材料の変形の経路と塑性変形⁽¹⁾

(昭和 14 年 2 月 9, 10 日 第 11 回 満洲地方講演會に於て講演)

正 員 中 川 有 三⁽²⁾

緒 言

塑性変形は永久変形である關係上、應力歪曲線は應力の増減に対して同一の経路をとらない。即ち ヒステレシスの現象を呈する。筆者は材料の塑性変形が應力増減の状態により如何なる値をとるかに就て考究しようと思ふ。

1. 應力増減の経路と塑性変形

今一例として材料の應力歪曲線を最大主剪断應力と最大主剪断歪の座標軸に関して表はすと第 1 図の如くなつたものとする。曲線 $OABCE$ は應力状態 (A) の場合の應力歪曲線を表はし、曲線 $OA'B'C'E'$ は應力状態 (B) に相當する應力歪曲線とする。今應力状態 (A) にて荷重を増加してゆき曲線上の 1 点 C に達したとき、荷重を取除くと應力の減少に伴ひ曲線は AO に並行に CD に沿ひ下る。同じ應力状態のもとに D 点より再び應力を増してゆくと DC に沿ひ上昇して C 点に達して弾性破損を起し塑性変形を生じ、曲線は右曲して前の CE 線に沿ひ上昇する。即ち DC 間は完全弾性変形を示し、 CE 間は塑性変形状態を示す。然るに D 点より應力状態を加へて應力を増大せしめると DCC' の如く直線に沿ひ上昇し、 C' 点に達して始めて塑性変形を生じはじめる。従て、 D 点にある材料は應力状態の差異によりその降伏点を異にする。この線図に就ては Lode⁽³⁾ が実験結果に就て既に説明してゐるところである。然るに C 点及び C' 点にある材料の塑性変形は共に $\overline{OD}$ である。即ち D 点にある材料を特性づけるものは塑性変形の $\overline{OD}$ である。 $C'E'$ 線はその應力状態の應力歪曲線 $OA'B'C'E'$ 上に来る。

第 1 図

應力状態 (A) に対して、應力歪間の關係を、

$$\varepsilon_{p1} = c\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \dots \dots \dots (1)$$

等とし、 C 点に対して、

$$(\varepsilon_{p1})_C = (\varepsilon_{p1})_D = (c)_C\{\sigma_{1C} - \frac{1}{2}(\sigma_{2C} + \sigma_{3C})\},$$

又任意の 1 点 E に対して、

$$\varepsilon_{p1} = c\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\}$$

$$\therefore \varepsilon_{p1} - (\varepsilon_{p1})_C = c\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\} - (c)_C\{\sigma_{1C} - \frac{1}{2}(\sigma_{2C} + \sigma_{3C})\},$$

然るに C 点及び E 点は共に同一應力状態の應力歪曲線上の 2 点であるから主應力間の比は相等しく

$$\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\} = i\{\sigma_{1C} - \frac{1}{2}(\sigma_{2C} + \sigma_{3C})\}$$

とおくことが出来る。故に

$$\varepsilon_{p1} - (\varepsilon_{p1})_C = \left\{c - \frac{(c)_C}{i}\right\} \left\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right\}$$

今 D 点を原点として考へれば $\varepsilon_{p1} - (\varepsilon_{p1})_C$ を ε_{p1}' で表はし、

$$\varepsilon_{p1}' = c'\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \dots \dots \dots (2)$$

と書くことが出来る。こゝに

$$c' = c - \frac{(c)_C}{i} \dots \dots \dots (3)$$

である。

次に D 点より應力状態 (B) にて変形せしめた場合にも同様にして、

$$\varepsilon_{p1} - (\varepsilon_{p1})_{C'} = c\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\} - (c)_{C'}\{\sigma_{1C'} - \frac{1}{2}(\sigma_{2C'} + \sigma_{3C'})\}$$

こゝに、

$$\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = i'\{\sigma_{1C'} - \frac{1}{2}(\sigma_{2C'} + \sigma_{3C'})\}$$

とおくことが出来るから、

$$\varepsilon_{p1} - (\varepsilon_{p1})_{C'} = \left\{c - \frac{(c)_{C'}}{i'}\right\} \left\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right\}$$

従て、 $\varepsilon_{p1} - (\varepsilon_{p1})_{C'}$ を ε_{p1}'' で表はせば

$$\varepsilon_{p1}'' = c''\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\},$$

