが常に等しい。即ちポテンシャル量の出入の差がないと言ふ事実を表すに過ぎない。従て断面内に孔がある場合、即ち周辺数が2個以上ある場合には、各周辺上の一定常数を自由に撰擇の出来ないことは上記の事実より明かである。併し逆に各周辺上のこれ等の要求常数を決定するためには (7) 条件式は必要にして且充分な関係式とも成ることは次節の実例結果より明かとなる。

據つて結局如何なる多孔梁の振り、曲げ應力を求める場合でも、(2), (3) 及び (7) 条件式を満足する振り函数及び撓函数を求めれば充分であることも決論出来る。

3. 振り函数及び撓函数の求め方

均一直断面を持つ多孔梁の振り函数及び撓函数を求める実例として、外側周辺並びに各孔周辺が共に全く任意形な多孔梁におけるこれ等の函数を、平面調和函数の実験的解法⁽¹²⁾又は近似計算解法⁽¹³⁾を利用して求める方法に就て記述する。

(1) ψ 函数の場合 振り函数及び撓函数は函数の性質上これ等を適宜な幾つかの函数に分けて取扱ふことも出来る。故に断面上に周辺数が $(n+1)$ 個、即ち孔が n 個ある場合には ψ 函数を次記の如き級函数に分けて考ふ。

$$\psi = A_0 \psi_0 + A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + \dots\dots\dots A_n \psi_n - \psi' \dots\dots\dots (8)$$

(11) L. Föppl 及び S. Timoshenko は各々異つた方法で應力式より各周辺に添うて (7₃) 式の満足することを発表してゐるが、本論文では断面内の任意閉曲線に添うても (7₃) 式が満足することを論証した。(12) 脚註 (4) 参照。(13) 脚註 (5) 参照。

但し $A_i (i=0, 1, 2, \dots\dots n)$ は一定常数を示し、 ψ_i 及び ψ' は次記の如き函数とする。

$$\left. \begin{aligned} \text{断面内の任意点では、} & \quad r_1^2 \psi_i = 0, \quad r_1^2 \psi' = 0 \\ \text{断面内の周辺上では、} & \quad \psi_i = 1 \quad (i \text{ 番目の周辺上}) \\ & \quad \psi_i = 0, \quad (i \text{ 番目以外の周辺上}) \\ & \quad \psi' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (\text{凡ての周辺上}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

尚周辺番号は任意に、例へば外側周辺より内側に向つて $(0, 1, 2, \dots\dots n)$ と数へることとする。

第 1 図

然るときは (8) 式の ψ 函数は (2), (3) 条件式を常に満足し、 A_i 常数は各周辺における (3) 式の積分常数となる。然るに一方 (9) 式を満足する ψ_i 及び ψ' 函数は電気槽実験法⁽¹⁴⁾又は上記の近似計算法⁽¹⁵⁾で常に求め得る函数であるから (8) 式の ψ 函数は常数 A_i のみが未知数となる。尚又 (9) 式の性質より $A_i(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots\dots + \psi_n) = A_i$ となる。然るに (8) 式函数に如何なる常数を加へても應

力には何らの変化をも與へぬことが明かである。この事実より A_i 中の任意の一つは常に自由に撰擇が許される。従て (8) 式の ψ 函数が (7) 条件式を満足するやうに残る n 個の A_i 未知常数が決定出来れば宜い。

然るに一方断面内の任意閉曲線に添うて (8) 式の ψ 函数を (7) 式に代入し、その結果が相互に独立性を持つ関係式となるためには、これ等の閉曲線は少くなくとも一つの新しき周辺曲線を包含することが必要である。従てこれ等の閉曲線は断面上に於ては孔の個数と同じく n 個しか存在し得ない。併し上記の n 個の未知常数 A_i を決定するためにはこれ等の閉曲線が n 個あれば充分であつて要求の A_i は次記の如くして直ちに求まる。

第 1 図に示す影線領域は多孔梁の直断面積を示し、点線閉曲線は適宜な任意形閉曲線を表す。

各閉曲線に添うて (7) 式と (8) 式とより次記式が各々 1 個宛出来る。

$$\sum_{i=1}^n A_i \oint \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} ds = \oint \frac{\partial \psi'}{\partial \nu} ds \dots\dots\dots (10)$$

