5) 以上 3) と 4) を状態図と結び付けて考へると α -固溶体中に於ては第 2 元素の増加と共に疲強度は上昇するが疲曲線の傾きは変わらず、而も Al で 4%, Zn で 3% までは含有量の増加と共に疲限度に達するまでに要する繰返回数が少くなるがそれ以上含有すると繰返回数は次第に多くなる。然るに Si を含有した場合は Si 含有量の多少によつて疲強度は殆ど変化せぬが含有量の増加と共に曲線の傾きが大きくなる。

6) 焼戻した場合に於ては Al 含有量の多少によつて相異はあるが大体次の事は云ひ得る、即ち焼入のまゝと高温焼戻をした試料の疲曲線は鉄や鋼に似て 2 本の直線で構成されるが、所謂焼戻の利く温度で処理した物の曲線は銅やアルミニウム合金と同じ様に疲限度の存在しない形になる。そして低温焼戻をすると略両者の中間の疲曲線が出来る。

(昭和 16 年 2 月 10 日受付)

内部摩擦定数を持つ擬弾性体振動力学の基礎方程式に就て⁽¹⁾

(昭和 16 年 4 月 3 日 第 18 期定時総会講演會に於て講演)

正 員 遠 藤 貞 一⁽²⁾

1. 緒 言

凡そ、1889 年 Ewing⁽³⁾ 等に初まり、1910 年頃より 1923 年頃に到つて Bairstow, Gough, Heigh 等に依て、遂に定説的に否定されるに到つた完全弾性の問題は、一方 Kimball⁽⁴⁾, Föppl⁽⁵⁾ その他多くの人々に依て次第にその性格が把握されるに到つた。この事は所謂弾性限内と云はれる部分に於ても、その弾性は眞に完全なものではなく、必ず若干の弾性履歴を持つと云ふ事である。そしてその弾性履歴の性格の中に、その弾性並に弾性の不完全さを規定する量が、(少くとも第 1 近似として) 夫々物質定数と見る事の出来る場合もある事が判明するに到つた。この定数の前者は勿論弾性定数であり、後者は内部摩擦定数と云はれるものである。この場合には定常な繰返應力下における細長い履歴曲線の傾き、並に格好 (長さに対する履歴幅の割合) は、その繰返しの早さ及び應力振幅の大きさに無関係で常に一定である。而もこの物質に固有である。又自由減衰振動における対数減衰率も物質固有定数となる。かくの如き性質は勿論 W. Voigt⁽⁶⁾ の速度比例型減衰能の場合とは根本的に異なるものである。併しかかる性質が果して如何なる形に於て擬弾性体振動力学の中に導入せられるかと云ふ問題は Kimball の古くより遂に長い間深い疑問として、今日迄残されたのであつた。併し筆者はその擬弾性の性格が、この様に極めて整つた簡美なものであるならば、これを許容する位より一般な弾性力学も考へられる様に思ひ、こゝに一つの基礎方程式を考へるに到つた。本論ではかゝる問題に就き述べる。

2. 弾性履歴曲線の力学的表現方式に関する基礎的考察

実際の金属等に於ては所謂弾性限内の内部摩擦は一般に極

めて小であるから、その弾性履歴曲線の型を詳細に直接実験的に調べる事は極めて困難である。併しゴム等に於ては定常振動の場合の應力歪の履歴閉曲線を直接光学的に画かした実験があり⁽⁷⁾、その形は一見全く楕円形を採つてゐる。さて完全弾性体の振動力学に於てはフックの法則がその基本假定となつてゐるために、その振動におけるノーマル座標は時間に対する円函数として與へられる。そしてその時の應力と歪の時間項は全く位相差なきため、その振動中のあらゆる時間に於てそのフックの法則が成立つてゐる。即ち完全弾性体の振動力学は見方に依てはそのフックの法則に端を発し、その應力、歪のノーマル座標がその間に位相差を持たない事を以て一つの特質としてゐるとも考へられる。そこで我々がその完全弾性の振動力学に『出来るだけ僅かの改変 (一種の一般化)』を加へる事に依て或型の不完全弾性体の振動力学を組立てるためには、次の様な事も考へられる。即ちそのノーマル座標或は應力、歪の時間項の円函数的性格はそのまま存置した形で、その『位相差のみが僅かに一致しない力学』を組立てることが出来るはしないかと云ふ考である。尤もかゝる力学がその様な擬弾性に起因する現象を総て説明しなければならぬ事は勿論である。かくて若しも我々がその應力と歪の時間項に僅かの位相差のみを許すならば、先づ明らかにその弾性履歴曲線は楕円形を採るのである。この場合擬弾性体の履歴曲線が実際の場合事実楕円でない事があるかも知れない。かゝる事は所謂比例限界を越えた履歴曲線では明らかに認められる所である。併し我々はフックの法則が所謂成立つと云はれる附近に於て考へてゐるものであり、これは理論を構成する立場からも要求し度い所のものである。何となればこゝでは内部摩擦指示量を物質定数として認め得る如き場合を先づ取扱はん事を希望してゐる事は勿論であるが、同時にその内部摩擦を分離した残りに於ては純粹の弾性定数の如きものが残る様な場合を先づ取扱つて見度いがためである。實際多くの弾性履歴曲線はかゝる場合は中央部で最も幅廣く、尖端附近では幅狭くなつた眞直な單純な閉曲線型を採る。併し實際はその幅が極めて狭いので、その型が正確に楕円形か否か

