れをサーモカップ
ルで数箇所連続的
に測定したが温度勾
配は緩くて熱応力の
ために降伏するやう
な心配はなかつた。
ストレンメータの
読みは焼嵌直後から
車輪全体が最初の温
度に戻るまで長時間

第 29 図 力嵌実験に供した輪軸の断面図

連続に記録して針の動きを注視した。以上の実験結果と計算結果の比較を第 3~6 表に示す。尚この実物板車輪の焼嵌めによる応力の計算結果を第 28 図 b 及び c に示す。次に力嵌めの一例として第 29 図に示す様に中空軸を板輪心に力嵌めしたときの実験結果を第 7 表に示す。

8. 結 び

本研究の結果次の事項が解つた。

1. 本近似計算法は実用上十分な精度を持つてゐる。

第 7 表 板輪心に中空軸を力嵌した実験結果

実 験	理 論
力嵌代 %	中空軸内径変形量 mm
1.22	0.10
1.16	0.10
1% に換算した平均値	0.084
	0.103 7
	0.098 6
	0.085 0

2. 現在使用されてゐる鉄道車輛用板輪心に外輪を焼嵌めしたときに生ずる応力は非常に大きく、普通用ひられる焼嵌代 1% に於てその値が弾性限度に近い。

3. 外輪が磨耗して使用限度に達した場合、或は制動のために外輪と輪心に温度差を生じた場合に於て、板輪心の偏心量が増せば外輪弛緩に対する安全度が幾分増加する。

終りに本研究に當り御懇切な御指導を賜はつた京都帝大の西原先生及び當所の永島技師に厚く感謝の意を表する。又本研究の発表を御許し下さつた住友金属工業株式会社荒木専務取締役並に本研究達成のために御盡力下さつた職員各位に深甚なる感謝の意を表する。

鋸の冷却と初應力⁽¹⁾

(昭和 12 年 4 月 4 日 第 14 期定時総會講演會に於て講演)

正 員 石 橋 正⁽²⁾

摘 要

鋸の締りの良否、即ち鋸の初應力の大小は主として鋸締中に於て鋸がその軸方向に抵抗をなし得る状態に達した時刻における鋸と板との温度差に依ると思はれる故、著者は先づ鋸締中の鋸の冷却及び板の加熱の状態を簡單なる条件を満足する、熱傳導の微分方程式の解を以て表し、然る後これを基礎として鋸の初應力の数値を與へる式を導いた。

1. 熱 傳 導

1. 稍一般の場合 以下鋸及び板に関し下記の符号を用ゐる。

V温度、 t時間、

K材料内の熱傳導率、

H材料外の熱傳導率、

c材料の比熱、

ρ材料の比重、 l板の厚さ

$$k = \frac{K}{c\rho}, \quad h = \frac{2}{lc\rho} \frac{H}{K}$$

尚これ等の諸量の右下に 1 及び 2 なる数字

第 1 図

を附してそれぞれ鋸及び板に対するそれ等の量を示す。例へば V_1 は鋸の温度、 V_2 は板の温度である。

鋸は第 1 図の様にその幹の直径 $2a$ 、頭の直径 $2b$ 、板は厚さ l で簡單のため無限に擴がると仮定する。又鋸の軸方向にはその時の鋸の平均温度に比例して熱の流失が起ると仮定すれば、

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - hV \quad (1)$$

となる必要がある。(1) に於て、

$$V = e^{-ht} v \quad (2)$$

とおけば、

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (3)$$

(1) Cooling of Rivets and Initial Stress in Them. (2) Tada-shi ISHIBASHI, Member. The Kyūshū Imperial University. 九州帝国大学。

となる。依て若し、

$$\left. \begin{array}{ll} t \leq t_1 & \text{では } h = h_1, \\ t_1 \leq t & \text{では } h = h_2, \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

とすれば、かゝる場合の温度は、

$$\left. \begin{array}{ll} V = e^{-ht_1}, & t \leq t_1 \\ V = e^{-(h-h_1)t_1 - h_1(t-t_1)}, & t_1 \leq t \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

鉄 板
半径 a 無限に擴がる
 γ_1 γ_2
 K_1 K_2
 k k_2

で表される。即ちこの場合、鉄の軸方向の影響はこれを e^{-ht} の項で代表させられる故以下 v に関し一般の場合、即ち v に関し左の場合を考へる。

又 (3) 式の解に対する条件として以上の他に、

$$\left. \begin{array}{ll} t=0 & \text{で } v_1 = V_0, \quad v_2 = 0 \\ \left. \begin{array}{l} t=t \\ r=a \end{array} \right\} & \text{で } v_1 = v_2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial r} = \lambda \frac{\partial v_2}{\partial r}, \quad \lambda = \frac{K_2}{K_1} \\ \left. \begin{array}{l} t=t \\ r=\infty \end{array} \right\} & \text{で } v_2 = 0. \end{array} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

