鉄道車輛の蛇行運動に就て⁽¹⁾

(昭和15年7月24日 第378回[鉄道部門]講演會に於て講演)

正員 武藏倉治⁽²⁾

摘 要

鉄道車輛における左右振動の原因たる2軸車又は2軸台車の蛇行動及び左右動を表はす運動の式を解いて車輪半径 r , 踏面勾配 i , 軌間 $2a$, 軸距 $2e$ の函数として蛇行運動の波長 S を求め

$$S = (2\pi/p) \sqrt{pr - p^2 e^2}, \quad p = i/(a - ir)$$

更に左右振動実測値と比較する。

1. 緒 言

2軸車又は2軸台車は外輪踏面が円錐形をなす輪軸が轉走することに依て蛇行動を起すことは既に知られてゐる事柄である⁽³⁾。一輪軸が軌条上を轉走する場合に於て蛇行動を起し左右動を生ずるありさまに就ては既に述べてある⁽⁴⁾。本論文に於て前後兩輪軸が2軸車にあつては車体に、2軸台車に於ては台車に裝備された場合に踏面における滑りを考察して2軸車及び2軸台車の蛇行動及び左右動に就て述べる。

いま輪軸と車体又は台車枠との間には左右及び前後遊間なきものとして次の如く輪軸の運動が車体又は台車枠に依て拘束されてゐるものとする。

(1) 前後兩輪軸が車体又は台車枠に拘束されて輪軸心棒を含む子午面は常に平行なものとし、且その距離一定にしてこれを $2e$ とす。

(2) 前後兩輪軸の重心を結ぶ直線は前に考へた平行子午面に直角な平面上にあるものとする。

2. 軌条に対する前後兩輪軸の位置決定

軌道面上に固定した直角標軸 第1図に示す如く、

軌道面上に於て軌道中心線上の定点 O を坐標の原点とし、軌条に直角で輪軸進行方向に対して左方に向く Ox 軸をとり、軌条に平行で輪軸進行方向に反対なる Oy 軸をとり、軌道面に垂直上方に向く Oz 軸をとる。

一輪軸の坐標 輪軸の重心 G の坐標を (x, y, z) とし、輪軸の心棒が xy 面をなす角を θ とし、心棒を含む oz 軸と平行

な平面を子午面と名付け、この子午面が zx 面となす角を φ とし、心棒の周りの回轉角を ψ とし、 y と反対方向に進む回轉を正とする。然る時は輪軸の位置は $x, y, z; \theta, \varphi, \psi$ の六つの坐標で定まる。

前後兩輪軸の坐標 前後兩輪軸の各の位置は $(x, y, z; \theta, \varphi, \psi)$ で決定されることは前に述べた。いま前輪軸と後輪軸とを區別するために前輪軸に対しては後付け(1)、後輪軸に対しては後付け(2)をつけることにする。

前軸の位置 $x_1, y_1, z_1; \theta_1, \varphi_1, \psi_1$,

後軸の位置 $x_2, y_2, z_2; \theta_2, \varphi_2, \psi_2$ 。

軌間を $2a$ とし、輪軸が軌条上正位にある時軌条と接する

点の半径を r , 車輪踏面の勾配を i , $p = i/(a - ir)$ とする。輪軸は左右2点で軌条上にのつてゐることから⁽⁵⁾、次の関係式あり、

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= r + p x_1^2, & z_2 &= r + p x_2^2 \\ \theta_1 &= p x_1, & \theta_2 &= p x_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

尙前後兩輪軸が車体又は台車枠に依て運動が拘束されてゐる条件(1)に依て、 $\varphi_1 = \varphi_2$ なるを以てこれを φ で表はす。前後兩輪軸の重心 G_1 及び G_2 を結ぶ直線を含む軌道面に垂直な面

を考へるとこの面が yz 面となす角は φ で表はされ、車体又は台車枠の蛇行運動の角は φ で表はされることになる。前後兩輪軸の重心は $G_1 G_2$ の中点にあつてこれを G_0 とし、その坐標を (x, y, z) とすると拘束条件(1)(2)に依て

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + e \sin \varphi, & y_1 &= y - e \cos \varphi, & \varphi_1 &= \varphi \\ x_2 &= x - e \sin \varphi, & y_2 &= y + e \cos \varphi, & \varphi_2 &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

なるを以て兩輪軸の位置は次の五つの坐標で決定される。

$$x, y, \varphi, \psi_1, \psi_2.$$

第1図

(1) On the Snake Motion of the Railway Vehicles. (2) Kurazi Musasi, Member, The Research Office Japanese Government Railways, Tokyo. (3) 福島鐵次郎, 鉄道車輛動搖論 (大7-11), 朝倉希一, 機械学会誌, 22巻 (大8-2), Heumann, Glas. Ann. (1838). (4) 武藏倉治, 機械学会誌, 38巻, 217頁, (昭10-4).

(5) 武藏倉治, 鉄道省業務研究資料, 23, 3, (昭10-1) 4.