(1) Über die Grundgleichungen der Schwingungen der Quasielastizitätskörper mit den Material Konstanten der Werkstoffdämpfung.

(2) Sadaichi ENDO, Member. The Aichi-Tokei-Denki Co. Ltd. 愛知時計電機會社.

(3) J. A. Ewing, Brit. Assoc. Rep., 1889, p. 502.

(4) A. L. Kimball & D. E. Lovell, Phys. Rev., 30, 1927, p. 948. A. L. Kimball, Proc. 3rd Intern. Congress for Applied Mechanics, Stockholm, 3, 1930, p. 193.

(5) O. Föppl, Zeits. VDI, 70, 1926, p. 1291. O. Föppl, Proc. 2nd Intern. Congress for Applied Mechanics, Zürich, 1926, p. 328.

(6) W. Voigt, Ann. d. Phys., 47, 1892, p. 671.

(7) E. Schmidt; ZAMM, 1923, Bd. 3. Ph. Popp; Z. techn. phys., 1934, Bd. 15.

の細かい点に就ては、実験上殆ど究め難いのである。併し一たび理論の仮定の立場より考へると、これを複雑な函数で與へられる擬似楕円形と考へる事は理論上の取扱ひを徒に複雑化する事にもなり、理論の実用性を失はしめる事にもなるのである。現在の所金属の弾性限内の履歴曲線は少くとも近似的には楕円形と見る事が出来る様であり、ゴム等に於てはその事が実験上一層明瞭に認める事が出来るのである。

以上の実験並に理論上の要請上、我々は先づ円函数を時間項とする定常振動の場合に対して、その弾性履歴曲線はその應力、歪間の位相差のため楕円形を採るものとする。さうするとこのことはフックの法則に一種の一般化を行つて、それを楕円形の方へ擴張した事になるが、併しかゝ一種の一般化が力学上の取扱ひに対してどんな根本的な変革を持ち来すかは、その應力-歪面の楕円表式並にその性格に就て詳細なる検討を要するのである。特に従来の弾性力学は、微小なる歪に制限され、應力と歪の直線性、第1次導函数の活用、直線ベクトル函数の活用等所謂『直線性格』に依存して、初めてその構成の簡美化を保つてゐる。従てこゝにその直線性を根本的に放棄すると云ふことは餘程重大であると考えなくてはならぬ。従て我々はその様な弾性履歴の表現方式を得たとしても、その数学上における表現形式に迄深く立入つて何らかの特質を把握しなければならないかも知れない。併し結局はその仮定の現象に対する説明性が最も重要な要点である事は勿論である。かゝる場合その基礎仮定は一見多種多様に見える現象の成立つべき必要にして充分なる条件であつて、力学展開の基礎となるものである。そこで我々はこの基礎仮定から考察して行く意味を以て、こゝに弾性復原力の構造問題、即ち弾性履歴曲線の力学的表現方式に関する考察から初める事にする。