又 $\mu = \sqrt{k/k_2}$ とおく。

かゝる場合の (3) の解は Carslaw の Contour integral の方法⁽³⁾を用ゐて次の如く書くことが出来る⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \frac{2\mu\lambda}{\pi} V_0 \int_0^\infty \frac{J_0\left(\xi \frac{r}{a}\right)}{\xi(b^2 + c^2)} e^{-(1/4\beta)\xi^2} d\xi, \\ b = J_1(\xi) \left\{ \frac{J_0(\mu\xi)Y_1(\mu\xi) + Y_0(\mu\xi)J_1(\mu\xi)}{J_1^2(\mu\xi) + Y_1^2(\mu\xi)} \right\} - \mu\lambda J_0(\xi) \\ c = \frac{2}{\pi\mu} \frac{1}{\xi} \frac{J_1(\xi)}{J_1^2(\mu\xi) + Y_1^2(\mu\xi)} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} v_2 = \frac{2}{\pi} V_0 \int_0^\infty \frac{fJ_0\left(\mu\xi \frac{r}{a}\right) - eY_0\left(\mu\xi \frac{r}{a}\right)}{\xi(e^2 - f^2)} e^{-(1/4\beta)\xi^2} d\xi, \\ e = J_0(\mu\xi) \left\{ 1 - \mu\lambda \frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi)} \frac{J_1(\mu\xi)}{J_0(\mu\xi)} \right\}, \\ f = Y_0(\mu\xi) \left\{ 1 - \mu\lambda \frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi)} \frac{Y_1(\mu\xi)}{Y_0(\mu\xi)} \right\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\beta = \frac{a^2}{4kt} \dots\dots\dots (9)$$

J_0, Y_0 等は Bessel 函数である。これ等の式を用ゐて数計算を行ふことは相當困難と思はれるが、必要の場合にはその値を図より求めることも出来る故、こゝにはこれ等の積分に関しこれ以上の変形は行はない。

併し標題の事項を取扱ふ場合にはこれ等の諸式中に $\mu = \lambda = 1$ とおいて得られる簡単な形の式を用ひ、その中に含まれる k, h 等の値を適當に撰び、実験値と近ずかせることが便利である。依て下に $\mu = \lambda = 1$ の場合を考へる。

2. $\mu = \lambda = 1$ の場合 (7) 及び (8) 式中に $\mu = \lambda = 1$ とおき且 (2) の関係を用ふれば、結局次の式が得られる⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = V, \quad r \leq a \\ V_2 = V, \quad a \leq r \end{array} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(3) H.S. Carslaw, The Conduction of Heat, 2 版 (1921), 201.

(4) 著者、九州帝国大学工学彙報 12, (1937), 87.

昭和 13 年 2 月]

$$\left. \begin{array}{l} V = V_0 e^{-ht} \left\{ 1 - e^{-\beta} - 2\beta e^{-\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^{2m}}{m!(m+1)!} a_m \right\} \\ a_m = -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^{2m} e^{-\beta(r/a)^2} \times \frac{m}{\beta} a_{m-1} \\ a_0 = \frac{1}{2} \{ 1 - e^{-\beta(r/a)^2} \} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

h が冷却の途中で段階的に変化する場合には (5) の関係を使用すればよい。

以上に於ては鉄頭の有する熱は考へなかつたが、併し板の厚さに依り初應力の大きさが変化する事実より考へて、鉄頭も相當鉄の冷却に影響するものと考えられる。これが正確なる評價は無論簡単には求まらないが最も輕便な方法は鉄頭のために鉄の半径 a が見掛上大きくなると考へることである。即ち第 1 図に示す如く板の厚さを l とすれば l が余り小ならざる範圍で鉄の有効半径を、

$$a_e = a(1 + \eta/l) \dots\dots\dots (12)$$

とするのである。 η は同一種類の同一半径の鉄では一つの正の常数と考へるものでこれは実験より求める。即ち直径 $2a$ なる鉄の冷却及びこれに依る板の加熱は直径 $2a_e$ なる円柱の場合と同一であると考へる。