こゝに

$$c'' = c - \frac{(c)_{C'}}{i'}$$

である。故に既に塑性変形を生じた材料に於ても、應力塑性歪關係式は (1) を用ひることが出来る。

次に近似式に就て述べる。 DC' と DC との差は Lode の実験結果より明らかなる如く比較的小であるから、この差を無視すると、あらゆる應力状態に対し 1 本の應力歪曲線 $OABCE$ を用ふれば良いことになる。これは近似曲線となるがこの曲線を代用すると非常に便利である。

材料の最初の状態に於て、應力塑性歪曲線を

$$\gamma = \varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p3} = \frac{2}{3}\{\varepsilon_0 + \alpha(\sigma_1 - \sigma_3 - K^{-1})^n\}$$

とすれば、 C 点に対しては、

$$(\varepsilon_{p1})_C - (\varepsilon_{p3})_C = \frac{2}{3}\{\varepsilon_0 + \alpha(\sigma_{1C} - \sigma_{3C} - K^{-1})^n\}$$

故に D 点を原点として考へれば

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p1}' - \varepsilon_{p3}' &= (\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p3}) - (\varepsilon_{p1C} - \varepsilon_{p3C}) \\ &= \frac{2}{3}\alpha\{(\sigma_1 - \sigma_3 - K^{-1})^n - (\sigma_{1C} - \sigma_{3C} - K^{-1})^n\} \end{aligned}$$

にて表はし得る。

今主剪断歪を基礎とした筆者の塑性理論に於ては、塑性係

[第 6 卷 第 23 号 (第 1 部)]

(1) The Path of Deformation of Materials and the Plastic Deformation.

(2) Yüzö NAKAGAWA, Member. The Ryojun College of Engineering. 旅順工科大学。

(3) W. Lode: Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle. Forschungsarbeiten aus dem Gebiete des Ingenieurwesens (1928).

数は、

$$c' = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{p1}' - \varepsilon_{p3}'}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\alpha(\sigma_1 - \sigma_3 - K')^n - A}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (4)$$

で示される。こゝに

$$A = \alpha(\sigma_{1C} - \sigma_{3C} - K')^n$$

である。或は

$$c' = c - \frac{(c)C}{i} = \frac{\alpha(\sigma_1 - \sigma_3 - K')^n - A}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

となる。何となれば $(\sigma_1 - \sigma_3) = i(\sigma_{1C} - \sigma_{3C})$ であるからである。今簡単に $n=1$ と近似値をとれば

$$c' = \frac{\alpha(\sigma_1 - \sigma_3) - A_0}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (5)$$

となる。こゝに

$$A_0 = \alpha(\sigma_{1C} - \sigma_{3C})$$

である。

即ち、最初の材料の ε_0 を零とし、降伏点の応力 K' を $\sigma_{1C} - \sigma_{3C}$ にかへた場合の塑性係数に等しい。

2. ヒステレシス

材料を引張り弾性限度を超え、塑性変形状態に達せしめた後、その荷重を除き圧縮荷重を加へるときはその弾性限度が遙かに下る。最初加へた引張歪と大きさの等しい圧縮歪を加へたる後、再び引張荷重を加へると殆ど最初の引張の点に帰へることが知られてゐる。これは磁気の場合と同様にヒステレシスの現象を呈してゐるのである。理研の庄司氏⁽⁴⁾は Sachs 氏と共にこの引張圧縮の試験を行い、Bauschinger 効果の研究をなした結果、次の相加の法則が成立することを述べ、これが実験結果と可成り適合すると云つてゐる。

最初の引張の応力歪曲線を

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

とすれば II の圧縮曲線は

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= f(\varepsilon_1 + \varepsilon') - 2f(\varepsilon') \\ \varepsilon' &= \varepsilon_1 - \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

としてゐる。然しこのヒステレシスに於て、 $\varepsilon_1 = |\varepsilon_1'|$ なる場合に、次の引張曲線 III は大体に於てもとの P_1 点にかへる様であるから、筆者は次の如く表はした方が適當であると思ふ。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= f(\varepsilon_1) - 2f(\varepsilon_1/2) \\ \varepsilon' &= \varepsilon_1 - \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

第 2 図

I, II, III. 実験値

—○—○—○—

----- 庄司氏曲線

----- 中川 曲線

然るときは I の曲線における弾性限度 S_1 に比べて、II の曲線の弾性限度 S_2 は甚だ低くなることかわかる。即ち

$$P_1 S_2 = 2 \cdot OS_1$$

第 3 図

次に最初 ε_1' の歪を與へて P_1' 点に達せしめたる後、ヒステレシスを画かしめると弾性限度は又 S_2' に下る。 $S_2 S_2' \dots$ 線は Bauschinger 効果による弾性限度の降下を示す曲線を與へる。

今最初の應力歪曲線が

$$\left. \begin{aligned} \tau &= T + b' \gamma^{1/n} \\ \gamma &= \beta(\tau - T)^n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