先づ最も簡単な場合として単純な伸縮型変形の場合から考へる。この場合にはその時の應力 σ と歪み x との間には楕円的な関係が成立つと考へなければならぬから、 h, b, c を定数として、その間には次の関係が成立つと見る。

$$\sigma^2 + 2h\sigma x + bx^2 + c = 0. \quad (1)$$

これは $\sigma-x$ 座標軸の原点に中心を持つ一般の楕円方程式である。

さて実際の現象に於ては Kimball その他に依ればこの弾性曲線の画く面積 S はその振動数に無関係で一定であり且應力振幅の2乗に比例する。そこでこの事の内容を少しく整理敷衍すれば次の如くなると考へられる。即ちこの弾性曲線は繰返しの速さを早くしても遅くしても或振動数の範囲内では少くとも第1近似として、その大いさも形も不変である。次にその應力振幅を変へてやればそれと比例してその履歴曲線は大きくも小さくもなる。併しその形（長さに対する幅の割合）は、少くとも第1近似として不変である。即ち常に相似形を保つて大きくなつたり小さくなつたりする。従て應力零における残留歪は歪振幅の大いさに比例し、又歪零時における残留應力は應力振幅に比例する。次にこの履歴曲線の傾きは少くとも第1近似として或振動数の範囲内では振動数に無関係で、又振幅にも無関係で常に一定であると考へる。

従てこの事から材料に固有な性質を取出して整理し、理論の仮定とする所をまとめると次の2項になる。

(1) 應力-歪面における弾性履歴曲線の傾きは、材料に固有であつて、振動数にも振幅にも無関係で常に一定である。

(2) この弾性履歴曲線の形は材料に固有であつて、振動数にも振幅にも無関係で常に一定である。

そこで今この二つの仮定から先づ必要にして充分な二つの物質定数を決定しておく。

先づこの場合の純粋な弾性率をどう定義しておくかに関し、この履歴曲線の傾きの事に就て考へる。今應力と歪の直交座標の原点 O に中心を持つ斜に傾いた楕円を、この場合の弾性履歴曲線と考へて、その尖端附近における σ 軸及び x 軸に平行な切線の切点を P 及び Q とし、交点を R とする。さうするとこの楕円の傾きは OP か又は OR で示す事が出来る。併しこの材料の純粋の弾性を表示する傾きとして、その何れを採るべきかに就ては、一應若干の曖昧が残される。併しこの事に就ては後述する事とし、只今ではその傾きを OR の方に採つておく。さうするとこの時の弾性率 E は次の如く定義される。

$$\sigma_m = Er \quad (2)$$

但し σ_m は應力振幅、 r は歪振幅である。

次に内部摩擦の指示量に関して考へる。これは純粋の弾性線 OR に対する楕円の幅を規定する量を選んで定めればよい。そのためにその指示量として歪零における應力を採れば、これは残留應力 σ_r とも呼ぶ事が出来る。これは仮定より振幅 r に正比例する。従てこの比例定数を ξ とすれば

$$\sigma_r = \xi r. \quad (3)$$

この ξ は物質定数であつて、この楕円の幅を規定する量として簡明な意味を持つ。従て今後これを内部摩擦指示量として『内部摩擦定数』と呼ぶ事にする。

さうすると以上 (2) 及び (3) に依てこの履歴楕円に対し見掛上は二つの制限が與へられた事になる。併し (2) の決め方には PR, QR が楕円への切線である条件もあるから、結局実質的にはこの楕円に対し三つの制限が與へられてゐる事になる。従て我々はこの3種の条件から (1) 式の3箇の未知定数 h, b 及び c を決定する事が出来る。次にこの h, b, c を決定する。

先づ (1) 式より歪零に於ては

$$\sigma_r^2 + c = 0$$

$$\therefore c = -\sigma_r^2 = -\xi^2 r^2. \quad (4)$$

次に (1) 式を x で一度微分すれば次式が得られる。

$$(\sigma + hx)\partial\sigma/\partial x + h\sigma + bx = 0.$$

そこで P 点における應力を σ_P とすれば P 点に於ては

$$\begin{cases} \sigma_P + hr = 0 \\ \sigma_P^2 - 2h\sigma_P r + br^2 - \xi^2 r^2 = 0. \end{cases}$$

この二つから σ_P, r を消去すれば次式が得られる。

$$b = h^2 + \xi^2 \quad (5)$$

次に Q 点における歪を x_Q とすれば Q 点に於ては

$$\begin{cases} h\sigma_m + bx_Q = 0 \\ \sigma_m^2 - 2h\sigma_m x_Q + bx_Q^2 - \xi^2 r^2 = 0. \end{cases}$$