而して車体又は台車枠の蛇行動は φ で表はされ、左右動は x で表はされる。

3. 前後両輪軸が台車枠に依て運動拘束される時は踏面に於て滑りを生ずること

前後両輪軸が第 1 図の如き一般の位置をとる時を考へる。輪軸が轉走する時踏面に於て滑りのない時は前軸の重心 G_1 がその子午面に直角な方向に有する速度は後軸のそれよりも大になるを以て両軸子午面の距離を擴げる様になる。また前軸に於て接点 M_1 における半径は他方接点 N_1 におけるそれよりも大であるから φ_1 角が小になる様にし、後軸に於ては反対に φ_2 角が大になる様にすることによって両子午面の左側を開く様にする。然るに前後両輪軸はその二つの子午面常に平行にして距離常に一定なる様に台車枠に依て拘束されてゐるから踏面に於て滑りを起さなければならない。踏面における滑りに依て重心が子午面に直角な方向に生ずる速度を前軸に於て S_1 、後軸に於て S_2 とする。但し前進方向を正とする。滑りのない時両輪軸重心がその子午面に直角な方向に有する速度を夫々 V_1 及び V_2 とすると前論文⁽⁵⁾に述べた如く前輪軸心棒の周りの角速度を ϕ_1 とし、 M_1N_1 の周りの角速度は $\phi_1 \cos \theta_1$ となるから重心 G_1 がその子午面に直角な方向に有する速度は $z_1\phi_1 \cos \theta_1$ となるを以て $V_1 = z_1\phi_1 \cos \theta_1$ 、同様にして $V_2 = z_2\phi_2 \cos \theta_2$ なるを以て (2-1) (2-2) に依て

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv (r + \rho x_1^2)\phi_1 = \{r + \rho(x + e\varphi)^2\}\phi_1 \\ V_2 &\equiv (r + \rho x_2^2)\phi_2 = \{r + \rho(x - e\varphi)^2\}\phi_2 \end{aligned} \quad (3-1)$$

になる。次に車体又は台車枠に裝備された前後両輪軸の重心が両輪軸子午面に直角なる方向を有す速度を v とすると

$$v = V_1 + S_1 = V_2 + S_2 \quad (3-2)$$

なる関係を有する。

次に踏面に生ずる滑りに依て φ_1 及び φ_2 方向（重心を通る鉛直線を回轉軸とする）に生ずる角速度を前軸に於て s_1 、後軸に於て s_2 とする。滑りのない時両輪軸が φ_1 及び φ_2 方向に有する角速度を夫々 $\dot{\phi}_1$ 及び $\dot{\phi}_2$ とすると前論文⁽⁵⁾に述べた如く $\dot{\phi}_1 = -\theta_1\phi_1$ 、 $\dot{\phi}_2 = -\theta_2\phi_2$ なるを以て (2-1) (2-2) に依て

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\rho x_1\phi_1 = -\rho(x + e\varphi)\phi_1 \\ \dot{\phi}_2 &= -\rho x_2\phi_2 = -\rho(x - e\varphi)\phi_2 \end{aligned} \quad (3-3)$$

になる。また前述の如く G_1G_2 を含む鉛直面が yz 面となす角を φ とし、台車枠の蛇行運動の角速度を $\dot{\varphi}$ で表はせば

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_1 + s_1 = \dot{\phi}_2 + s_2 \quad (3-4)$$

なる関係を有する。

いま車体又は台車枠に裝備された両輪軸に於て (3-2) (3-4) に定義される滑りある場合に各輪軸重心の速度及び重心の周りの角速度を考へるに（前軸のみを考へる、後軸も同様）、次の如くなる。

$$\text{重心の速度} \begin{cases} x \text{ 方向、} \dot{x}_1 = (V_1 + S_1) \sin \varphi_1 \equiv (z_1\phi_1 + S_1)\varphi \\ y \text{ 方向、} \dot{y}_1 = -(V_1 + S_1) \cos \varphi_1 \equiv -(z_1\phi_1 + S_1) \\ z \text{ 方向、} \dot{z}_1 = (d/dt)(r + \rho x_1^2) = 2\rho x_1(z_1\phi_1 + S_1)\varphi \end{cases}$$

$$\text{重心の周りの角速度} \begin{cases} \theta^* \text{ 方向、} \dot{\theta}_1 = (d/dt)\rho x_1 \equiv \rho\varphi(z_1\phi_1 + S_1) \\ \varphi \text{ 方向、} \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_1 + s_1 = -\theta_1\phi_1 + s_1 \\ \psi \text{ 方向、} \dot{\psi}_1 \end{cases} \quad (3-5)$$

4. 台車枠に拘束された前後両輪軸の踏面における滑りに就て

前後両輪軸が台車枠に依て拘束されて走行する時の滑りに対する摩擦抵抗力を省略して考へ、外力は重力のみとする。然る時は両輪軸の重心の周りにおける外力のモーメントは零になる。