η を求むる一方法は、先づ l が色々異なる場合に板中で $(r/a) = \text{一定}$ なる点の鉄締中の最大温度を、鉄と円柱との場合

第 2 図 v_2/V_0 のエンベロープ

に就て求める。次にこの時の測定点における板の最大温度 $V_{2\max}$ を鉄の始の温度 V_0 の分数として表す。然して一方 (11) 式に於て V_2/V_0 のエンベロープを求めておけば、このエンベロープと実験より求めたる $V_{2\max}/V_0$ の値と照し合せこの $V_{2\max}/V_0$ に相當する r/a の値を求むることが出来る。かくして得られる r/a の値は無論見掛上の値であるが、この値は鉄の場合が円柱の場合より小である。依て鉄の場合の r/a を γ_1 とし円柱の場合のそれを γ_2 とすれば γ_2/γ_1 が a_e/a の値を與へる。第 2 図に v_2/V_0 のエンベロープを示す。さて $0 \leq r \leq a, a \leq r \leq b$ なる部分の温度は無論 r/a の函数であるが鉄の初應力に関係するものは次の如き平均と考へる。即ち V_{d1} 及び V_{d2} を以て鉄及び板の平均温度を表す。今

$$x = \frac{r}{a_2}, \quad x_1 = \frac{a}{a_e}, \quad x_2 = \frac{b}{a_e} = \frac{b}{a} x_1 \dots\dots\dots (13)$$

とおけば、

$$\left. \begin{array}{l} V_{d1} = \frac{2}{x_1^2} \int_0^{x_1} V x dx, \\ V_{d2} = \frac{2}{x_2^2 - x_1^2} \int_{x_1}^{x_2} V x dx \end{array} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{d1} = V_0 e^{-ht} \varphi(x_1) \\ V_{d2} = V_0 e^{-ht} \left\{ \frac{x_2^2}{x_2^2 - x_1^2} \varphi(x_2) - \frac{x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \varphi(x_1) \right\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

第 1 表 $\varphi(x_1)$ の値

$\beta \backslash x_1$	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
0.05	0.048 2	0.048 1	0.048 0	0.047 9	0.047 8	0.047 7	0.047 6
0.06	0.057 4	0.057 4	0.057 2	0.057 1	0.056 9	0.056 8	0.056 6
0.08	0.075 5	0.075 2	0.075 0	0.074 8	0.074 5	0.074 3	0.074 0
0.1	0.093 0	0.092 8	0.092 3	0.092 1	0.091 6	0.091 3	0.090 8
0.12	0.110 0	0.109 6	0.109 1	0.108 6	0.108 1	0.107 5	0.107 1
0.15	0.124 7	0.124 0	0.123 3	0.122 6	0.121 7	0.120 9	0.120 0
0.2	0.173 5	0.172 5	0.171 2	0.170 0	0.168 7	0.167 3	0.165 9
0.25	0.209 7	0.208 0	0.206 4	0.204 5	0.202 6	0.200 6	0.198 5
0.3	0.243 6	0.241 4	0.239 0	0.236 6	0.234 0	0.231 3	0.228 5
0.5	0.358 6	0.353 8	0.348 7	0.343 5	0.337 9	0.332 2	0.326 4
1.0	0.549 0	0.537 9	0.526 3	0.514 2	0.501 9	0.489 1	0.476 3
1.5	0.662 0	0.646 4	0.630 1	0.613 4	0.596 0	0.578 3	0.560 3

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= 1 - e^{-\beta} - 2\beta e^{-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!(m+1)!} b_m, \\ b_m &= c_m + \frac{m}{\beta} b_{m-1}, \\ c_m &= \frac{1}{2\beta} x^{2m-2} e^{-\beta x^2} + \frac{m}{\beta} c_{m-1}, \\ b_0 &= \frac{1}{2} + c_0, \\ c_0 &= -\frac{1}{2\beta x^2} (1 - e^{-\beta x^2}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

例へば $b/a=1.5$ として種々なる x_1 に対する $\varphi(x_1)$ 及び $V_{d2}e^{ht}/V_0$ の値を示せば第 1 表及び第 2 表のようになる。これより明かな如く x_1 が小となる程、即ち板が薄くなる程鉄及び板の平均温度は上昇するが両者の温度差は減少する⁽⁵⁾。

2. 熱伝導の実験

3. 熱伝導の実験 上に導いた諸式を紙締中の熱伝導の問題に應用するには、 h, k 並に η の値を知る必要がある。鉄の熱伝導に関する実験は古くは R. Baumann が行つてゐる⁽⁶⁾。又新しくは H. Ziem⁽⁷⁾ 及び佐々木等の実験⁽⁸⁾ がある。併しこれ等はどれも h, k, η 等の値を求むるには充分でない。依て著者は先づ準備として次の様な実験を行つた。即ち第 3 図 (a) の略図に示す寸法の鉄板の中央に直径約 20 mm の孔を穿ちこれに直径 6/8" の円柱或は鉄を挿入し、これを鉗打してその冷却状態を測定した。板の厚さは約 11.5 mm のものを重ね合せ 11.5 mm, 23 mm, 34 mm 及び 46 mm の 4 種を用ひた。又板には前記の鉄孔の他に 4 個の孔を穿ちこれに依り鉗打の際板の動揺するのを防いだ。尤も鉄打は装置その他の関係上鉄の一方の頭は鉄の幹より鉗打して作製せず第 3 図 (b) に示す B なる環を鉄と殆んど同じ温度に加熱し、鉄を鉄孔に挿入した後直に B の環を鉄の A なる部分にはめ、然る後 A を 3, 4 回鉗打して鉄頭の外形を作製した。