この二つから x_Q を消去すれば

$$\sigma_m^2(1 - h^2/b) = \xi^2 r^2.$$

これに (2) を参照すれば再び b, h 間の関係式が得られる。

$$E^2(1 - h^2/b) = \xi^2. \quad (6)$$

そこで (5), (6) の二つの関係式から b 及び h を求めれば

$$b = E^2. \quad (7)$$

$$h = -\sqrt{E^2 - \xi^2}. \quad (8)$$

以上で三つの定数が定められたので (1) 式を書き換へれば

$$\sigma^2 - 2\sqrt{E^2 - \xi^2} \sigma x + E^2 x^2 - \xi^2 r^2 = 0 \quad (9)$$

$$\text{或は } \sigma = \sqrt{E^2 - \xi^2} x \pm \xi \sqrt{r^2 - x^2}. \quad (10)$$

これが弾性定数 E 並に内部摩擦定数 ξ に依て組立てられた弾性履歴曲線の方程式である。

そこで今その履歴曲線に就ての二三の性質を示す式を附加しておく

$$\sigma_P = \sqrt{E^2 - \xi^2} r \quad (11)$$

$$x_Q = r \sqrt{E^2 - \xi^2} / E. \quad (12)$$

又残留歪 x_r は $\sigma = 0$ の時の歪であるから次式が得られる。

$$x_r / r = \xi / E \quad (13)$$

$$\therefore \sigma_r = E x_r. \quad (14)$$

従て σ_r と x_r とは丁度弾性率を比例定数として結び付いてゐる。従て又次の関係も成立つ。

$$\sigma_r / \sigma_m = x_r / r. \quad (15)$$

そこで次にこの履歴楕円の面積 W を求めてみると

$$W = \oint \sigma dx = \pi \xi r^2 = \xi' \sigma_m^2 \quad (16)$$

$$\text{但し } \xi' = (\pi / E^2) \xi. \quad (17)$$

この面積は材料単位体積當り毎週期消費せられる勢力であつて、これは振幅の 2 乗に正比例し、或は應力振幅の 2 乗に正比例する。そして勿論振動数に無関係である。これ Kimball 等の主張する性質に一致するものである。こゝで ξ' は即ち Kimball の内部摩擦定数に相當するものである。

さて我々はこゝに弾性履歴の構造を示す一表現方式を得たのであるが、この形は時間が導入された形ではまだ吟味されてゐないので、次にはこの点から一應その性格を調べてみる。そのために今歪 x を次の如く置く。

$$x = r \cos \omega t. \quad (18)$$

但し r は歪振幅で、 ω は円振動数、 t は時間とする。次に履歴楕円上の点の廻りは時計の針と同じ向きと考へる。そして (18) を (10) 式に代入すれば

$$\sigma = \sqrt{E^2 - \xi^2} r \cos \omega t - \xi r \sin \omega t \quad (19)$$

$$= E r \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (20)$$

$$\text{但し } \varepsilon = \tan^{-1}(\xi / \sqrt{E^2 - \xi^2}).$$

こゝで σ の振幅は $E r$ である。この様に (18) を取り入れ

昭和 16 年 5 月]

ると、その σ が (20) の様に極めて簡単になる。そこで完全弾性体の場合に対して次の如き対応に注目してみる。

$$\begin{aligned} \text{完全弾性体の場合} & \begin{cases} x = r \cos \omega t \\ \sigma = E r \cos \omega t \end{cases} \\ \text{擬弾性体の場合} & \begin{cases} x = r \cos \omega t \\ \sigma = E r \cos(\omega t + \varepsilon). \end{cases} \quad (21) \end{aligned}$$

即ち本論の初め完全弾性体の場合に出来るだけ僅かの改変を加へるため、その差異とする点を單に位相差のみに歸し度いと云ふことを述べたが、この対応は我々の現在の取扱が、丁度その考に一致してゐることを示すものである。従て本論の取扱を (21) 式から出発しても同様の結果が得られるであらうことが解かる。かくて若し (21) 式から出発するならば我々は (2) 式を仮定すべき事も明らかである。これが (2) 式を仮定せる一つの理由でもある。次に若し履歴楕円の傾きを OR ではなく、 OP に選べば、 $c = -\xi^2 r^2$, $h = -E$, $b = E^2 + \xi^2$ となるために、(20) 式の σ の $E r$ に相當する所が $\sqrt{E^2 + \xi^2} r$ となつて、應力式の変化する部分が位相差のみではなくなる。併しこの履歴楕円の傾きで OP を採らないより決定的な理由は次の如きものである。