但し外側周辺を基準とし、この常数 A_0 を零と置き、尾語 j は適宜閉曲線の番号 $(1, 2, \dots\dots n)$ を表す数字とする。

(10) 式中の各項積分は、(9) 式で既知の ψ_i 及び ψ' 函数の外向き勾配を上記各閉曲線に添うて一周積分するのであるから、これ等の値は図式計算等により常に求め得る。従てこれ等の値を夫々 b_{ji} 及び c_j とし、(10) 式を書替へれば次記式となる。

$$\sum_{i=1}^n A_i b_{ji} = c_j \dots\dots (10_1) \quad \text{但し} \quad b_{ji} = \oint \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} ds, \quad c_j = \oint \frac{\partial \psi'}{\partial \nu} ds.$$

(10₁) 式は未知数 A_i の n 個に対し n 個の聯立一次方程式となるから、 A_i は次記の如く常に只一組の値が求まる。

$$A_i = A_j / \Delta \dots\dots\dots (11) \quad (i=1, 2, \dots\dots n)$$

(14) 脚註 (4) 参照。(15) 脚註 (5) 参照。

$$\text{但し } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1(i-1)} & c_1 & b_{1(i+1)} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2(i-1)} & c_2 & b_{2(i+1)} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n(i-1)} & c_n & b_{n(i+1)} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

従て (8) 式の振り函数 ψ は次記式の如く求まり、

$$\psi = \sum_{i=1}^n (A_i/A) \psi_i - \psi' \quad \dots\dots\dots (12)$$

多孔真直棒の振り應力の x, y 軸方向分値は次記式となる。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xz} &= -\frac{T}{C} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} + y \right\} \\ \widehat{yz} &= \frac{T}{C} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} + x \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

然るに (1) 應力式より振り應力の場合には他の分應力は凡て零であるから (13) 式は要求する多孔真直棒の振り應力となる。

(2) χ 函数の場合 χ 函数は ψ 函数と全く同様で断面内に孔が n 個ある場合には χ 函数を次記の如く分けて考へる。

$$\chi = A_1 \chi_1 + A_2 \chi_2 + \dots + A_n \chi_n - \chi' \quad \dots\dots\dots (8')$$

但し $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ は一定常数を表し、 χ, χ' は次記の如き函数である。

$$\left. \begin{aligned} \text{任意点では、} & \quad F_1^2 \chi_i = 0, \quad F_1^2 \chi' = 0 \\ \text{周辺上では、} & \quad \chi_i = 1 \quad (i \text{ 番目の周辺上}) \\ & \quad \chi_i = 0 \quad (i \text{ 番目以外の周辺上}) \\ & \quad \chi' = \int^x \{ \sigma x^2 - (1 + \sigma) y^2 \} dx \quad (\text{凡ての周辺上}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9')$$

但し周辺番号は前記に倣つて定め、尙外側周辺常数值 A_0 を基準としてこれを零とする。

然るときは前章と全く同様に要求の A_i は次記の如く求まる。

$$A_i = A'_i / A' \quad \dots\dots\dots (11') \quad \text{但し } i = (1, 2, \dots, n)$$

$$A' = \begin{vmatrix} b_{11}' & b_{12}' & \dots & b_{1n}' \\ b_{21}' & b_{22}' & \dots & b_{2n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}' & b_{n2}' & \dots & b_{nn}' \end{vmatrix}, \quad A'_i = \begin{vmatrix} b_{11}' & b_{12}' & \dots & b_{1(i-1)}' & c_1' & b_{1(i+1)}' & \dots & b_{1n}' \\ b_{21}' & b_{22}' & \dots & b_{2(i-1)}' & c_2' & b_{2(i+1)}' & \dots & b_{2n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}' & b_{n2}' & \dots & b_{n(i-1)}' & c_n' & b_{n(i+1)}' & \dots & b_{nn}' \end{vmatrix}$$

$$b_{ji}' = \oint_j \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu} ds, \quad c_j' = \oint_j \frac{\partial \chi'}{\partial \nu} ds.$$

従て撓函数 χ は次記式の如く求まり、

$$\chi = \sum_{i=1}^n (A'_i / A') \chi_i - \chi' \quad \dots\dots\dots (12')$$

多孔梁の曲げ應力の xy 軸方向分値 (但し $\tau = 0$ の場合) は次記の如く求まる。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xz} &= -a \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A'_i}{A'} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} - \frac{\partial \chi'}{\partial y} \right\} \\ \widehat{yz} &= a \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A'_i}{A'} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} - \frac{\partial \chi'}{\partial x} + \sigma x^2 - (1 + \sigma) y^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