鉄の温度は、 $l/2, r=0$ の点又板は $l/2, r/a \approx 1.2$ なる点の温度を測定した。但し鉄の温度測定には直径約 0.67 mm の

第 2 表 $V_{d2}e^{ht}/V_0$ の値 (但し $b/a=1.5$)

$\beta \backslash x_1$	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
0.05	0.046 9	0.046 6	0.046 4	0.046 1	0.045 9	0.045 9	0.045 4
0.06	0.055 6	0.055 1	0.054 6	0.054 2	0.053 7	0.053 6	0.053 0
0.08	0.072 3	0.071 4	0.070 9	0.070 3	0.069 6	0.068 6	0.067 9
0.1	0.088 0	0.087 8	0.086 4	0.085 4	0.083 8	0.082 7	0.081 7
0.12	0.103 0	0.102 0	0.100 8	0.099 0	0.097 8	0.096 2	0.094 1
0.15	0.124 0	0.122 8	0.120 7	0.118 4	0.115 8	0.114 0	0.111 6
0.2	0.157 8	0.153 4	0.150 3	0.146 6	0.143 5	0.139 3	0.135 5
0.25	0.186 1	0.180 6	0.176 2	0.170 8	0.166 6	0.160 8	0.155 5
0.3	0.211 2	0.205 2	0.198 7	0.192 1	0.185 4	0.178 1	0.171 3
0.5	0.289 5	0.277 2	0.263 9	0.250 8	0.236 0	0.224 3	0.211 2
1.0	0.394 6	0.367 3	0.340 6	0.314 0	0.287 9	0.263 0	0.238 4
1.5	0.446 0	0.408 3	0.372 1	0.325 1	0.281 3	0.269 3	0.237 8

第 3 図 (a)

第 3 図 (b)

クロメル・アルメル線を用ひ、板の場合は直径約 0.24 mm の銅、コンスタンタン線 (エナメル鍍) を用ひた。

又鉄用の熱電対は温度測定中これを手で鉄に押付けた。板用のものは熱電対の先端⁽⁹⁾を第 3 図 (a) に示す b なる小孔に鉛棒を打込んで熱電対を板に強く押付け鉗打中に熱電対が振動しない様にした。熱電対に生ずる電圧はこれをオシログラフに導き温度のオシログラムを撮つた。

オシログラムを見る時大抵の場合鉗の最初の 一打に依り鉄幹の側面が鉄孔の内面に密着することが明かである故、この時の鉄の温度を V_0 と撰び、且この時刻を時間の起点と見做すことが合理的と思はれる。

第 4 図及び第 5 図中の黒点はかくして得られたオシログラム上の諸点で該図中の実線は (11) 式中 $h=0$ とし k をそれぞれ図中に記載の如き数値にとつた場合の (11) 式が與へる曲線である。但しこの時板に対する r/a の値は後に述べる理由に依り必ずしも 1.2 なる値を用ひず寧ろ逆に V_0 の最大値より得られる値を用ひた。第 4 図及び第 5 図は数個の実験中黒点と曲線との不一致の程度が略平値と思はれるものを撰んで掲示したもので、実験結果中にはこれ等よりも更に両者が離れるものもあるが逆に更に良く一致するものもあつた。第 4 図は円柱の場合、第 5 図は鉄の場合である。

茲に注意すべきは (11) 式は $\mu=\lambda=1$ として導いたもの

(9) Hot junction.

(5) H. Ziem, Forschung, 7, (1936), 44. (6) R. Baumann, Forschungarbeiten, 252, (1922). (7) 脚註 (6) 参照. (8) 佐々木新太郎、九州造船會報、第 11 号「昭和 9-5 月」。

であるから k の値は板と鉄に対し同一であることを意味してゐる。それにも拘らず k の値が鉄と板とに対し異なる場合に應用したのは簡單を主としたためである。尤もこの場合鉄の温度はその初期に於て (11) 式が與へるものより小であるか、この實驗では上にも述べた様に鉄頭の一方を製作する際の変形のエネルギーが表れてゐないこと、及び温度測定点が鉄頭の影響が少いと思はれる点であること等を注意しておきたい。これ等は何れも η の値を見掛上小にしてゐると思はれる。