今この様な点を吟味するために、単位断面、単位長の材料の下端が固定され、上端に質量 m の分銅が付いた單振動系を考へる。そしてこの場合に対し若し履歴楕円の傾きを OP に採つた場合を考へると、その復原力は次の如くなる。

$$\sigma = E x \pm \xi \sqrt{r^2 - x^2}. \quad (22)$$

従てこの場合の自由振動の基礎式は

$$m \ddot{x} + E x \pm \xi \sqrt{r^2 - x^2} = 0. \quad (23)$$

今この方程式を解いてその固有振動数 ω_n を求めると

$$\omega_n = \sqrt{(E + \sqrt{E^2 + \xi^2}) / 2m}. \quad (24)$$

更にこの場合の振幅函数 $r(t)$ を求めると A を定数として

$$r(t) = A e^{-\sqrt{(\sqrt{E^2 + \xi^2} - E) / 2m} t}.$$

これから更に対数減衰率 δ を求めると次の如くなる。

$$\delta = 2\pi \left[\frac{\sqrt{E^2 + \xi^2} - E}{\sqrt{E^2 + \xi^2} + E} \right]^{1/2}.$$

従てこの場合には先づ減衰項が入つて来るとその固有振動数は増加する。而も ξ を無限大に増大すると、 ω_n は無限大に増大し、一方その対数減衰率は 2π に近づく。そのため減衰振動波形の相隣る振幅比 r_{n+1}/r_n は $e^{-2\pi} \approx 0.002$ (約) に近づき、甚だしい減衰の状態を採る。併しその値は有限である。今この事を考へるとかゝるものは内部摩擦の基本思想「抗抵」なる概念に完全に矛盾する。従て我々は斯るものは現象性の本質に反するものとして完全に否定しなければならない。この事は即ち履歴楕円の傾きを OP に採る事を否定する事である。

これに対し若し我々がその復原力として (10) 式を採るならばその場合の自由振動の基礎式は

$$m \ddot{x} + \sqrt{E^2 - \xi^2} x \pm \xi \sqrt{r^2 - x^2} = 0 \quad (25)$$

であつて、この式の固有振動数 ω_n は次の如くなる。

$$\omega_n = \sqrt{(E + \sqrt{E^2 - \xi^2})/2m} \quad (26)$$

この式では勿論内部摩擦項の導入と共にその固有振動数は減少する。併しこの場合に注意すべき事は若し我々が (26) 式や又は元の (10) 式を承認するならば、それは即ち $\xi \leq E$ を承認する事でもあると云ふ点である。この内部摩擦の値に対する制限は一見物理的意味からは不合理の様に思はれるが、併しこの事に就ては次の如く考へる事が出来る。それはこの制限は何から生じたかと云へば、結局力学の一般化要素を位相差のみに限つたためである。このために仮定 (2) $\sigma_m = Er$ なる条件が必要になつた。その結果履歴楕円の ξ に依る変化状態が、常に應力振幅の σ_m を変へない様に变化する事になつた。即ち ξ が大になつてもその履歴楕円は夫々 x 及び σ 軸に平行な QR 直線と PR 直線とに囲まれた矩形内でのみしか变化する事が出来ない。かくて σ_r が σ_m より大になり得ない制限が起り、引いて $\xi < E$ なる制限が起るのである。又 $\sigma_r = \sigma_m$ なる場合は勿論切点 Q が σ 軸上に、切点 P が x 軸上に来る時で、 $\xi = E$ なる時である。

さて我々はこゝに我々の場合に適合する復原力の基本形 (10) を得る事になつたが、併しこのまゝの形では擬弾性体の振動力学上の取扱には一見不便な様に思はれる。そこで (19) 式が複素変数 z の極座標形に類似してゐる点から考へて、今 (21) 式に対応する sine 型表式を考へてみる。

$$\begin{cases} y = r \sin \omega t \\ \sigma_{\text{imag}} = Er \sin (\omega t + \epsilon) \end{cases} \quad (27)$$

そして (27) に虚数単位 i を乗じて (21) に加へれば次式が得られる。

$$Z = x + iy = r \cos \omega t + ir \sin \omega t \quad (28)$$

$$P = \sigma + i\sigma_{\text{imag}}$$

$$= Er \cos (\omega t + \epsilon) + iEr \sin (\omega t + \epsilon) \quad (29)$$

さうすると Z は x を実部とする複素変数であり、 P は σ を実部とする複素変数である。所が今この P を変形してみると (19) 式等より

$$\begin{aligned} P &= (\sqrt{E^2 - \xi^2} x - \xi y) + i(\sqrt{E^2 - \xi^2} y + \xi x) \\ &= (\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi)(x + iy) = \kappa \cdot Z \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{但し } \kappa = \sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi \quad (31)$$

