梁における撓及び傾斜の数学的構造論⁽¹⁾

(昭和14年11月11日 応用力学講演會に於て講演)

正員 長元 龜久男⁽²⁾

摘 要

梁における撓及び傾斜は弾性限内に於ては重ね合せの法則が成立する故荷重が x の函数として與へられさへすれば、梁における任意点の撓及び傾斜は弾性微分方程式によらず1箇の集中荷重をもつ梁の任意点の撓及び傾斜を積分することに依て容易に求め得る。而してその結果式を幾何学的に考察してみれば、一つの規則正しい容積分として表はされるものである。

1. 梁

1. 撓の理論 先づ単位となる1箇の集中荷重をもつ梁の任意点の撓は次式で求め得る⁽³⁾ (第1図)。

第 1 図

$$EI\delta_u = \frac{Pc}{6l} \{a(l+c)u - u^3\} \quad (1)$$

$$EI\delta_z = \frac{Pa}{6l} \{c(l+a)z - z^3\} \quad (2)$$

但し E = 縦弾性係数、 I = 断面の慣性モーメント、とし δ_u, δ_z は u, z における撓を表はすものとす。

上式にて $Pc/l = R_A, Pa/l = R_B$,

然らば

$$EI\delta_u = \frac{R_A}{6} (l+c) au - \frac{R_A}{6} u^3 \quad (3)$$

$$EI\delta_z = \frac{R_B}{6} (l+a) cz - \frac{R_B}{6} z^3 \quad (4)$$

今荷重が x の函数で與へられるとき、梁の任意点の撓を考へる (第2図)。

C を原点とし、 CD の方向を x 軸として、荷重が $P=f(x)$ で與へられるものとす。然らば支点 A における反動力に就て考ふるに、 P の変化につれて反動力 R_A も x の一つの函数として表はされる。同様に反動力 R_B も x の一つの函数として表はされる。

$$R_A = f_A(x), \quad R_B = f_B(x),$$

然らば $CDEF$ の荷重をもつ任意点 u 及び z の撓は

第 2 図

重ね合せの法則から次式で求め得ることは明らかである。

$$EI\delta_u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^{x=b} \frac{f_A(x)}{6} \Delta x (l+b+c-x-\Delta x)(a+x+\Delta x)u$$

$$- \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^{x=b} \frac{f_A(x)}{6} \Delta x u^3$$

$$EI\delta_z = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^{x=b} \frac{f_B(x)}{6} \Delta x (l+a+x+\Delta x)(b+c-x-\Delta x)z$$

$$- \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^{x=b} \frac{f_B(x)}{6} \Delta x z^3$$

$\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとれば次の如くなる。

$$EI\delta_u = \frac{1}{6} \int_0^b f_A(x) (l+b+c-x)(a+x) u dx - \frac{1}{6} \int_0^b f_A(x) u^3 dx \quad (5)$$

$$EI\delta_z = \frac{1}{6} \int_0^b f_B(x) (l+a+x)(b+c-x) z dx - \frac{1}{6} \int_0^b f_B(x) z^3 dx \quad (6)$$

次に v 点の撓は (5), (6) の和として次の如く求め得る (第3図)。

$$EI\delta_v = \frac{1}{6} \int_0^{b-v} f_A(x) (l+b+c-v-x)(a+v+x)(a+v) dx - \frac{1}{6} \int_0^{b-v} f_A(x) (a+v)^3 dx$$

(1) On a Mathematical Constitution of the Slope & Deflection of Beams. 東京石川島造船所在職中に研究したものである。

(2) Kikuo NAGAMOTO, Member, The Taga Technical College, 多賀高等工業学校。 (3) 長元龜久男、連続梁の一考察、日本機械学会論文集、5, 19, (昭14-5)。

$$+ \int_0^v f_B(x)(l+a+x)(b+c-x)(b+c-v)dx \\ - \frac{1}{6} \int_0^v f_B(x)(b+c-v)^3 dx \dots\dots\dots(7)$$

荷重 P が x の函数として與へられ、梁の任意点の撓は (5), (6), (7) にて容易に求め得る。

第 3 図

2. 傾斜の理論 荷重が x の函数として與へられる場合、梁の任意点における傾斜は前節の (5), (6), (7) 式を $u, z, (a+v), (b+c-v)$ にて微分すれば求め得るも、本節にては 1 箇の集中荷重をもつ梁の任意点の傾斜式を単位として、前節と同様に荷重が x の函数として與へられる場合の傾斜を単独に求める。