運動量モーメントの保存法則によれば任意の点に関する外力のモーメントが零なる質点系の運動量の同じ点に関するモーメントは一定不変である。

輪軸が踏面で滑ることなく自由に蛇行動を伴ふ轉走をする時はその重心の周りの運動量モーメントは一定である。前後両輪軸が台車枠で拘束されて踏面に於て滑り起ると運動量はそのために増加又は減少するが両輪軸の重心の周りにおける外力のモーメントが零ならば前述運動量モーメントの保存法則に依て重心の周りの運動量モーメントは一定で滑りのない時の運動量モーメントを保存するから踏面における滑りによつて生ずる前後両輪軸の運動量モーメントの変化はない。

運動量モーメントの定理によれば任意の点（第 1 図 G_0' をとる）の周りについた質点組合はせの運動量モーメントは全質量が重心に集つて重心と同じ運動すると想像した場合の G_0' 点の周りの運動量モーメント（ベクトル H^0 と名づける）と各質点の重心に対する相対運動に就て重心の周りについた運動量モーメント（ベクトル H' と名づけておく）とのベクトル和に等しい。従て踏面における滑りに依て生ずる運動量モーメントの増

第 2 図

加量を Δ をつけて表はすと前述したことに依りて

$$\Delta H^0 + \Delta H' = 0 \quad (4-1)$$

ベクトル H^0 の成分 H_x^0 、 H_y^0 、 H_z^0 を求めること 第 1 図 G_0' の周りについた運動量モーメント（ベクトル H^0 及び H' ）を考へるに當つて坐標の原点を G_0' に移すことに依て前後両輪軸の重心 G_1 及び G_2 の坐標は次の如くなる（第 2 図）。

$$\begin{aligned} X_{G1} &\equiv e \sin \varphi \equiv e\varphi, & X_{G2} &\equiv -e\varphi \\ Y_{G1} &\equiv -e \cos \varphi \equiv -e, & Y_{G2} &\equiv +e \\ Z_{G1} &\equiv z_1, & Z_{G2} &\equiv z_2 \end{aligned} \quad (4-2)$$

然る時はベクトル H^0 の成分 H_x^0 、 H_y^0 、 H_z^0 は次の如くなる。

$$\begin{aligned} H_x^0 &= M(Y_{G1}\dot{Z}_{G1} - Z_{G1}\dot{Y}_{G1}) + M(Y_{G2}\dot{Z}_{G2} - Z_{G2}\dot{Y}_{G2}) \\ H_y^0 &= M(Z_{G1}\dot{X}_{G1} - X_{G1}\dot{Z}_{G1}) + M(Z_{G2}\dot{X}_{G2} - X_{G2}\dot{Z}_{G2}) \end{aligned}$$

[第 6 卷 第 25 号 (第 4 部)]

$$H_s^0 = M(X_{G1}\dot{Y}_{G1} - Y_{G1}\dot{X}_{G1}) + M(X_{G2}\dot{Y}_{G2} - Y_{G2}\dot{X}_{G2})$$

但し $\dot{X}_{G1}, \dot{Y}_{G1}, \dot{Z}_{G1}; \dot{X}_{G2}, \dot{Y}_{G2}, \dot{Z}_{G2}$ は (3-5) に依て與へられ、 $X_{G1}, Y_{G1}, Z_{G1}; X_{G2}, Y_{G2}, Z_{G2}$ は (4-2) に依て與へられるから、いま滑りありと考へた時のベクトル H^0 の成分を前後両輪軸に就て求めると

$$H_x^0 \begin{cases} \text{前軸, } M\{(-e)2\rho x_1\varphi(z_1\dot{\phi}_1 + S_1) - z_1(-z_1\dot{\phi}_1 - S_1)\} \\ \quad = (Mz_1 - 2Me\varphi\theta_1)(z_1\dot{\phi}_1 + S_1) \\ \text{後軸, } M\{(+e)2\rho x_2\varphi(z_2\dot{\phi}_2 + S_2) - z_2(-z_2\dot{\phi}_2 - S_2)\} \\ \quad = (Mz_2 + 2Me\varphi\theta_2)(z_2\dot{\phi}_2 + S_2) \end{cases}$$

$$H_y^0 \begin{cases} \text{前軸, } M\{z_1(z_1\dot{\phi}_1 + S_1)\varphi - e\varphi \cdot 2\rho x_1\varphi(z_1\dot{\phi}_1 + S_1)\} \\ \quad = (Mz_1\varphi - 2Me\varphi^2\theta_1)(z_1\dot{\phi}_1 + S_1) \\ \text{後軸, } M\{z_2(z_2\dot{\phi}_2 + S_2)\varphi + e\varphi \cdot 2\rho x_2\varphi(z_2\dot{\phi}_2 + S_2)\} \\ \quad = (Mz_2\varphi + 2Me\varphi^2\theta_2)(z_2\dot{\phi}_2 + S_2) \end{cases}$$

$$M_z^0 \begin{cases} \text{前軸, } M\{e\varphi(-z_1\dot{\phi}_1 - S_1) + e(z_1\dot{\phi}_1 + S_1)\varphi\} = 0 \\ \text{後軸, } M\{-e\varphi(-z_2\dot{\phi}_2 - S_2) - e(z_2\dot{\phi}_2 + S_2)\varphi\} = 0 \end{cases}$$