或は

で與へられるものとする。但し $\beta = 1/b'^n$ である。(7) を使用するとこの場合には

$$\tau = \tau_1 - 2 \left\{ T + b' \left(\frac{\gamma'}{2} \right)^{1/n} \right\}$$

$$\therefore \gamma'^{1/n} = \frac{2^{1/n}}{2b'} (\tau_1 - \tau - 2T)$$

$$\therefore \gamma' = \frac{1}{2^{n-1} b'^n} (\tau_1 - \tau - 2T)^n = \beta' (\tau_1 - \tau - 2T)^n$$

とおくと $\beta' = \frac{1}{2^{n-1} b'^n}$ である。

P_1 点を原点として下向に應力を取り左方に歪をとれば $2T = T'$ において $\tau' = \tau_1 - \tau$ であるから

$$\gamma' = \beta' (\tau' - T')^n \quad (9)$$

こゝに $\beta' : \beta = 1 : 2^{n-1}$, ($n > 1$) の関係が存在する。上式は最初

の應力歪曲線と同型であつて指数を等しくする。又降伏点が恰度 2 倍になつた如く見ることが出来る。

$n=1$ の特別の場合には $S_1 P_1 P_1'$ は直線となる。従て、第 4 図の如く表はされる。

鋼材等に於て一般に S_1 は P_{max} の半分よりも大であるから S_2 点は第 1 象限に入ることではないのである。斯くの如く、近似的に $n=1$ として直線を用ふときは、塑性変形のあまり大でない場合における近似解が得られる。計算が非常に簡単になる。

第 4 図

$$n=1 \text{ とすると } \beta' = \beta = 1/b'$$

$$\gamma = \beta(\tau - T), \quad \gamma' = \beta'(\tau' - T') \quad (10)$$

となる。

このヒステレシスの曲線が定まれば、その應用として次の如き諸問題が研究される。即ち (1) 挫屈、(2) エラスティカ、(3) 引張変形後の彎曲、(4) 捩り変形後の彎曲等の問題である。

(4) G. Sachs u. H. Shoji: Zug-Druckversuche an Messingkristallen (Bauschinger Effekt) Zeits. f. Physik Bd. 45, 1927 及び H. Shoji: Über den Bauschinger Effekt. Zeits. f. Phys. Bd. 51, 1928.

3. 引張歪を生じた丸棒の捩り

前節に述べた應力歪曲線とヒステレシスの曲線の應用として次に二三の應用例を示すことにする。

先づ、丸棒を引張り塑性変形状態に達せしめたる後、これを捩つた場合の変形に就て考へる。

今丸棒の中心線の方を x 軸にとると引張荷重 P を與へた場合の應力は第 1 図の應力歪曲線上の C 点に相當し

$$\sigma_t = P/F \quad \dots\dots\dots(11)$$

で示される。但し F は棒の断面積である。歪は

$$\varepsilon_{px} = \varepsilon_{p1} = \varepsilon_0 + \alpha(\sigma_t - K') \quad \dots\dots\dots(12)$$

但し $n=1$ とした近似式を用ひる。

筆者の主剪断歪を基礎とした塑性理論によるときは塑性係数は

$$c_1 = \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sigma_t}{\sigma_t} \quad \dots\dots\dots(13)$$

である。

引張荷重を加へた後この荷重を除かず、これに捩りモーメント M_t を加へると断面上に剪断力 τ が生じる。 $\tau = f(r)$ である。この場合の塑性係数は次の如くなる。主應力が

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}\sigma_t + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}\sigma_t - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

であるから、塑性係数は

$$c_2 = \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}} \quad \dots\dots\dots(15)$$

これも r の函数である。勿論 $\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2} > \sigma_t$ であるから、変形は進んで第 1 図の應力歪曲線上の C 点より先にゆき E の状態に達する。 x 方向の歪は最初の状態より測つて、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{px} &= c_2\{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\} = c_2\sigma_t \\ &= \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}} \cdot \sigma_t \\ \varepsilon_{py} &= \varepsilon_{pz} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{px} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

となる。新らしい剪断塑性歪は

$$\begin{aligned} \gamma_p &= 3c_2\tau - (\gamma_p)_c = 3 \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}} \\ &\quad - \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sigma_t) \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

である。 $(\gamma_p)_c$ は C 点における剪断塑性歪で、 C 点における τ は $(\tau)_c = \frac{1}{2}\sigma_t$ であるから

$$(\gamma_p)_c = \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau)_c = \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sigma_t) \quad \dots\dots\dots(17')$$