撓式 (3), (4) を u, z に就て微分すれば

$$EI \frac{d\delta_u}{du} = \frac{R_A}{6} (l+c)a - \frac{R_A}{2} u^2$$

$$EI \frac{d\delta_z}{dz} = \frac{R_B}{6} (l+a)c - \frac{R_B}{2} z^2$$

$d\delta_u/du = i_u, d\delta_z/dz = i_z$ である。

$$EI i_u = \frac{R_A}{6} (l+c)a - \frac{R_A}{2} u^2 \dots\dots\dots(8)$$

$$EI i_z = \frac{R_B}{6} (l+a)c - \frac{R_B}{2} z^2 \dots\dots\dots(9)$$

(8), (9) 式は 1 箇の集中荷重をもつ梁の任意点 u, z の傾斜である。それ故荷重が x の函数として與へられれば任意点の傾斜は次の如く求め得る。

$$EI i_u = \frac{1}{6} \int_0^b f_A(x)(l+b+c-x)(a+x)dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^b f_A(x)u^2 dx \dots\dots\dots(10)$$

$$EI i_z = \frac{1}{6} \int_0^b f_B(x)(l+a+x)(b+c-x)dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^b f_B(x)z^2 dx \dots\dots\dots(11)$$

次に v 点の傾斜は (10), (11) の代数和で次の如く求め得る。

$$EI i_v = \frac{1}{6} \int_0^{b-v} f_A(x)(l+b+c-v-x)(a+v+x)dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^{b-v} f_A(x)(a+v)^2 dx \\ + \frac{1}{6} \int_0^v f_B(x)(l+a+x)(b+c-x)dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^v f_B(x)(b+c-v)^2 dx \dots\dots\dots(12)$$

3. 幾何学的考察 撓の (5), (6), (7) 式の結果を幾何学的に考へてみれば次の様な規則正しい容積体である。先づ (5) 式に就て考ふるに結果は第 4 図の如き容積体である。

この容積体に就て検討を加ふるに先づ集中荷重をもつ梁の撓には既に次の如き規則がある⁽³⁾ (第 5, 6 図)。

第 4 図

第 5 図

第 6 図

即ち第 4 図における $ABCD$ は、 AB が第 5 図で ab であり、 AD は第 5 図で $1/6 \times R_A \times bc \times cd$ である。 IA は第 5 図で $1/6 \times R_A \times ef \times fg$ であり、 AK は第 5 図で gh である。 AE は荷重の存する長さ b である。 $EFGH$ につき今と同様に、 EF は第 6 図で $a'b'$ であり、 EH は第 6 図で $1/6 \times R_B \times b'c' \times c'd'$ である。 NE は第 6 図で $1/6 \times R_A \times e'f' \times f'g'$ であり、 EM は第 6 図で $g'h'$ である。 DH は $f_A(x)/6 \times (a+x)u$ なる曲線であり、 IN は $f_A(x)/6 \times u^2$ なる曲線である。

それ故荷重が x の函数として與へられ、梁における任意点 u の撓は一つの規則正しい容積体で表はされるものである。同様に z 点の撓は次の如き容積体である (第 7 図)。

[第 6 巻 第 22 号 (第 1 部)]

第 7 図

v 点の撓は (第 3 図) 第 4 図の如き容積体と第 7 図の如き容積体の和で表はされる。即ち第 8 図の如き容積体となる。

第 8 図

次に 1 箇の集中荷重をもつ梁の任意点 u の傾斜に就ては次の如き規則がある (第 9 図)。

第 9 図

即ち任意点 u の傾斜は $1/6 \times R_A \times ac \times cd - 1/2 \times R_A \times cf \times fg$ で求め得る。

任意点 z の傾斜に就ては第 10 図の如き規則がある。

この事から撓の場合と同様に一つの規則正しい容積体が想像される。

第 10 図

第 11 図

2. 片持梁

1. 撓の理論 1 箇の集中荷重をもつ片持梁の任意点の撓は次式で求め得る⁽⁴⁾ (第 11 図)。

$$EI\delta_u = \frac{Pau^2}{2} - \frac{Pu^3}{6} \dots\dots\dots(13)$$

$$EI\delta_z = \frac{Pa^2z}{2} + \frac{Pa^3}{3} \dots\dots\dots(14)$$

第 12 図

荷重が x の函数として與へらるゝとき、片持梁の任意点の撓を考へる (第 12 図)。

C を原点とし、 CD の方向を x 軸とし、荷重が $P=f(x)$ として與へらるゝものとす。然らば前節と同様に $CDEF$ の全荷重に就て任意点 u, z の撓は重ね合せの法則により次式で求め得ることは明らかである。

$$EI\delta_u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^b \frac{f(x)}{2} \Delta x (a+x+\Delta x) u^2 - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^b \frac{f(x)}{6} \Delta x u^3$$

$$EI\delta_z = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^b \frac{f(x)}{2} \Delta x (z+b-x-\Delta x)(a+x+\Delta x)^2 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^b \frac{f(x)}{3} \Delta x (a+x+\Delta x)^3$$