第4図 円柱の冷却一例

第5図 鉄の冷却一例

オシログラムより鉄締中の板の最大温度を V_0 の分数として求めその値を第2図と照してこの最大温度に相當する r/a の値を求めれば常に 1.2 より大であつた。これは恐らく熱電対の取り付け状態その他に依り熱電対に慣性があるため並に $h=0$ としたることなどに起因すると思れる。依て η の値を求むるためには板用の熱電対は円柱及び鉄の場合に対し同一取付状態で測定することが望ましい。

上の如き實驗で得られた a_0/a の値を図に示せば第6図の様である。

尙僅かの、上の如き實驗から推察されることは、 k 及び k_2 は鉄の長さ l と共に或る程度迄増加するらしい。又 k_2/k の値は 1 より大で且 l の増加と共に或る程度迄増加する。

最後に佐々木⁽¹⁰⁾測定に依る $l=36$ mm の場合に $V_0 \approx 1000$ °C で直径を異にする鉄がそれぞれ 550°C 及び 650°C 迄冷却するに要する時間と (15) 式中 $h=0$, $r_1=1$ とおいた V_{d1} との値を図示すれば第7図の黒点及び曲線となる。但し $k=0.0094$ cm²/s と仮定した。この時 a と t との関係は、

(10) 脚註(8)参照。

昭和13年2月]

第6図 a_0/a と l との関係 ($a=10$ mm の場合) 第7図 $V_0=1000$ °C よりそれぞれ V_1 迄冷却するに要する時間と鉄径との関係

$$\frac{1}{\beta} = \frac{4kt}{a^2} = \text{const} \quad (17)$$

なる拋物線である。

3. 初應力

4. 初應力の式 次の様な符号を用ゐる。

$\sigma_0(t), \dots, t_0=0$ より t なる時間の後、即ち t なる時刻の鉄中の平均應力。
 $\sigma_s(t), \dots$ 時刻 t における鉄材の降伏点。
 $\varepsilon_s = \xi_0/E_2, \dots, \sigma_0(t)$ 及び l が何れも單位の大きな時 $a \leq r \leq b$ なる板の部分の鉄頭の圧力に依る歪で $\xi_0 \approx 0.75$ とした⁽¹¹⁾。

$E_1(t), E_2(t), \dots$ 時刻 t における鉄材及び板材の弾性係数。

$\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots$ 時刻 t における鉄材及び板材の膨脹係数。

今時刻 t に於て dt なる時間の變化中鉄材が降伏しないと考ふれば次の関係が成立する。但し $\sigma_0(t)$ は引張を正とする。

$$\frac{d\sigma_0(t)}{E_1(t)} + \alpha_1 dV_{d1} = \alpha_2 dV_{d2} - \varepsilon_s d\sigma_0(t)$$

$$\text{或は、} \quad d\sigma_0(t) = \frac{-\alpha_1 dV_{d1} + \alpha_2 dV_{d2}}{\varepsilon_s + 1/E_1(t)}$$

従て鉄が軸方向に抵抗し得る状態に達する時刻を t_0 とし t_0 以後 t_s 迄鉄は降伏しないと考ふればこの間の σ_0 の増加は、

$$\sigma_{10} = - \int_{t_0}^{t_s} \frac{\alpha_1 dV_{d1}}{\varepsilon_s + 1/E_1(t)} + \int_{t_0}^{t_s} \frac{\alpha_2 dV_{d2}}{\varepsilon_s + 1/E_1(t)}, \quad t_0 \leq t \leq t_s \quad (18)$$

次に t_s 以後は鉄は降伏を起し t_s 後 t_e で鉄は再び弾性を恢復するとすれば、この間の σ_0 の増加は、

(11) ε_s の計算

下図の様な厚さ 1 なる輪が、その両表面に單位の大きな圧力を受ける時の厚さの縮を ε_s と考へる。簡單のため二次元の問題とし r 方向の変位を ξ で表せば $\xi = C_1 r + C_2/r$ である (例へば小野道正氏、材料力学 (大正 11 年、413 頁)。今 r 方向の垂直應力を σ_r とし、

$$r=a \text{ で } \sigma_r=0, \quad r=b \text{ で } \xi=0 \quad (a)$$

と仮定すれば (縮を正とする)、

$$\varepsilon_s = \frac{-1}{m(m-1)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)E} \left[\left\{ m(m-1)-2 \right\} + \frac{2}{1+\frac{b^2}{a^2} \frac{m-1}{m+1}} \right] \quad (b)$$

又 $r=a$ 及び $r=b$ で $\sigma_r=0$ とすれば、

$$\varepsilon_s = \frac{-1}{(1-b^2/a^2)E} \quad (c)$$

(b) 及び (c) に $b/a=1.5$, $m=10/3$ とおけば、

$$|\varepsilon_s| = 0.69/E \text{ 及び } |\varepsilon_s| = 0.80/E \quad (d)$$

となる。鉄の場合鉄頭の厚さ一様でないため ε_s の値としては仮りに上の平均値をとり、

$$|\varepsilon_s| = 0.75/E \quad (e)$$

とする。

$$\sigma_{20} = \sigma_s(t_e) - \sigma_s(t_s), \quad t_s \leq t \leq t_e \quad \dots\dots\dots(19)$$