となる。

従て捩角は

$$r\theta = \gamma = \gamma_e + \gamma_p$$

$$\text{より} \quad \theta = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{G} + 3c_2 \right) \tau - \frac{3}{2} c_1 \sigma_t \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\left\{ \frac{1}{G} + 3 \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}} \right\} \tau \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sigma_t) \right] \quad \dots\dots\dots(18)$$

周辺上の点に対して、 $r=r_1$ 、 $\tau=\tau_1$ とすれば

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{r_1} \left[\left\{ \frac{1}{G} + 3 \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau_1^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau_1^2}} \right\} \tau_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sigma_t) \right] \quad \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

又一方 Prandtl の式より

$$\tau_1 = \frac{3M_t + \theta \frac{dM_t}{d\theta}}{2\pi r_1^3} \quad \dots\dots\dots(20)$$

この 2 式より τ_1 を消去すれば モーメント M_t を θ 函数として求められ、従て、 M_t に対して τ_1 が求められる。(19) は τ_1 の四次式である。

次に丸棒に加へた最初の引張荷重を除いて、これに捩りモーメント M_t を加へた場合には、 M_t の小なる間は第 1 図の DC 直線上にあり弾性変形をなす。塑性係数が

$$c_3 = \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau}{2\tau} = c_1 = \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sigma_t}{\sigma_t}$$

即ち $2\tau = \sigma_t$ に達すると図の C 点に来る。 $2\tau \leq \sigma_t$ の間は弾性変形をなす。故に

$\tau < \frac{1}{2}\sigma_t$ に対しては

$$\gamma_e = \frac{1}{G}\tau, \quad \gamma_p = 0 \quad \therefore \gamma = \frac{1}{G}\tau \quad \dots\dots\dots(21)$$

最初加へた引張のための永久歪 $(\gamma_p)_t = \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sigma_t)$ は滑りの方向がちがひ、これだけは永久歪として存在する。

又 $\tau > \frac{1}{2}\sigma_t$ に対しては

$$\gamma_e = \frac{1}{G}\tau$$

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau) - \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau)_c \\ &= \frac{3}{2}\alpha(2\tau - \sigma_t) \quad \therefore (\gamma_p)_c = \sigma_t \end{aligned}$$

$$\therefore \gamma = \gamma_e + \gamma_p = \frac{1}{G}\tau + \frac{3}{2}\alpha(2\tau - \sigma_t) \quad \dots\dots\dots(22)$$

故に比捩角は $r=r_1$ に対し

$$\theta = \frac{1}{r_1} \left\{ \frac{1}{G}\tau_1 + \frac{3}{2}\alpha(2\tau_1 - \sigma_t) \right\} \quad \dots\dots\dots(23)$$

この式と前掲の Prandtl の式とより M_t と θ との関係式が求められる。即ち (23) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{G} + 3\alpha \right) \tau_1 &= \theta r_1 + \frac{3}{2}\alpha\sigma_t \\ \therefore \left(3M_t + \theta \frac{dM_t}{d\theta} \right) \left(\frac{1}{G} + 3\alpha \right) &= 2\pi r_1^3 \left(\theta r_1 + \frac{3}{2}\alpha\sigma_t \right) \\ \therefore \frac{d(\theta^3 M_t)}{d\theta} &= \frac{1}{3\alpha + (1/G)} \{ 2\pi r_1^4 \theta^3 + 3\alpha\pi r_1^3 \sigma_t \theta^2 \} \end{aligned}$$

これを積分して

$$\theta^3 M_t = \frac{1}{3\alpha + (1/G)} \{ \frac{1}{2}\pi r_1^4 \theta^4 + \alpha\pi r_1^3 \sigma_t \theta^3 + C_1 \}$$

$\theta=0$ のとき $M_t \neq \infty$ なるためには $C_1=0$ でなければならぬ。

$$\therefore M_t = \frac{1}{3\alpha + (1/G)} \{ \frac{1}{2}\pi r_1^4 \theta + \alpha\pi r_1^3 \sigma_t \} \quad \dots\dots\dots(24)$$

4. 振られた丸棒の引張

丸棒が振られて塑性変形状態に達してゐるものを更に引張つた場合における應力と塑性変形との関係を求める。

今 振りモーメント が作用して丸棒の断面上に剪断應力 τ が生じ、塑性変形状態になつてゐるものとすれば剪断塑性歪は、

$$\gamma_p = 3c_1\tau = \frac{3}{2}(\epsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau) \quad (25)$$

然るに

$$\left(3c_1 + \frac{1}{G}\right)\tau = \theta r$$

であるから比捩角は

$$\theta = \frac{1}{r} \left\{ \tau + \frac{3}{2}(\epsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau) \right\} \quad (26)$$