$\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとれば次の如くなる。

$$EI\delta_u = \frac{u^2}{2} \int_0^b f(x)(a+x) dx - \frac{u^3}{6} \int_0^b f(x) dx \dots\dots(15)$$

$$EI\delta_z = \frac{1}{2} \int_0^b f(x)(z+b-x)(a+x)^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^b f(x)(a+x)^3 dx \dots\dots(16)$$

次に片持梁の任意点 v の撓は (15), (16) の和として次の如く求め得る (第 13 図)。

$$EI\delta_v = \frac{(a+v)^2}{2} \int_v^{b-v} f(x)(a+v+x) dx$$

(4) 中澤盛直、機械学会誌、28, 101, (大 14-9)。

$$-\frac{(a+v)^3}{6} \int_v^{b-v} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^v f(x)(v-x)(a+x)^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^v f(x)(a+x)^3 dx \quad \dots\dots\dots(17)$$

荷重が x の函数として與へられれば (15), (16), (17) 式により片持梁の任意点の撓は容易に求め得る。

第 13 図

2. 傾斜の理論 荷重が x の函数として與へらるゝ場合における片持梁の任意点の傾斜は、(15), (16), (17) 式を夫々 u , $(z+b-x)$, $(a+v)$, $(v-x)$ にて微分すれば求め得るも、本節にては 1 箇の集中荷重をもつ片持梁の任意点の傾斜式を単位として前節と同様に荷重が x の函数として與へらるゝ場合の傾斜を単独に求める。

撓式 (13), (14) を u 及び z に就て微分すれば

$$EI \frac{d\delta_u}{du} = Pau - \frac{P}{2} u^2$$

$$EI \frac{d\delta_z}{dz} = \frac{Pa^2}{2}$$

$$\text{即ち} \quad EI i_u = Pau - \frac{P}{2} u^2 \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$EI i_z = \frac{Pa^2}{2} \quad \dots\dots\dots(19)$$

(19) 式は着力点の位置にのみ関し傾斜を求むべき位置に関係せず常に一定であるといふことを意味してゐる。

然らば梁の場合と同様に荷重が x の函数として與へられれば任意点の傾斜は次の如く求め得る。

$$EI i_u = \int_0^b f(x)(a+x)u dx - \frac{1}{2} \int_0^b f(x)u^2 dx \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$EI i_z = \frac{1}{2} \int_0^b f(x)(a+x)^2 dx \quad \dots\dots\dots(21)$$

次に v 点の傾斜は (20), (21) の代数和で求め得る。

$$EI i_v = \frac{1}{2} \int_0^v f(x)(a+x)^2 dx + \int_v^{b-v} f(x)(a+v+x)(a+v) dx - \frac{1}{2} \int_v^{b-v} f(x)(a+v)^2 dx \quad \dots\dots\dots(22)$$

3. 幾何学的考察 撓の (15), (16), (17) 式の結果を幾何学的に考へてみれば梁の場合と同様に規則正しい容積体である。先づ (15) 式に就て考ふるに結果は第 14 図の如き容積体である。

この容積体に就て検討を加ふるに先づ集中荷重をもつ片持梁の撓には次の如き規則がある (第 15 図)。

即ち第 14 図における $ABCD$ は、 AB が a であり、 BC が $f(x)/2 \times u^2$ である。 AK を u にとれば AI は $f(x)/6$

第 14 図

第 15 図

第 16 図

$\times u^2$ である。 AE は荷重の存する長さ b である。 $EFGH$ は EF が $a+b$ であり、 EH が $f(x)/2 \times u^2$ である。 EN を u にとれば LE は $f(x)/6 \times u^2$ である。 DH は $f(x)/2 \times u^2$ なる曲線であり、 IL は $f(x)/6 \times u^2$ なる曲線である。