但し σ_s は温度の函数であるからこの場合には又時間の函数である。又 t_e なる時刻は、

$$\left. \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \right]_{t_e} = \left. \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \right]_{t_e} \quad \dots\dots\dots(20)$$

で與へられる。

t_e 以後の σ_0 の増加は、

$$\sigma_{30} = - \int_{t_e}^{\infty} \frac{\alpha_1 dV_{d1}}{\epsilon_2 + 1/E_1(t)} + \int_{t_e}^{\infty} \frac{\alpha_2 dV_{d2}}{\epsilon_2 + 1/E_2(t)}, \quad t_e \leq t \quad \dots\dots\dots(21)$$

依てかゝる場合の鉄中の初應力は、

$$\sigma_0(\infty) = \sigma_{10} + \sigma_{20} + \sigma_{30} \quad \dots\dots\dots(22)$$

t_0 が大なる場合には t_s 従て t_e が存在しないことがあり得る。かゝる場合には、

$$\sigma_0(\infty) = - \int_{t_0}^{\infty} \frac{\alpha_1 dV_{d1}}{\epsilon_2 + 1/E_1(t)} + \int_{t_0}^{\infty} \frac{\alpha_2 dV_{d2}}{\epsilon_2 + 1/E_2(t)} \quad \dots\dots\dots(23)$$

となる。

5. 初應力の数値 4. に導いた諸式中 E, α 等は何れも温度の函数である。今、

$$E = E_0(1 - \gamma V), \quad \alpha = \alpha_0(1 + \nu V) \quad \dots\dots\dots(24)$$

とおけば γ 及び ν は一般に 1 に対し非常に小なる数である⁽¹²⁾。依て、

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0}(1 + \gamma V)$$

又積分を容易ならしむるため t_0, t_s 間の E の平均の値を $\bar{E}(t_0, t_s)$ で表し、これ等を (18) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{10} = & - \int_{t_0}^{t_s} \frac{E_0 \alpha_0 + E_0 \alpha_0 \nu V_{d1}}{\left\{ 1 + \frac{E_0 \xi_0}{\bar{E}_2(t_0, t_s)} + \gamma V_{d1} \right\}} dV_{d1} \\ & + \int_{t_0}^{t_s} \frac{E_0 \alpha_0 + E_0 \alpha_0 \nu V_{d2}}{\left\{ \xi_0 + \frac{E_0}{E_1(t_0, t_s)} \right\} + \xi_0 \gamma V_{d2}} dV_{d2} \quad \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

然るに、

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_s} \frac{E_0 \alpha_0 + E_0 \alpha_0 \nu V_{d1}}{\left\{ 1 + \frac{E_0 \xi_0}{\bar{E}_2(t_0, t_s)} + \gamma V_{d1} \right\}} dV_{d1} &= \frac{E_0 \alpha_0 \nu}{\gamma} \{ V_{d1}(t_0) - V_{d1}(t_s) \} \\ &+ \frac{1}{\gamma} \left[E_0 \alpha_0 - \frac{E_0 \alpha_0 \nu}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{E_0 \xi_0}{\bar{E}_2(t_0, t_s)} \right\} \right] \log \end{aligned}$$

$\left[\left\{ 1 + \frac{E_0 \xi_0}{\bar{E}_2(t_0, t_s)} \right\} + \gamma V_{d1}(t_0) \right] / \left[\left\{ 1 + \frac{E_0 \xi_0}{\bar{E}_2(t_0, t_s)} \right\} + \gamma V_{d1}(t_s) \right]$

然るに x が充分小なる時には $\log(1+x) = x$ となるから上の $\log$ の項を展開し第一項をのみを用ひ少しく整理すれば、

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_s} \frac{E_0 \alpha_0 + E_0 \alpha_0 \nu V_{d1}}{\left\{ 1 + \frac{E_0 \xi_0}{\bar{E}_2(t_0, t_s)} + \gamma V_{d1} \right\}} dV_{d1} \\ = \frac{E_0 \alpha_0}{1 + E_0 \xi_0 / \bar{E}_2(t_0, t_s)} \{ V_{d1}(t_0) - V_{d1}(t_s) \} \end{aligned}$$