この塑性変形状態即ち第 1 図の C 点に達したものを荷重 P を加へて引張るものとする。断面上には直角應力 σ_t が生じる。

$$\epsilon_{px} = c_2\sigma_t - c_1(\sigma_t)_C = \frac{\epsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}\sigma_t - (\epsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau), \quad \because (\sigma_t)_C = 2\tau \quad (27)$$

引張應力 σ_t のために塑性係数が変わるので τ による振りの剪断歪が更に変化する。新しい剪断歪は

$$\begin{aligned} \gamma_p &= 3c_2\tau - 3c_1(\tau)_C \\ &= 3 \frac{\epsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}\tau - \frac{3}{2}(\epsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau) \end{aligned}$$

最初の状態より測つた塑性歪は

$$\gamma_p = 3 \frac{\epsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}\tau \quad (28)$$

従て比捩角は

$$\theta = \frac{1}{r}(\tau_e + \gamma_p) = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\tau}{G} + 3 \frac{\epsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}\tau \right\} \quad (29)$$

周辺上の点に対して、 $r=r_1$, $\tau=\tau_1$

$$\therefore \theta = \frac{1}{r_1} \left\{ \frac{\tau_1}{G} + 3 \frac{\epsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau_1^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau_1^2}}\tau_1 \right\} \quad (30)$$

この式と Prandtl の式 (20) とより τ_1 を消去すれば M_t と θ の関係が得られる。

次に丸棒に加へた最初の 振りモーメント を除いて更めて引張荷重を與へた場合には、引張應力 σ_t が 2τ より小なる間は弾性変形をなし、

$$\epsilon_{ex} = \sigma_t/E, \quad \epsilon_{px} = 0 \quad (31)$$

最初與へた 振りモーメント に依る剪断塑性歪

$\gamma_p = \frac{3}{2}(\epsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau)$ のみは永久歪として残る。

又 $\sigma_t > 2\tau$ の場合には変形は進んで第 1 図の CE 線上に移る。

$$\therefore \epsilon_{px} = \frac{\epsilon_0 - \alpha K' + \alpha\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2}}\sigma_t - (\epsilon_0 - \alpha K' + 2\alpha\tau) \quad (32)$$

となる。

昭和 15 年 5 月]

5. 引張られた梁の彎曲

断面が矩形である梁が最初その中心線の方に引張られて塑性変形を生じてゐるものとする。これに 曲げモーメント を與へて彎曲せしめた場合における應力分布及び変形の値を求める。今梁の中心線の方を x 軸にとると、これに垂直なる方向の直角應力 σ_y 及び σ_z は普通甚だ小なるものであるからこれ等を無視して差支ない。引張荷重を P , 断面積を $F=bh$ で表せば最初生じた應力は

$$\sigma_x = \sigma_t = \frac{P}{F} = \frac{P}{bh} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{歪は} \quad \epsilon_{px} &= (\epsilon_p)_t = \alpha(\sigma_t - K') \\ \text{塑性係数は} \quad c_1 &= \frac{\alpha(\sigma_t - K')}{\sigma_t} \end{aligned} \quad (34)$$

但し $\epsilon_0 = 0$ 即ち降伏点の踊り場の甚だ短い材料に対して考へることとしたのである。

この状態に於て引張荷重を除かず、単純曲げモーメントを加へると梁の引張側では應力は $\sigma_t + \sigma_b$ となり、 $\sigma_t + \sigma_b > \sigma_t$ 即ち應力状態は第 3 図の P_1 より P_1' の方に変形が進む。

$$\begin{aligned} \text{塑性係数は} \quad c_2 &= \frac{\alpha(\sigma_t + \sigma_b - K')}{\sigma_t + \sigma_b} \\ \text{故に塑性係数は} \quad \epsilon_{px} &= \alpha(\sigma_t + \sigma_b - K') \end{aligned} \quad (35)$$

となる。こゝに σ_b は 曲げモーメント のために増加した應力を示す。圧縮側に於ては $\sigma_b < 0$ $\therefore \sigma_t + \sigma_b < \sigma_t$ となり、最初の引張荷重及び加へた 曲げモーメント の値の大小により変形状態は第 3 図の P_1S_2 又は S_2P_2' 線上に来る。

比較的 曲げモーメント の小なる場合には P_1S_2 線の状態になる。今中心線上の x 方向の歪を ϵ_0 とせば、任意の点における歪は引張側にて

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \frac{\eta}{\rho} = \epsilon_{ex} + \epsilon_{px} = \left(\frac{1}{E} + \alpha\right)(\sigma_t + \sigma_b) - \alpha K' \quad (36)$$