この κ は一つの複素型定数である。そこで今 P を複素應力、 z を複素歪と称してみると、この二つの間には比例的関係が成立つ。従て我々はこの場合當然の結果として失ふべき應力、歪間の比例関係が、この様な複素量を取扱へば、こゝに再びその比例性を取戻し得る事になる。この比例関係はたとへそれが形式上のものであるとしても、それが比例的性質を採ると云ふ事は、擬弾性体振動力学の展開に対して、極めて便利な性質を提供するものと考えらる。そこで我々はこゝに複素應力 P 、複素歪 Z を採用して、我々の復原力の基本形に次式を提案することにする。

$$P = (\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi) Z \quad (32)$$

3. 擬弾性を規定する物質定数に就て

先づ定数型内部摩擦を持つ擬弾性体の不完全弾性を規定す

る量で、独立なものは弾性側に 2 箇、同様に内部摩擦側に 2 箇考へられる。そして勿論弾性側に於て通常取扱はれる弾性定数はヤング率 E 、剛性率 G 、体積弾性率 K 、この他にポアソン比 ν がある。又 Lamé の定数と云はれるものもある。この時その材料の弾性を規定するには、その中の任意の 2 箇だけでよいので、若しその中の 3 箇を採ればその間には自然或関係式が成立つ。所でこの様な事は内部摩擦側に於ても考へられる所であつて、この事は前論における E と ξ との対応性を見れば明らかな所である。所で前論に於ては單純なる伸縮型変形の場合のみに就て論じたが、それと同様な事は單純なる剪断変形並に体積変化に於ても全く相似に考へられる所である。そこでこゝでは先づこの三つの單純な変形の場合における復原力の構造式を挙げてみる事にする。

1. 單純なる伸縮型振動変形の場合

$$\sigma^2 - 2\sqrt{E^2 - \xi^2} \sigma x + E^2 x^2 - \xi^2 r^2 = 0$$

但し σ : 垂直應力、 x : 伸縮歪、 r : 伸縮歪の振幅、 E : ヤング率、 ξ : 垂直内部摩擦定数。

2. 單純なる剪断変形振動の場合

$$\tau^2 - 2\sqrt{G^2 - \eta^2} \tau \gamma + G^2 \gamma^2 - \eta^2 \gamma_m^2 = 0 \quad (33)$$

但し τ : 剪断應力、 γ : 剪断歪、 γ_m : 剪断歪の振幅、 G : 剛性率、 η : 剪断内部摩擦定数。

3. 單純なる膨脹收縮型振動の場合

$$p^2 - 2\sqrt{K^2 - \zeta^2} p \Delta + K^2 \Delta^2 - \zeta^2 \Delta_m^2 = 0 \quad (34)$$

但し p : 垂直應力、 Δ : 体積膨脹率、 Δ_m : 体積膨脹率の振動振幅、 K : 体積の弾性率、 ζ : 体積変化内部摩擦定数。

さうするとこゝでは、内部摩擦側に ξ の他に二つの内部摩擦定数が定義された。この時独立なる定数としては 2 箇だけしか必要でないとすれば、その ξ , η , ζ 間には丁度弾性率側における E , G , K の如き関係が成立つ様に思はれる。そこで次にはその ξ , η , ζ 間の関係式に就て少し具体的に考察してみる事にしよう。

今この間の関係を最も簡単に考察するため單位立方体を考へる。そしてその上下面には振動的な伸張圧縮力 p_1 、左右方向へは大きさの相等しい圧縮伸張力 p_2 が加へられてゐるものとする。この時 p_1 と p_2 とは大きさ相等しく位相は逆としてゐるから、前後方向へは伸縮は起らない筈である。この時この状態を幾らか考へ易くするために、これを (イ) 力が上下方向のみに作用する場合、(ロ) 左右方向へのみ作用する場合に分けて考へる。そしてこの両者の共存する場合を考へ、最後にこれを剪断変形の側から見直す。