同様にして、

(12) 例へば普通の鉄材に対しては $E_0 = 2 \cdot 10 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\gamma = 3 \cdot 03 \times 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $\alpha_0 = 1 \cdot 148 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $\nu = 4 \cdot 6 \times 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ と見てよい (C. Bach, R. Baumann, Konstruktionsmaterialien, 3, 5)。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_s} \frac{E_0 \alpha_0 + E_0 \alpha_0 \nu V_{d2}}{\left\{ \xi_0 + E_0 / E_1(t_0, t_s) \right\}} dV_{d2} \\ \cong - \frac{E_0 \alpha_0}{\xi_0 + E_0 / E_1(t_0, t_s)} \{ V_{d2}(t_0) - V_{d2}(t_s) \}, \end{aligned}$$

従て、

$$\begin{aligned} \sigma_{10} = & \frac{E_0 \alpha_0}{1 + E_0 \xi_0 / \bar{E}_2(t_0, t_s)} \{ V_{d1}(t_0) - V_{d1}(t_s) \} \\ & - \frac{E_0 \alpha_0}{\xi_0 + E_0 / E_1(t_0, t_s)} \{ V_{d2}(t_0) - V_{d2}(t_s) \} \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

若し、 $E_0 = 2 \cdot 10 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\alpha_0 = 1 \cdot 148 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$,

$$\bar{E}_1(t_0, t_s) = E_1(250^\circ\text{C}) \cong 1 \cdot 94 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2,$$

$$\bar{E}_2(t_2, t_s) = 2 \cdot 0 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2, \quad \xi_0 = 0 \cdot 75 \quad \text{等の数値を}$$

代入すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{10} = & 0 \cdot 135 \{ V_{d1}(t_0) - V_{d1}(t_s) \} \\ & - 0 \cdot 132 \{ V_{d2}(t_0) - V_{d2}(t_s) \} \text{ kg/mm}^2 \\ \text{同様に、} \\ \sigma_{30} = & 0 \cdot 135 \{ V_{d1}(t_e) - V_{d1}(\infty) \} \\ & - 0 \cdot 132 \{ V_{d2}(t_e) - V_{d2}(\infty) \} \text{ kg/mm}^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(27)$$

然るに、 $V_{d1}(\infty) = V_{d2}(\infty)$ であるから、

$$\sigma_{30} \cong 0 \cdot 135 V_{d1}(t_e) - 0 \cdot 132 V_{d2}(t_e) \text{ kg/mm}^2 \quad \dots\dots\dots(28)$$

若し冷却の途中鉄材が降伏しない時には、

$$\sigma_0 \cong 0 \cdot 135 V_{d1}(t_0) - 0 \cdot 132 V_{d2}(t_0) \text{ kg/mm}^2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

依て (29) に依て先づ σ_0 を求めその値が鉄材の常温における σ_s より大なる時には σ_0 は大体 σ_s に等しいと見てよいことになる。

第 8 図 (a), (b) には $\eta = 0 \cdot 26 \text{ cm}$ として板の厚さに依り、冷却の途中鉄が如何様に降伏するかを示した。但し第 8 図は (a), (b) 共に鉄材の常温における引張強さは $34 \sim 42 \text{ kg/mm}^2$ のものである⁽¹³⁾。

第 8 図 (a)

第 8 図 (b)

第 9 図

第 9 図中には $t_0 = 1000^\circ\text{C}$, $\eta = 0 \cdot 26 \text{ cm}$ とした場合に $V_{d1}(t_0) = 500^\circ\text{C}$ 及び 400°C に対する鉄の長さとの関係を示した。同図中の (I) 及び (III) は $V_{d1}(t_0) = 500^\circ\text{C}$, (II) は $V_{d1}(t_0) = 400^\circ\text{C}$ の場合で且 (I) 及び (II) は常温における鉄材は引張強さ $34 \sim 42 \text{ kg/mm}^2$ を有するもの又 (III)

(13) C. Bach 及び R. Baumann, Konstruktionsmaterialien 中に記載の Flusseisen, I.

はこれよりも強い材料の場合である。第9図中にはこれ等の他に文献に現はれた諸氏⁽⁴⁾の実験結果をも記載した。これを見るに上式より求められる σ_0 の値は実験結果と可成相違があるが、併し η の値の大なる方がその小なる場合より σ_0-l 曲線自身が l の大なる側に移動することより考へて第9図中に記載の実験結果と計算結果とを或る程度迄一致させることは困難なことではない。併しこれ等は η の値を実際の鉄打の場合に就て測定して後論することが望ましい。

6. 初應力の諸性質 上の計算より初應力に関し次のことが言へる。

a) 初應力の大小に最も関係するものは鉄の長さ l 及び鉄がその軸方向に抵抗し得る状態に達する時刻である。一般に長い鉄程その初應力も大となるが、或る長さ以上ではその初應力が鉄材の常温における降伏点に達する故これ以上初應力は増さない。かゝる場合には冷却の途中に於て鉄はその長さに應じ相當降伏するものである。而して長さに依る初應力の変化は主として鉄頭の影響であつて、鉄頭の形の影響は η の