然るに曲げ應力の繊維應力分値は (1) 應力式より直ちに求まるから $\tau = 0$ の場合の多孔梁の曲げ應力は凡て求まつたことになる。

(3) Ψ 函数の場合 Ψ 函数も ψ 函数と全く同様で断面内に孔が n 個ある場合には Ψ 函数を次記の如く分けて考ふ。

$$\Psi = A_0 \Psi_0 + A_1 \Psi_1 + A_2 \Psi_2 + \dots + A_n \Psi_n \quad \dots\dots\dots (8'')$$

但し $A_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ は一定常数を表し、 Ψ_i は次記の如き函数とする。

$$\left. \begin{aligned} \text{任意点では、} & \quad F_1^2 \Psi = 1 \\ \text{周辺上では、} & \quad \Psi_i = 1 \quad (i \text{ 番目の周辺上}) \\ & \quad \Psi_i = 0 \quad (i \text{ 番目以外の周辺上}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9'')$$

但し周辺番号 $i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ は前記に倣つて定める。

尙 A_i 常数相互間に次記の如き関係条件を置く。

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n = 2 \quad \dots\dots\dots (9_2'')$$

然るときは (8'') 式の Ψ 函数は常に (2), (3) 条件式を満足することは明かである。又一方 (9_2'') 条件式を満足する各 Ψ_i 函数は薄膜実験法⁽¹⁶⁾又は上記近似計算法⁽¹⁷⁾を利用すれば常に求め得る函数である。故に残る (8'') 式の Ψ 函数が (7_3) 条件式を満足するやうに A_i を決定するには ψ 函数の場合と全く同様で次記の如き取扱ひ方をすれば宜い。即ち独立性を持つた n 個の適宜閉曲線に添うて (8'') 式の Ψ 函数を利用して (7_3) 式を計算すれば各閉曲線毎に次記式が各々 1 個宛出来る。

$$\sum_{i=0}^n A_i \oint_j \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} ds = 2 F_j \quad \dots\dots\dots (10'')$$

但し尾語 j は適宜閉曲線の番号 (1, 2, 3, ..., n) を表し、 F_j は j 番目の適宜閉曲線内に包まれた面積を示す。

(10'') 式中の各項積分値は、既知の Ψ_i 函数の外向き勾配を上記各閉曲線に添うて一周積分するのであるから、図式計算等によれば直ちに既知量となる。従てこれ等の値を前記に倣つて b_{ji} 記号で表せば (10'') 式は次記式となる。

$$\sum_{i=0}^n A_i b_{ji} = 2 F_j \quad \dots\dots\dots (10_1'') \quad \text{但し } b_{ji} = \oint_j \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} ds$$

従て Ψ 函数の場合には未知数 A_i の $(n+1)$ 個に対し、式数は (9_2''), (10_1'') 式の $(n+1)$ 個の聯立一次方程式となるから、これ等 A_i は常に次記の如く只一組の値が決定する。

$$A_i = 2 A'_i / A' \quad \dots\dots\dots (11'') \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{但し } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{20} & b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad A'_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1(i-1)} & F_1 & b_{1(i+1)} & \dots & b_{1n} \\ b_{20} & b_{21} & \dots & b_{2(i-1)} & F_2 & b_{2(i+1)} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{n(i-1)} & F_n & b_{n(i+1)} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

故に Ψ 函数は次記式の如く求まり、

$$\Psi = 2 \sum_{i=0}^n (A'_i / A') \Psi_i \quad \dots\dots\dots (12'')$$

多孔真直棒の振り應力の x, y 軸方向分値は次記の如く求まる。

(16) 脚註 (4) 参照。 (17) 脚註 (5) 参照。

$$\left. \begin{aligned} \overline{rz} &= -2 \frac{T}{C} \sum_{i=0}^n \frac{A_i}{A} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \\ \overline{yz} &= 2 \frac{T}{C} \sum_{i=0}^n \frac{A_i}{A} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13')$$