従て前後両輪軸を考へて路面に起る滑りに依て運動量モーメント (ベクトル H^0) の各成分に就て増加量を求めると

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_x^0 &= (Mz_1 - 2Me\varphi\theta_1)S_1 + (Mz_2 + 2Me\varphi\theta_2)S_2 \\ \Delta H_y^0 &= (Mz_1 - 2Me\varphi\theta_1)\varphi S_1 + (Mz_2 + 2Me\varphi\theta_2)\varphi S_2 \\ \Delta H_z^0 &= 0 \end{aligned} \right\} (4-3)$$

ベクトル H' の成分 $H_x', H_y',$

H_z' を求めること 一般に剛体の各質点とその重心に対する相対運動に就て運動量モーメントを求むるには剛体の重心を通る慣性モーメントの主軸を ξ, η, ζ とし各軸の周りの慣性モーメントを a_ξ, a_η, a_ζ とし、回轉角速度を w_ξ, w_η, w_ζ とすれば重心の周りの運動量モーメントを表はすベクトル H' の ξ, η, ζ 軸方向の成分は $a_\xi w_\xi, a_\eta w_\eta, a_\zeta w_\zeta$ となる。而して ξ, η, ζ 軸が x, y, z 軸となす方向余弦を

	ξ	η	ζ
x	λ_1	λ_2	λ_3
y	μ_1	μ_2	μ_3
z	ν_1	ν_2	ν_3

で表はせば重心の周りの運動量モーメントを表はすベクトル H' の $x, y,$

z 軸方向の成分 H_x', H_y', H_z' は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} H_x' &= a_\xi w_\xi \lambda_1 + a_\eta w_\eta \lambda_2 + a_\zeta w_\zeta \lambda_3 \\ H_y' &= a_\xi w_\xi \mu_1 + a_\eta w_\eta \mu_2 + a_\zeta w_\zeta \mu_3 \\ H_z' &= a_\xi w_\xi \nu_1 + a_\eta w_\eta \nu_2 + a_\zeta w_\zeta \nu_3 \end{aligned} \right\} (4-4)$$

但しこの式中の方向余弦 $\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \dots$ 、及び回轉角速度 $w_\xi, \dots$ は (4-5), (4-6) で示される。即ち x, y, z 軸に対する ξ, η, ζ 軸の位置を表はすオイレルの角を θ', φ', ψ' とすると

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \psi' \cos \varphi' \cos \theta' - \sin \psi' \sin \varphi' \\ \mu_1 &= \cos \psi' \sin \varphi' \cos \theta' + \sin \psi' \cos \varphi' \\ \nu_1 &= -\cos \psi' \sin \theta' \\ \lambda_2 &= -\sin \psi' \cos \varphi' \cos \theta' - \cos \psi' \sin \varphi' \\ \mu_2 &= -\sin \psi' \sin \varphi' \cos \theta' + \cos \psi' \cos \varphi' \\ \nu_2 &= \sin \psi' \sin \theta' \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = \cos \varphi' \sin \theta'$$

$$\mu_3 = \sin \varphi' \sin \theta'$$

$$\nu_3 = \cos \theta'$$

尚 w_ξ, w_η, w_ζ をオイレルの角及びその角速度で表はせば

$$\left. \begin{aligned} w_\xi &= \dot{\theta}' \sin \psi' - \dot{\varphi}' \sin \theta' \cos \psi' \\ w_\eta &= \dot{\theta}' \cos \psi' + \dot{\varphi}' \sin \theta' \sin \psi' \\ w_\zeta &= \dot{\varphi}' \cos \theta' + \dot{\psi}' \end{aligned} \right\} (4-6)$$

なることは一般の定理に示すところである。

今一輪軸に就て考へ前論文⁽⁵⁾ 第 6 図に示す如く (第 3 図) 心棒を ζ 軸にとり $\vec{GA}$ を正方向にとる。 ξ 軸は第 3 図 GB の位置にきた瞬間にとつて $\vec{GB}$ を正方向とする (ξ 軸を子午面上にとる)。 ξ, η, ζ 軸が右旋系をなす様に η 軸をとる。この ξ, η, ζ 軸が x, y, z 軸に対する位置を表はすオイレルの角を第 4 図に示す如く θ', φ', ψ' とすると $\psi' = 0$ になる。 x, y, z 軸に対する ξ, η, ζ 軸の位置を表はすにオイレルの角 θ', φ', ψ' の代りに前述の θ, φ, ψ を用ひると

$$\theta + \theta' = \pi/2, \quad \varphi = \varphi', \quad \psi = \psi' [\psi' = 0]$$

なる関係あり。これを (4-5) (4-6) に入れることに依て

第 3 図

第 4 図

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \theta, & \mu_1 &= \theta\varphi, & \nu_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= -\varphi, & \mu_2 &= 1, & \nu_2 &= 0, \\ \lambda_3 &= 1, & \mu_3 &= \varphi, & \nu_3 &= \theta, \end{aligned} \right\} (4-7)$$

$$\left. \begin{aligned} w_\xi &= -\dot{\varphi}, & w_\eta &= -\dot{\theta}, \\ w_\zeta &= \dot{\theta}\varphi + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} (4-8)$$