数値に変化を及すと思はれる。

b) 板の厚さが厚い場合(即ち長い鉄)は常温における降伏点の高い材料の鉄がこれが低いものより、大なる初應力を受けてゐるが板が薄い場合には、鉄材の降伏点の大小は初應力には余り関係しない。

c) 前にも述べた様に η が大となれば σ_0-l 曲線は l の大なる方に移動する。この事柄と第10図中の諸実験の結果とより考へて、鉄が軸方向に抵抗し得る状態に達するのは $V_{d1}(t_0) \cong 500^\circ\text{C}$ 附近ではないかと思はれる。

d) 同一長さの鉄で締付ける板の枚数が増加すれば勢ひ ξ_0 も大となる故(板と板との接触面の粗雑のため)他の条件が同一ならば(26)より判る様に板の枚数が増加すれば σ_0 は小となる⁽²⁾($\sigma_0 > \sigma_s$ の場合)。

・終りに御指導を賜つた恩師東大小野教授並に本学生源寺教授に厚く御礼申上ぐると共に、諸計算を手傳はれた助手岩崎君に感謝する。

両端固定された勾配を有する板及び柱の挫屈⁽³⁾

(昭和12年11月15日 応用力学講演會に於て講演)

正 員 中 川 元⁽⁴⁾

摘 要

簡単な規則に従ふ勾配を有する板及び柱が中心軸方向に圧縮荷重を受けるとき、両端固定された場合の挫屈条件を見出し、円函数表及び Bessel 函数表を用ひて試索法より限界荷重を算出し、両端の太さの比及び勾配部の全長に対する割合に依て限界荷重の変はる模様を明かにした。

緒 言

筆者は簡単な規則に従ふ勾配を有する板及び柱が中心軸方向に圧縮荷重を受けるとき、頂端自由底端固定、両端自由、頂端自由支持底端固定の三支持法に於て限界荷重の変はる模様を明かにしたのであるが⁽⁵⁾、両端固定された場合を解くに至らなかつたので、既述のそれ等に就て両端固定における挫屈条件を見出し、限界荷重が如何様に変化するのかその模様を明かにした。

断面積の変化する板及び柱が両端で固定され、中心軸方向に圧縮荷重を受けるときは挫屈形が上下両端に對し対稱とならないから、両端に働らく固着モーメントも大きさが異なる

筈であつて、從て外力の平衡より両端に大きき等しく方向反對の反力 F を生じることとなる。頂面の中心 O に座標原点をとり、 x 軸を長柱の方向に y 軸は x 軸に直角、頂端を働く固着モーメントを M_0 とせば、次の微分方程式が成立する。

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py + Fx = M_0 \dots \dots \dots (1)$$

こゝで E は弾性係数、 I は x における断面積の慣性モーメント、 P は圧縮荷重である。

簡単な規則に従ふ場合として I が断面積の巾、厚さ、半径等を示す変数 z 及び常数 β, γ で次式で表され、

$$I = \beta z^\gamma \dots \dots \dots (2)^{(6)}$$

変数 z が上限値 a より下限値 b まで直線的に漸次変化す

⁽⁶⁾ 断面変化が(2)、(3)式の関係を有するときは、底端における最大慣性モーメントを I_0 とすれば、

$$I_0 = \beta b^\gamma, \quad \therefore I = I_0 \left(\frac{a}{b} + \frac{1-ab}{l} x \right)^\gamma.$$

断面変化が(6)式の関係を有するときは断面積部の慣性モーメントを I_0 とすれば、

$$I = I_0 \left(\frac{a}{b} + \frac{1-ab}{al} x \right)^\gamma.$$

(4) C. Bach 及び R. Baumann, V.D.I., 56, (1912), 1890. 鈴木 憲一、九州帝大卒業論文、(1912), W.M. Wilson 及び W. Oliver, Illinois Bulletin, 43, (1930), H. Ziem, 前出。竹中二郎、機械学会論文集、2, (1936), 151 頁。(2) W.M. Wilson 及び W. Oliver, 前出、第 17 表中の数値はこの傾向を示してゐる。(3) Buckling of Taper Plate and Column whose both ends are Fixed. (4) Hadime NAKAGAWA, Member, The Meiji Technical College. 明治専門学校。(5) 薄い等辺梯形板、薄い変厚矩形板、截頭円錐柱のかがまり、機械学会論文集、2, 8, (昭和11-8)。勾配部を有する円柱の挫屈、機械学会論文集、3, 11, (昭和12-5)。勾配部を有する矩形板の挫屈、機械学会論文集、3, 11, (昭和12-5)。