こゝに ρ は曲率半径を示し、 η は中心線より任意の点に至る距離を示す。

$\eta = \eta_1$ にて $\sigma_b = 0$ とすれば

$$\epsilon_0 + \frac{\eta_1}{\rho} = \left(\frac{1}{E} + \alpha\right)\sigma_t - \alpha K'$$

又圧縮側では $\sigma_b < 0$

$$\therefore \epsilon_x = \epsilon_0 + \frac{\eta}{\rho} = \epsilon_{ex} + (\epsilon_p)_t = \frac{1}{E}(\sigma_t + \sigma_b) + \alpha(\sigma_t - K') \quad (37)$$

$\eta = \eta_1$ とおけば前同様の式が得られる。

$$\eta_1 = \rho \left\{ \left(\frac{1}{E} + \alpha\right)\sigma_t - \alpha K' - \epsilon_0 \right\} \quad (38)$$

となる。應力を η で表はすと、引張側にて

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_b = \frac{1}{1 + E\alpha} \left\{ E\left(\epsilon_0 + \frac{\eta}{\rho}\right) + \alpha EK' \right\} \quad (39)$$

圧縮側にて

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_b = E \left(\varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho} \right) - E\alpha(\sigma_t - K') \left\{ \begin{array}{l} -e_1 < \eta < \eta_1 \end{array} \right\} \quad (40)$$

こゝに ε_c 及び ρ は未知数であつて、力及びモーメントの平衡式より決定される。即ち、力の平衡式は

$$P = \int \sigma dF = b \int_{-e_1}^{+e_1} \sigma d\eta = b \int_{-e_1}^{\eta_1} \sigma d\eta + b \int_{\eta_1}^{e_1} \sigma d\eta \quad (41)$$

これに (39) 及び (40) の σ の値を代入すると、

$$\begin{aligned} P &= b \left[\int_{-e_1}^{\eta_1} \left\{ E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K') + \frac{E\eta}{\rho} \right\} d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_1}^{e_1} \frac{1}{1+E\alpha} \left\{ E\varepsilon_c + \alpha EK' + \frac{E\eta}{\rho} \right\} d\eta \right] \\ &= b \left[\{ E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K') \} (\eta_1 + e_1) + \frac{E}{2\rho} (\eta_1^2 - e_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+E\alpha} \{ (E\varepsilon_c + \alpha EK') (e_1 - \eta_1) + \frac{E}{2\rho} (e_1^2 - \eta_1^2) \} \right] \end{aligned}$$

これに η_1 の値を代入すると

$$\begin{aligned} P &= b \left[A\rho\varepsilon_c^2 + (B_1 + B_2\rho)\varepsilon_c + C_1 + \frac{C_2}{\rho} + C_3\rho \right] \\ A &= -\frac{1}{2} \frac{E^2\alpha}{1+E\alpha}, \\ B_1 &= \frac{Ee_1(2+E\alpha)}{1+E\alpha}, \\ B_2 &= \frac{E\alpha}{1+E\alpha} \{ (1+E\alpha)\sigma_t - E\alpha K' \}, \\ C_1 &= \frac{E\alpha e_1}{1+E\alpha} \{ 2K' - E\alpha K' - (1+E\alpha)\sigma_t \}, \\ C_2 &= -\frac{1}{2} \frac{E^2\alpha e_1^2}{1+E\alpha}, \\ C_3 &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{1+E\alpha} \{ (1+E\alpha)\sigma_t - E\alpha K' \}^2 \end{aligned} \quad (42)$$

モーメントの平衡式は

$$M = \int_F \sigma \eta dF = b \int_{-e_1}^{e_1} \sigma \eta d\eta$$

故に

$$\begin{aligned} M &= b \left[\int_{-e_1}^{\eta_1} \left\{ E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K') + \frac{E\eta}{\rho} \right\} \eta d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_1}^{e_1} \frac{1}{1+E\alpha} \left\{ E\varepsilon_c + E\alpha K' + \frac{E\eta}{\rho} \right\} \eta d\eta \right] \\ &= b \left[\left\{ E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K') \right\} \frac{\eta_1^2 - e_1^2}{2} + \frac{E}{3\rho} (\eta_1^3 + e_1^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E\alpha + 1} \left\{ (E\varepsilon_c + E\alpha K') \frac{e_1^2 - \eta_1^2}{2} + \frac{E}{3\rho} (\eta_1^3 + e_1^3) \right\} \right] \quad (43) \end{aligned}$$