(イ) の場合 先づこの場合には材料は完全弾性体ではないので、實際の変形状態ではその應力振幅 σ_m と歪振幅 r とは決して同時に起つてゐるのではない。併しその σ_m と r とを個別的に取出してその関係を求めると、恰も完全弾性体の場合の如き関係 $\sigma_m = Er$ が成立つ。この様なことは残歪應力 σ_r と残歪歪 x_r との間にも成立つ。即ち $\sigma_r = Ex_r$ である。そこでこゝではその應力振幅と歪振幅、残歪應力と残歪歪とをこの様に考へて、その間の関係式を求めると次の如くなる。

$$e_{10} = p_{10}/E, e_{1r} = p_{1r}/E = (\xi/E) e_{10} = (\xi/E^2) p_{10} \dots (35)$$

但し p_{10} : 應力振幅、 e_{10} : 歪振幅、 e_{1r} : 残留歪、 p_{1r} : 残留應力。

(ロ) の場合 左右方向から應力が作用した場合は次の関係が成立つ。

$$e_{20} = p_{20}/E, e_{2r} = p_{2r}/E = (\xi/E) e_{20} = (\xi/E^2) p_{20} \dots (36)$$

但し p_{20} : 應力振幅、 e_{20} : 歪振幅、 e_{2r} : 残留歪、 p_{2r} : 残留應力。

次に以上 (イ)、(ロ) の場合の應力の大きさが相等しくて $p_1 = -p_2$ で位相を逆にして共存する場合には前後方向の歪は相殺して零である。今この場合の上下方向の伸を e_{10}' とすれば次式が成立つ。

$$e_{10}' = e_{10} - \nu e_{20} = p_{10}/E - \nu p_{20}/E = p_{10}(1+\nu)/E. \quad (37)$$

然るに一方 $e_{10} = (E/\xi) e_{1r}$, $e_{20} = (E/\xi) e_{2r}$ であるから e_{10}' は又

$$e_{10}' = (E/\xi) e_{1r} - \nu (E/\xi) e_{2r}$$

従て $e_{1r} - \nu e_{2r} = (\xi/E) e_{10}'$. (38)

然るにこの右辺はその形から、この時の上下方向の残留歪 e_{1r}' と考へられ、又左辺よりも同様な事が考へられる。従て

$$e_{1r}' = (\xi/E) e_{10}' = (\xi/E^2)(1+\nu) p_{10}. \quad (39)$$

然るに (イ)、(ロ) の共存するこの様な場合は、完全弾性の場合には、単純なる剪断変形と全く同価値である事は弾性論でよく知られた所である。これに対しこの場合は勿論完全弾性の場合ではない。併しこの様な不完全弾性の場合でも、若しこの場合の取扱ひ量が應力振幅、歪振幅、残留應力、残留歪の如き量間の関係を取扱ふ時は、恰も完全弾性の場合と同様に取扱ひ得られる事が考へられる。かくてこの場合は完全弾性の時と同様に、その剪断歪振幅は垂直歪振幅の 2 倍になり、又それに應ずる剪断應力振幅の大きさは垂直應力振幅の大きさと等しくなると考へられる。従て今その剪断歪の振幅を γ_0 とし、又その剪断應力を τ_0 とすれば

$$\gamma_0 = 2e_{10}', p_{10} = \tau_0 \quad (40)$$

が成立つ。この時仮りにこの式を (37) に入れて、 $\tau_0 = G\gamma_0$ を使用すれば次式が成立つ。

$$E = 2(1+\nu) G. \quad (41)$$

即ちこの場合は ξ, η が入り込んでゐても、それから分離して、その弾性率 E, G は純粋な弾性論の時と同様な関係を保つ事が出来る。この様で我々の考は正しい様に考へられるので、さうすれば残留歪に対しても次式の如きものが成立つと考へられる。

$$\gamma_r = 2e_{1r}' \quad \text{但し } \gamma_r: \text{残留剪断歪} \dots (42)$$

従て (39) 式より

$$\gamma_r = 2(\xi/E^2)(1+\nu) p_{10} = 2(\xi/E^2)(1+\nu) \tau_0.$$

然るに一方次の如き式

$$\gamma_r = (\eta/G^2) \tau_0 \quad (43)$$

が成立つべきであるから

$$2(\xi/E^2)(1+\nu) = \eta/G^2.$$

昭和 16 年 5 月]