いま前後両輪軸の各に就て (4-8) の $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ は (3-5) に依て示されるから滑りある時前軸に就て表はせば

$$\left. \begin{aligned} w_\xi &= \theta_1 \dot{\phi}_1 - S_1, & w_\eta &= -\rho \varphi (z_1 \dot{\phi}_1 + S_1), \\ w_\zeta &= -\theta_1^2 \dot{\phi}_1 + \theta_1 S_1 + \dot{\phi}_1 = \dot{\theta}_1 S_1 + \dot{\phi}_1 \end{aligned} \right\} (4-9)$$

となる。また輪軸に於て $a_\zeta = A$ とし、 $a_\xi = a_\eta = B$ とする。尚 (4-7) を前輪軸に就て考へ、更に (4-9) を用ひてベクトル H' の成分を滑りある時前軸に就て表はせば (4-4) に依て

$$\begin{aligned} H_x' &= B\{(\theta_1 \dot{\phi}_1 - S_1)\theta_1 + \rho \varphi^2 (z_1 \dot{\phi}_1 + S_1)\} + A(\dot{\phi}_1 + S_1 \theta_1) \\ H_y' &= B\{(\theta_1 \dot{\phi}_1 - S_1)\theta_1 \varphi - \rho \varphi (z_1 \dot{\phi}_1 + S_1)\} + A(\dot{\phi}_1 + S_1 \theta_1) \varphi \\ H_z' &= B\{-(\theta_1 \dot{\phi}_1 - S_1)\} + (\dot{\phi}_1 + S_1 \theta_1) \theta_1 \end{aligned}$$

然る時は前後両輪軸を合はせて考へ、ベクトル H' の各成分に就て滑りある時の増加量を求めると

$$\begin{aligned}
 x \text{ 軸方向} & [B(-s_1\theta_1 + p\varphi^2 S_1) + As_1\theta_1] \\
 & + [B(-s_2\theta_2 + p\varphi^2 S_2) + As_2\theta_2] \\
 y \text{ 軸方向} & [B(-s_1\theta_1\varphi - p\varphi S_1) + As_1\theta_1\varphi] \\
 & + [B(-s_2\theta_2\varphi - p\varphi S_2) + As_2\theta_2\varphi] \\
 z \text{ 軸方向} & [Bs_1 + As_1\theta_1^2] + [Bs_2 + As_2\theta_2^2]
 \end{aligned}$$

即ち

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta H_x' &= Bp\varphi^2 S_1 + Bp\varphi^2 S_2 + (A-B)\theta_1 s_1 \\
 & \quad + (A-B)\theta_2 s_2 \\
 \Delta H_y' &= -Bp\varphi S_1 - Bp\varphi S_2 + (A-B)\theta_1 \varphi s_1 \\
 & \quad + (A-B)\theta_2 \varphi s_2 \\
 \Delta H_z' &= (A\theta_1^2 + B)s_1 + (A\theta_2^2 + B)s_2
 \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

(4-1) に依て

$$\begin{aligned}
 \Delta H_x' + \Delta H_x'' &= 0 \\
 \Delta H_y' + \Delta H_y'' &= 0 \\
 \Delta H_z' + \Delta H_z'' &= 0
 \end{aligned}$$

なるを以て、これに (4-3) (4-10) を代入すると

$$\begin{aligned}
 (Mz_1 - 2Me\varphi\theta_1 + Bp\varphi^2)S_1 + (Mz_2 + 2Me\varphi\theta_2 \\
 + Bp\varphi^2)S_2 + (A-B)\theta_1 s_1 + (A-B)\theta_2 s_2 &= 0 \\
 (Mz_1 - 2Me\varphi\theta_1 - Bp\varphi)S_1 + (Mz_2 + 2Me\varphi\theta_2 - Bp\varphi)S_2 \\
 + (A-B)\theta_1 \varphi s_1 + (A-B)\theta_2 \varphi s_2 &= 0 \\
 (A\theta_1^2 + B)s_1 + (A\theta_2^2 + B)s_2 &= 0
 \end{aligned}$$

この第 2 式の両辺を φ で除し、それを第 1 式より引くことに依て

$$Bp(1 + \varphi^2)(S_1 + S_2) = 0 \quad \therefore S_2 = -S_1 \dots\dots\dots (4-11)$$

尚第 3 式に於て

$$A = M \times 731 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad B = M \times 3 \text{ 690 [cm}^2\text{]}$$