それ故荷重が x の函数として與へられれば、片持梁における任意点 u の撓は一つの規則正しい容積体で表はされるものである。

次に z の撓に就て考ふるに、 z 点の撓には次の如き規則がある (第 16 図)。

この事から z 点の撓は第 17 図の如き規則正しい容積体で表はされることがわかる。

v 点の撓は第 14 図と第 17 図の如き容積体の和で表はされる。即ち第 13 図 v 点の撓は第 18 図の如き容積体で表はされる。

次に 1 箇の集中荷重をもつ片持梁の任意点 u , z の傾斜に就ては次の如き規則がある (第 19, 20 図)。

即ち u 点の傾斜は、 $P \times ab \times cd$ と $-P/2 \times ef \times fg$ の代数和で求め得るから、荷重が x の函数として與へられれば u 点の傾斜は一つの規則正しい容積体となることは容易に想像出来る。又 z 点の傾斜は、 $P/2 \times a'b' \times b'c'$ にて求め得るから、荷重が x の函数として與へられれば、同様に規則正しい容積体となることは容易に想像出来る。

3. 應 用

只今の理論を、梁及び片持梁に於て普通一般に取扱ふ等分布荷重及び等変化分布荷重に應用し、これ等を纏れば第 1~3 表の如くなる。

第 17 図

第 18 図

4. 結 び

梁及び片持梁に於て、1 箇の集中荷重をもつときの撓式の記憶は極めて容易なものであるから、荷重が x の函数で與へられさへすれば、これらの梁における任意点の撓及び傾斜は極めて容易に求めるものである。

(昭和 14 年 9 月 30 日受付)

第 19 図

第 20 図

第 1 表 梁 の 撓

荷重条件	I	II	III
幾何学的構造			
高さ	$\frac{Pu}{6l}$	$\frac{Pu}{6bl}$	
側面積	$-\frac{b^3}{3} + (l-2a)\frac{b^2}{2} + (l-a)ab$	$-\frac{b^4}{4} + (l-2a)\frac{b^3}{3} + (l-a)a\frac{b^2}{2}$	
重心	$-\frac{b^4}{4} + (l-2a)\frac{b^3}{3} + (l-a)a\frac{b^2}{2}$	$-\frac{b^5}{5} + (l-2a)\frac{b^4}{4} + (l-a)a\frac{b^3}{3}$	
減少側面積	$\frac{Pu^2}{6l}$	$\frac{Pu^2}{6bl}$	
備考	容積を計算すればよい	容積を計算すればよい	I の容積から II の容積を減すればよい
	z 点の撓は支点 B に就て同様の容積体を考へればよい	z 点の撓は支点 E に就て同様の容積体を考へればよい	
	v 点の撓は u 系の容積と z 系容積の代数和で得らる	v 点の撓は u 系の容積と z 系容積の代数和で得らる	
$EI\delta_u$	傾斜は高さを u に就て微分したものである	傾斜は高さを u に就て微分したものである	

第 2 表 片持梁 u 点の撓

荷重条件	I	II	III
幾何学的構造			
$EI\delta_u$	容積は初等的に直ちに求め得る	容積は初等的に直ちに求め得る	I の容積から II の容積を減すればよい
EIi_u	傾斜は高さを u にて微分すればよい	傾斜は高さを u にて微分すればよい	

第 3 表 片持梁 z 点の撓

荷重条件	I	II	III
幾何学的構造			
上半の高さ	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2b}$	
上半側面積	$\frac{(z+b)a + (z+b-a)b^2}{(z+b)ab + (z+b-a)\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{2}}$	$\frac{(z+b)ab + (z+b-a)b^2 - b^3}{(z+b)a\frac{b^2}{2} + (z+b-a)\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}}$	
上半重心 $\bar{x}_1$	$\frac{(z+b)a\frac{b^2}{2} + (z+b-a)\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}}{(z+b)ab + (z+b-a)\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3}}$	$\frac{(z+b)a\frac{b^3}{3} + (z+b-a)\frac{b^4}{4} - \frac{b^5}{5}}{(z+b)a\frac{b^2}{2} + (z+b-a)\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}}$	
下半の高さ	$\frac{P}{3}$	$\frac{P}{3b}$	
下半側面積	$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2b + 2a\frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3}}$	$\frac{a^2b + 2ab^2 + b^3}{a^2\frac{b^2}{2} + 2a\frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4}}$	
下半重心 $\bar{x}_2$	$\frac{a^2\frac{b^2}{2} + 2a\frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4}}{a^2b + 2a\frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3}}$	$\frac{a^2\frac{b^3}{3} + 2a\frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5}}{a^2\frac{b^2}{2} + 2a\frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4}}$	
$EI\delta_z$	容積を計算すればよい	容積を計算すればよい	I の容積から II の容積を減すればよい
備考	v 点の撓は u 系容積と z 系容積の代数和で得らる	v 点の撓は u 系容積と z 系容積の代数和で得らる	
EIi_z	傾斜は高さを $z+b-x$ に就て微分したものである	傾斜は高さを $z+b-x$ に就て微分したものである	