この2式より ε_c 及び ρ が定まる。最初加へた引張荷重が相當なる場合には次の如き近似値を求めることが出来る。この場合は、

$$\varepsilon_c \cong \alpha(\sigma_t - K') \quad (44)$$

とおく。然るときは

$$\left. \begin{aligned} \text{引張側にて} \\ \sigma_t + \sigma_b &= \frac{E}{1+E\alpha} \left(\alpha\sigma_t + \frac{\eta}{\rho} \right) \\ \text{圧縮側にて} \\ \sigma_t + \sigma_b &= \frac{E\eta}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$\eta = \eta_1$ にて $\sigma_b = 0$ であるから

$$\eta_1 = \frac{\rho}{E} \sigma_t \quad (46)$$

この場合には平衡式のうち 曲げモーメント に対する平衡式より ρ が決定される。

$$\begin{aligned} M &= b \int_F \sigma \eta d\eta \\ &= b \left[\int_{-e_1}^{\eta_1} \frac{E\eta^2}{\rho} d\eta + \int_{\eta_1}^{e_1} \frac{E}{1+E\alpha} \left\{ \alpha\sigma_t \eta + \frac{\eta_1^2}{\rho} \right\} d\eta \right] \\ &= \frac{bE}{6(1+E\alpha)} \left[\frac{2(2+E\alpha)\sigma_t^3\rho^2}{E^3} + \frac{2(2+E\alpha)e_1^3}{\rho} \right. \\ &\quad \left. + 3\alpha\sigma_t e_1^2 - \frac{3\alpha\sigma_t^3\rho^2}{E^2} \right] \\ &= A' + B'/\rho + C'\rho^2 \quad (47) \end{aligned}$$

の形となる。

$\eta = -e_1$ にて應力の絶対値が第3図の S_2 点における應力よりも大となれば変形状態は S_2P_2' に移る。

その極限値は

$$\sigma_{S_2} = \sigma_{P_1} - 2\sigma_{S_1} = \sigma_t - 2K'$$

$\eta = -e_1$ にて

$$E \left(\varepsilon_c - \frac{e_1}{\rho} \right) - E\alpha(\sigma_t - K') = \sigma_t - 2K'$$

$\eta = \eta_1$ にて

$$E \left(\varepsilon_c + \frac{\eta_1}{\rho} \right) = \frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K')$$

この2式より ε_c を消去すると

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2K'(1+E\alpha)}{E(e_1 + \eta_1)} \quad (48)$$

これが限界値である。

次に加へた引張荷重を除き、單純曲げモーメントを加へた場合に就て考へる。然るときは應力は σ_b のみとなり、引張側では σ_b の比較的小なる間は σ_t のために塑性変形は増加せず、最初加へた引張荷重に対する塑性変形が存在する。

$$\therefore \varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho} = \varepsilon_{ex} + \varepsilon_{px} = \frac{1}{E} \sigma_b + \alpha(\sigma_t - K') \quad (49)$$

$\eta = \eta_1$ にて $\sigma_b = 0$ とせば

$$\begin{aligned} \varepsilon_c + \frac{\eta_1}{\rho} &= \alpha(\sigma_t - K') \\ \therefore \eta_1 &= \rho \{ \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \} \quad (50) \end{aligned}$$

$\eta = \eta_2$ にて $\sigma_b = \sigma_t$ とすれば (49) は

$$\begin{aligned} \varepsilon_c + \frac{\eta_2}{\rho} &= \frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K') \\ \therefore \eta_2 &= \rho \left\{ \frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

故に (49) は $\eta_1 < \eta < \eta_2$ の範囲内にて用ひらる。(51) の η_2 は新しい降伏点にある点の位置を示す。

$\sigma_b > \sigma_t$ となれば新たに塑性変形が増加する。従て、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho} &= \varepsilon_{ex} + \varepsilon_{px} = \frac{1}{E} \sigma_b + \alpha(\sigma_b - K') \\ \sigma_b &\geq \sigma_t \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

圧縮側では $\sigma_b < 0$ で (49) を用ひることが出来る。然るときは、平衡式より

$$b \int_F \sigma_b d\eta = 0$$

これに

$$\text{及び } \sigma_b = \begin{cases} E\left(\varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho}\right) - E\alpha(\sigma_t - K'), & -e_1 < \eta < \eta_2 \\ \frac{1}{1+E\alpha} \left\{ E\left(\varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho}\right) + E\alpha K' \right\}, & \eta_2 < \eta < e_1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(53)$$