なるを以て B に対して $A\theta_1^2$ 及び $A\theta_2^2$ を省略することに依て

$$s_2 = -s_1 \dots\dots\dots (4-12)$$

これを要するに外輪踏面に於て受ける摩擦抵抗力を省略して考へる時は 2 軸車又は 2 軸台車に於て前後両輪軸が車体又は台車枠に依て拘束される時は外輪踏面に於て滑り起り、これに依て輪軸の重心がその子午面に直角な方向に生ずる速度は前輪軸と後輪軸とに於て絶対値相等しく方向反対である。また踏面に起る滑りに依て輪軸の子午面が重心を通る鉛直線の周りに生ずる回轉角速度は前輪軸と後輪軸とに於て絶対値相等しくして方向反対である。

5. 台車枠に依て拘束された前後両輪軸が水平直線軌條上を轉走する時その心棒の周りの轉走角速度は相等しくして且一定なること

運動量モーメントの保存法則によれば任意の点に関する外力のモーメントが零なる質点系の運動量の同じ点に関するモーメントは一定不変で始めの値を保存する。また一般に剛体の各質点とその重心に対する相対運動に就て重心の周りにとつた運動量モーメントを求めるに剛体の重心を通る慣性モーメントの主軸を ξ, η, ζ とし各軸の周りの慣性モーメントを a_ξ, a_η, a_ζ とし、回轉角速度を w_ξ, w_η, w_ζ とすれば重心の周りの運動量モーメントを表はすベクトルの大きさ及び方向は次の如くなる。

$$\text{大きさ} \quad \sqrt{(a_\xi w_\xi)^2 + a_\eta w_\eta^2 + (a_\zeta w_\zeta)^2}$$

このベクトルが ξ, η, ζ 軸となす方向余弦は夫々

$$\frac{a_\xi w_\xi}{\sqrt{\dots}}, \quad \frac{a_\eta w_\eta}{\sqrt{\dots}}, \quad \frac{a_\zeta w_\zeta}{\sqrt{\dots}}$$

で表はされる。一輪軸をとつて考へ子午面断面を第 3 図に於て心棒を ζ 軸にとり、 $a_\zeta = A$ とし、第 3 図の GB を ξ 軸とし、 $a_\xi = a_\eta$ でこれを B とする。然る時は (4-8) に依て

$$w_\xi = -\dot{\phi}, \quad w_\eta = -\dot{\theta}, \quad w_\zeta = \dot{\psi}$$

なるを以て重心の周りの運動量モーメントの大きさは

$$\sqrt{A^2 \dot{\psi}^2 + B^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)}$$

にて表さる。尚 $A\dot{\psi}$ に対して $B\dot{\theta}, B\dot{\phi}$ を省略することに依て重心の周りの運動量モーメントを表すベクトルは ζ 軸の方向をとつてその大きさは $A\dot{\psi}$ で表はされることを知る。

前後両輪軸を考へ心棒の周りの轉走角速度を ϕ_1 及び ϕ_2 とし、外輪踏面及び軸受金で受ける摩擦抵抗力を省略して考へる時は水平直線軌條を走行する場合に重心の周りの外力のモーメントが零であるから運動量モーメントの保存法則に依て心棒の周りに $A\dot{\phi}_1$ 及び $A\dot{\phi}_2$ を保存するから ϕ_1 及び ϕ_2 は一定な轉走を続ける。台車が始め直線路を正常状態で進み来つて前後両輪軸の心棒の周りの角速度相等しく、ある瞬間に左右動又は蛇行動の変位を受けたと考へると (衝撃の影響ないものとする) その後は両輪軸は一定な相等しい心棒の周りの轉走角速度で進むことを知る。その角速度を w とすると

$$\phi_1 = \phi_2 = w \text{ (一定)} \dots\dots\dots (5-1)$$

にて表さる。

6. 台車の蛇行動及び左右動を表はす運動の式

前後両輪軸が踏面に於て滑りなき時両輪軸の重心 G_1 及び G_2 が子午面に直角な方向に有する速度を夫々 V_1 及び V_2 とすると (3-1) (5-1) に依て

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \{r + p(x + e\varphi)^2\}w \\
 V_2 &= \{r + p(x - e\varphi)^2\}w
 \end{aligned} \dots\dots\dots (6-1)$$

にして前後両輪軸の重心 G_0 が前後両輪軸の子午面に直角な方向に有する速度を v とすると (3-2) (4-11) に依て

$$v = V_1 + S_1 \dots\dots\dots (6-2)$$

$$V_1 - V_2 = -2S_1 \dots\dots\dots (6-3)$$

從て (6-1) (6-3) に依て

$$\left. \begin{aligned}
 S_1 &= -2pwx\varphi \\
 S_2 &= -S_1 = 2pwx\varphi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6-4)$$

(6-1) (6-4) を (6-2) に代入すると

$$v = \{r + p(x^2 + e^2\varphi^2)\}w \dots\dots\dots (6-5)$$

然るに

$$\dot{x} = v \sin \varphi$$

なるを以て (6-5) に依て

$$\dot{x} = \{r + p(x^2 + e^2\varphi^2)\}w \varphi \dots\dots\dots (6-6)$$

となる。また踏面に於て滑りなき時前後両輪軸が φ_1 及び φ_2 方向に有する角速度を夫々 Φ_1 及び Φ_2 とすると (3-3), (5-1) に依て

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= -p(x + e\varphi)w \\
 \Phi_2 &= -p(x - e\varphi)w
 \end{aligned} \dots\dots\dots (6-8)$$