以上の結果より問題の多孔梁の捩り、曲げ應力を求める場合には (1) 式に (12) 式の ϕ 、又は (12') 式の Ψ 函数と (12') の χ 函数を代入すれば宜い。又曲げ應力の場合には、(1) 式の第 1 項 ($T=0$) を零とした第 2 項のみに上記の夫々の函数を代入すれば宜いことも明かであつて要求の應力は凡て求まつたことになる。

附記：一 上記の如き方法で Ψ 函数を求める場合には、(9₁') 条件式中の $r_1^2 \Psi_i$ を 1 とすれば $\sum_{i=0}^n A_i$ を 2 とする必要がある、又 $r_1^2 \Psi_i$ を 2 とすれば $\sum_{i=0}^n A_i$ を 1 とすることが必要となる。かくの如くその取扱ひ方法の相違により新たな (9₂') 式の如き制限が生じ、それがために見掛上 A_i 中の任意の一つの自由度をも失ふことがある。この事實は次記の実例でも容易に納得が出来る。即ち薄膜実験を利用して Ψ 函数を求める場合にはその薄膜の張れ工合は膜に加へる圧力の大きさと、周辺値として與へる單位高さに関係し、従てこれ等兩者間に新しく (9₂') 式の如き関係式が生ずる。故に若し加へる圧力の大きさを任意に選擇すれば、その圧力に伴ふ單位高さは自然に決定し、この要求の單位高さを與へるために A_0 までは自由に選擇をすることが出来なくなる。即ち見掛上 A_i 中の任意の一つの自由度までも失ふことになる。

4. 結 論

本問題に於ては変位は常に位置の一價函数であると言ふ事實に基き領域内の任意閉曲線に添うて行ふ捩り函数及び撓函数の外向き勾配 ($\partial \phi / \partial \nu$ 及び $\partial \chi / \partial \nu$) の一周積分値は常に零になることを証明し、均一直断面を持つ多孔真直梁の捩り及び撓函数を求める場合には該条件は独立性を持った必要條件になることを論じ、更に砂谷教授の應力式⁽¹⁸⁾における

(2), (3) 条件式に該条件を附加して出来たこれ等の条件は上記多孔梁の捩り及び撓函数を求めるためには必要にして且充分な条件になることを立証した。

更に實際問題として外側周辺及び各孔周辺が共に全く任意形な上記多孔真直梁の捩り、曲げ應力を平面調和函数の、実験的解法⁽¹⁹⁾又は近似計算解法⁽²⁰⁾を利用して求める方法に就ても詳細に指摘したが、この際図式計算等を使用する關係上独立性を持った適宜閉曲線として、孔周辺を包み断面内の兩座標軸に平行で併かも閉曲線の長さが出来るだけ短い矩形を選擇することは手数省略上、及び正確度上昇上重要である。而かし各周辺に余り接近せる場所の勾配を図式計算で求める場合には一般に正確度の落ちる恐れがあるからこの点を考慮して周辺と閉曲線の間に適宜な間隔を置くことが精度上必要となる。

又實際に上記多孔梁の捩り、曲げ應力を求める場合には第 (3) 節で示した如く断面上にある周辺数だけの ϕ_i (ψ_i を含む) 又は Ψ_i 及び χ_i (χ' を含む) 函数を求める必要のあることは當然である。而かし實際問題として取扱ふ多孔梁中孔一つの場合は最も一般である。又この場合の断面積は無孔梁の断面積よりも可なり縮小されることが多い。即ち所謂薄肉になることが多い。従て孔一つの場合の捩り、曲げ應力を、平面調和函数の近似計算解法⁽²¹⁾を利用して求める場合には、無孔梁のこれ等の應力を求めるより手輕になることもかなり有り勝である。尙上記捩り應力を求める場合には ϕ , Ψ 何れの函数を求めても手数省略上長短の差異は殆どない。但し Ψ_i 函数を薄膜実験法⁽²²⁾で求める場合には周辺値として與へる單位高さは Plandtl 関係式を満足する程度に決定することが必要である。

尙又本論文の取扱ひ方は上記の如く所謂ポテンシャル函数で取扱ひ得る凡ての他の問題にも適用可能なることを附記して置く。

終りに始終種々懇篤なる指導を賜つた砂谷教授に対し茲に謹んで感謝の意を表す。

(18) 脚註 (3) 参照。

(19) 脚註 (4) 参照 (20) 脚註 (5) 参照。 (21) 脚註 (5) 参照。 (22) 脚註 (4) 参照。