を代入して

$$\begin{aligned} & \int_{-e_1}^{\eta_2} \left\{ E\left(\varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho}\right) - E\alpha(\sigma_t - K') \right\} d\eta \\ & + \int_{\eta_2}^{e_1} \frac{1}{1+E\alpha} \left\{ E\left(\varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho}\right) + E\alpha K' \right\} d\eta \\ & = \{E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K')\}(\eta_2 + e_1) + \frac{E}{2\rho}(\eta_2^2 - e_1^2) \\ & + \frac{1}{1+E\alpha} \{ (E\varepsilon_c + E\alpha K')(e_1 - \eta_2) + \frac{E}{2\rho}(e_1^2 - \eta_1^2) \} = 0 \end{aligned}$$

これに (51) の η_2 の値を代入して、

$$\begin{aligned} & \{E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K')\} \left[\rho \left\{ \frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right\} + e_1 \right] \\ & + \frac{E}{2\rho} \left[\rho^2 \left\{ \frac{\sigma_t}{E} + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right\}^2 - e_1^2 \right] \\ & + \frac{1}{1+E\alpha} \{ (E\varepsilon_c + E\alpha K') \{ e_1 - \rho \left(\frac{\sigma_t}{E} + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right) \} \} \\ & + \frac{E}{2\rho} \{ e_1^2 - \rho^2 \{ \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \}^2 \} = 0 \quad \dots\dots\dots(54) \end{aligned}$$

同様に、モーメントの平衡式は

$$b \int_F \sigma \eta d\eta = M$$

故に、

$$\begin{aligned} & \int_{-e_1}^{\eta_2} \left\{ E\left(\varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho}\right) - E\alpha(\sigma_t - K') \right\} \eta d\eta \\ & + \int_{\eta_2}^{e_1} \frac{1}{1+E\alpha} \left\{ E\left(\varepsilon_c + \frac{\eta}{\rho}\right) + E\alpha K' \right\} \eta d\eta \\ & = \{E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K')\} \frac{\eta_2^2 - e_1^2}{2} + \frac{E}{3\rho} (\eta_2^3 + e_1^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{1+E\alpha} \left[(E\varepsilon_c + E\alpha K') \frac{e_1^2 - \eta_2^2}{2} + \frac{E}{3\rho} (e_1^3 - \eta_2^3) \right] = \frac{M}{b} \\ \therefore \frac{1}{2} \{ E\varepsilon_c - E\alpha(\sigma_t - K') \} & \left[\rho^2 \left\{ \frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right\}^2 - e_1^2 \right] \\ & + \frac{E}{3\rho} \left[\rho^3 \left\{ \frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right\}^3 + e_1^3 \right] \\ & + \frac{1}{1+E\alpha} \left[\frac{1}{2} (E\varepsilon_c + E\alpha K') \{ e_1^2 - \rho^2 \left(\frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right)^2 \} \right. \\ & \left. - \varepsilon_c^3 \right] + \frac{E}{3\rho} \{ e_1^3 - \rho^3 \left(\frac{1}{E} \sigma_t + \alpha(\sigma_t - K') - \varepsilon_c \right)^3 \} = \frac{M}{b} \quad \dots\dots\dots(55) \end{aligned}$$

(54) 及び (55) より ε_c と ρ が決定される。

結 言

筆者は應力の増減の経路により塑性変形の異なることを述べ、これに対する計算法を示した。応用例には主剪断歪を基礎とした塑性理論を用ひ、 σ_2 の影響を無視した近似式

$$\varepsilon_{px} = \frac{\varepsilon_0 + \alpha \{ \sigma_1 - \sigma_3 - K' \}^n}{(\sigma_1 - \sigma_3)} \{ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \}$$

を用ひたのであるが、平均相当剪断歪 $\gamma_m = \sqrt{\{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})^2 + (\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})^2 + (\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p1})^2\}}$ を基礎とした式

$$\varepsilon_{px} = \frac{\varepsilon_0 + \alpha \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} - K' \right\}^n}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} \left\{ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right\}$$

を用ひるときは、(15) の c_2 は

$$c_2 = \frac{\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha \sqrt{\sigma_t^2 + 3\tau^2}}{\sqrt{\sigma_t^2 + 3\tau^2}}$$

となる。又應力間の関係が $2\tau = \sigma$ なる主剪断應力説に対し、この場合は $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma$ なる Mises-Hencky の関係となる。故に (17') は

$$(\gamma_p)_c = \sqrt{3}(\varepsilon_0 - \alpha K' + \sqrt{3} \alpha \tau)_c = \sqrt{3}(\varepsilon_0 - \alpha K' + \alpha \sigma_t)$$

となる。従て (16) 以下の式に於て係数が少し変わる程度のものである。この説に就ては又後の機会に記すことにする。

(昭和15年1月22日受付)