にして台車枠の蛇行運動の角速度を $\dot{\varphi}$ で表はせば (3-4) (4-12) に依て

$$\dot{\varphi} = \dot{\phi}_1 + s_1 \dots\dots\dots (6-8)$$

$$\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 = -2s_1 \dots\dots\dots (6-9)$$

従て (6-7) (6-9) に依て

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= +pwe\varphi \\ s_2 &= -s_1 = -pwe\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6-10)$$

(6-8) に (6-7) (6-10) を代入すると

$$\dot{\varphi} = -pwx \dots\dots\dots (6-11)$$

これに依て

$$(6-6) \quad \dot{x} = \{r(p(x^2 + e^2\varphi^2))\}w\varphi$$

$$(6-11) \quad \dot{\varphi} = -pwx$$

なる x 及び φ に関する聯立方程式を得。これを解いて台車の左右動及び蛇行動を表はす x 及び φ を求め様とする。

(6-11) に依て

$$x^2 = \dot{\varphi}^2 p^2 w^2, \quad \dot{x} = -\dot{\varphi}/pw$$

これを (6-6) に代入すると

$$\ddot{\varphi} + \varphi \dot{\varphi}^2 = -prw^2\varphi - p^2e^2w^2\varphi^3 \dots\dots\dots (6-12)$$

この φ に関する微分方程式を解くに當つて

$$\dot{\varphi} = q, \quad \ddot{\varphi} = (1/2)(dq^2/d\varphi) \dots\dots\dots (6-13)$$

とおくことに依て (6-12) は次の如くなる。

$$(dq^2/d\varphi) + 2\varphi q^2 = -2prw^2\varphi - 2p^2e^2w^2\varphi^3 \dots\dots\dots (6-14)$$

この q^2 に関するリニアなる微分方程式を解くに當つて、 $\varphi = \varphi_0$ に於て $q = q_0$ とする。然る時は $t=0$ に於て $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$ とすれば $q_0 = 0$ となつて

$$\begin{aligned} q^2 &= e^2v^2 - e^2w^2(pr - p^2e^2)(1 - e^2v^2 - v_0^2) \\ &= w^2(pr - p^2e^2)(e^2v_0^2 - v^2 - 1) \dots\dots\dots (6-15) \end{aligned}$$

この式に於て e の器を展開し、1 に対して $\varphi_0^2 - \varphi^2$ の二乗以上を省略し、且 (6-13) に依て (6-15) は次の如くなる。

$$(d\varphi/dt)^2 = w^2(pr - p^2e^2)(\varphi_0^2 - \varphi^2)$$

但し $\varphi_0^2 \geq \varphi^2$, $pr \geq p^2e^2$ なる場合をのみとつて考へる。

$$d\varphi/\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = w\sqrt{pr - p^2e^2}dt$$

これを解くことに依て

$$\sin^{-1}(\varphi/\varphi_0) = w\sqrt{pr - p^2e^2}t + \varepsilon$$

$$\therefore \varphi = \varphi_0 \sin(w\sqrt{pr - p^2e^2}t + \varepsilon)$$

$t=0$ に於て、 $\varphi = \varphi_0$ としたるを以て、 $\varepsilon = \pi/2$ となり、従て

$$\varphi = \varphi_0 \cos(w\sqrt{pr - p^2e^2}t) \dots\dots\dots (6-16)$$

これを (6-11) に代入することに依て

$$-\varphi_0 w \sqrt{pr - p^2e^2} \sin(w\sqrt{pr - p^2e^2}t) = -pwx$$

$$\therefore x = (\varphi_0/p)\sqrt{pr - p^2e^2} \sin(w\sqrt{pr - p^2e^2}t) \dots\dots\dots (6-17)$$

即ち 2 軸車又は 2 軸台車の蛇行動及び左右動は (6-16) (6-17) に依て示される。而して両運動の周期は相等しいので、これを T で表はせば、

$$T = (2\pi/w)(pr - p^2e^2)^{-1/2} \dots\dots\dots (6-18)$$

尚 $\dot{x} = v \sin \varphi$, $\dot{y} = -v \cos \varphi$ なるを以て

$$\varphi = -dx/dy \dots\dots\dots (6-19)$$

従て $\dot{y} = -\dot{x}/\varphi$ なるを以てこれに (6-16) (6-17) を代入することに依て

$$\dot{y} = -(w/p)(pr - p^2e^2)$$

$$\therefore y = -(w/p)(pr - p^2e^2)t + c$$

昭和 15 年 11 月]

然るに $t=0$ に於て $y=0$ とおくことに依て $c=0$ となりて

$$y = -(w/p)(pr - p^2e^2)t \dots\dots\dots (6-20)$$

更に (6-17) (6-20) なる x と y との両式より t を消去すると

$$x = -\frac{\varphi_0}{p} \sqrt{pr - p^2e^2} \sin\left(\frac{p}{\sqrt{pr - p^2e^2}}y\right) \dots\dots\dots (6-21)$$

即ち (6-21) に依て前後両輪軸の重心 G_0 を軌道面に射影すると正弦波を描いて進み、その波長を S とすると

$$S = (2\pi/p)\sqrt{pr - p^2e^2} \dots\dots\dots (6-22)$$

で表はさる。以上諸計算を要するに

$$(6-16) \quad \varphi = \varphi_0 \cos(w\sqrt{pr - p^2e^2}t)$$

$$(6-17) \quad x = (\varphi_0/p)\sqrt{pr - p^2e^2} \sin(w\sqrt{pr - p^2e^2}t)$$

に依て台車の蛇行動及び左右動示され、その周期を T とし、更に (6-21) に依て前後両輪軸の重心 G_0 の運動を軌道面に射影すると正弦波を描いて進み、その波長を S とすると

$$(6-18) \quad T = (2\pi/w)(pr - p^2e^2)^{-1/2}$$

$$(6-22) \quad S = (2\pi/p)(pr - p^2e^2)^{1/2}$$

にして (6-21) に依て前後両輪軸の二つの重心を含む鉛直面が上述正弦波の切線方向をとることを知る。

7. 2 軸車及び 2 軸台車に於て、蛇行動に依る左右動波長の計算値と実測値

(1) 2 軸ボギー客車 20 m 鋼製 2 軸ボギー客車に於て
 a = 軌間 $\times 1/2 = 106.6 \times 1/2 = 53.3$ cm, r = 外輪踏面半径 = 43.0 cm,
 i = 外輪踏面勾配 = 1/20, $p = i/(a - ir) = 1/1000$ cm $^{-1}$,
 e = 軸距 $\times 1/2 = 245 \times 1/2 = 122.5$ cm なるを以て (6-22) に依て
 $S = 16.13$ m

なる計算値が得られる。

ボギー車が線路走行中に起る蛇行動による左右動の波長を

第 5 図

測定するために車輪と軌条との左右相対運動を測定しようとし、第5図に示す様に車輪外輪外面と軌条頭内面とに轉がるころ A 及び B を置き、これを軸箱内面に取付けた金具で受け、その腕を車体の床面上まで延ばして二つのころの左右

距離の変化を

車体床上にある

相対運動記録器に依て記録

せしめる。

車輪軌条左右

相対運動記録

によりて測定

した左右動波

形の平均周期を

植点して第6図に示す。

尙(6-18)で示

される周期の

計算値を第6

図の曲線に示

せば実測値と略一致するをる。

昭和10年6月流線型機関車走行試験を東海道線原一鈴川

間で施行した時20m鋼製2軸ボギー客車の高速度運轉中の

左右動周期の実測値を植点して第7図に示す。この図に於

て点に併記せる数字は平均値を求めた回数を示す。この平均

曲線に依て次の値が求められる。

速度 (km/h)	左右動周期 (s)	左右動波長 (m)
60	0.723	12.05
70	0.673	13.09
80	0.643	14.28
90	0.626	15.65
100	0.618	17.17

第6図

これに依て見るに速度につれて左右動波長は大になる傾向を示し、高速度になれば前に求めたる計算値16mに近きことが認められる。

(2) 無蓋貨車

第7図

昭和14年8月成田線椎柴下総豊里間に於て施行した瀧大貨物輸送試験⁽⁶⁾の際測定した無蓋貨車に就て左右動波長の数値計算を行ひ、これと速度65 km/hまで実験した波長実測値を比較すると次の如くである。

	計算値 (m)	実測値 (m)
チキ 300	14.18	8~24
シキ 40	14.34	8~16
チキ 1 500	14.64	9~17
ト 2 000	18.64	8~13

これに依て見ると上述無蓋貨車における左右動波長は実測値と計算値とが波長略15m内外で一致するを見る。

(昭和15年8月6日受付)

討 議

質問 (荒井文治)⁽⁷⁾ 車輪の質量、その回轉数共に相當のものであります故、このジャイロスコピック・アクションが車輞に対し、蛇行運動の一原因となつて傳達されるであらうと考へます。唯今の御講演ではこれに関し別に取り立てゝお話がなかつた様に思ひますが、これを如何に考へ、又如何に取扱ふべきでせうか。

應答 ジャイロスコピック・アクションは(4-1)式のベクトル H' の中に入つてきます。 H_x' , H_y' , H_z' を(4-4)式に依

て計算するときはオイレルの角(θ' , φ' , ψ')を用ひて計算する方法をとり、これに著者のとつたる坐標(θ , φ , ψ)とオイレルの角との関係を入れて取扱ふとジャイロスコピック・アクションの影響が入つて参ります。

質問 (多賀祐重)⁽⁸⁾ 最後の式に於て軸距を零とした場合に先に発表された一軸の運動式に一致するか。

應答 全く一致する。

(7) 横浜高等工業学校。 (8) 東京鉄道局大井工場。
(6) 武藏倉治、機械学会論文集、6巻、第4部(昭15-2)。