これに (41) 式を参照すれば次式が成立つ。

$$\xi/E = \eta/G. \quad (44)$$

$$\therefore \xi = 2(1+\nu) \eta. \quad (45)$$

従て ξ と η とは丁度 (41) 式と同様な形式でポアソン比 ν を介して関係してゐる事を知る。

次に ξ と ζ とがポアソン比 ν を介して如何に関係してゐるかに就て考察する。この時は単位立方体の上下、左右、前後の相対する面に大いさ相等しき p_1, p_2, p_3 なる振動的な垂直應力が同位相で作用してゐるものとする。この時この應力振幅及び歪振幅の大きさを p_0 及び e_0 とすればその各方向に対して次式が成立つ。

$$e_0 = p_0(1-2\nu)/E. \quad (46)$$

それで今体積の膨脹率を Δ とすれば

$$\Delta = 3(1-2\nu) p_0/E = p_0/K.$$

$$\therefore E = 3(1-2\nu) K. \quad (47)$$

即ち内部摩擦を含む我々の場合にもこの関係は分離して成立つ。次に垂直應力零時の残留膨脹の状態を考へると、この時の各方向の残留歪 e_r は (46) 式から

$$e_r = (\xi/E^2)(1-2\nu) p_0.$$

従て残留体積 Δ_r は次の如くなる。

$$\Delta_r = (\xi/E^2) \cdot 3(1-2\nu) p_0 = (\zeta/K^2) p_0.$$

これに (47) 式を参照すれば次の関係が得られる。

$$\xi/E = \zeta/K. \quad (48)$$

従て $\xi = 3(1-2\nu) \zeta$. (49)

そこで結局 ξ と ζ との間にも E と K と同様な関係が成立つのである。そこで次の関係も成立する。

$$\xi/E = \eta/G = \zeta/K. \quad (50)$$

かくて ξ, η, ζ 間には弾性体における弾性定数 E, G, K 間の関係と全く同様な関係が成立つ。

4. 内部摩擦定数を含む擬弾性体振動の基礎方程式に就て

さてこれ迄の議論に依れば単純型の振動変形に於ては、應力と歪との間に簡単な位相差の存在を許す事のみで、その弾性履歴曲線は楕円形になり、且内部摩擦定数を持つ擬弾性体の性格並に現象が取扱はれ得る事を示した。併しそのため一方應力と歪との間には當然その間の比例的関係を失ふ事になつた。そしてその中で特に注目すべき性質は、その内部摩擦定数が基礎方程式に導入される場合には、單に新しい一項を加へると云ふ形式だけではなく、それは弾性項に相當する部分迄、その形の変革を要求した。かくて一見かゝるものを基礎とする擬弾性体振動力学の展開は、甚だしい混乱を結果しうに見えたが、併しこゝに複素應力と複素歪なる量を採用すれば、我々は再びそれ等の量の間に形式的比例関係を取戻す結果となつた。かくて若し我々の取扱が、應力並に歪に比例する量間の直線的或は一次的関係量のみを取扱ふ場合—基礎方程式は丁度この場合—には、従来の完全弾性力学と完全に平行に論じて差支ないことを知るのである。尙その解法等

も、従来の力学より甚だしく複雑となる事なしに取扱得られるであらう事も、考へられる所である。

さて物質定数の独立なものとして今 (E, G, ξ, η) を採る事にすれば単純なる垂直 (又は剪断) 変形に対しては次式が成立つ。

$$Q = \kappa (\text{od} \cdot \chi) \cdot Z \quad \dots\dots\dots (51)$$

但し Q : 複素 (型) 垂直 (又は剪断) 應力

Z : 複素 (型) 垂直 (又は剪断) 歪

$$\kappa = \sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$\chi = \sqrt{G^2 - \eta^2} + i\eta \quad \dots\dots\dots (53)$$

次にかゝる内部摩擦を持つ物体の中に直交座標 (x, y, z) に平行なる稜を持つ微小な直六面体を考へる。そしてこれの應力状態に就て考へられる應力 P_{xx} 等及び歪 e_{xx} 等を複素型で考へて、それを Q_{xx} 及び Z_{xx} 等で表はす事にする。さうするとそれ等の間には直線的函数関係が成立つので、その複素歪に就ては結局次式が成立つ。

$$Z_{xx} = \kappa^{-1} \{Q_{xx} - \nu(Q_{yy} + Q_{zz})\} \text{ etc. } \dots\dots\dots (54)$$

$$Z_{yz} = \chi^{-1} Q_{yz} \text{ etc. } \dots\dots\dots (55)$$

こゝに ν はポアソン比であつて、これ等の関係はその物理的意味から直ちに書き下す事が出来る。

そこで次に (54) 式を Q_{xx} 等に就て解けば次式が得られる。

$$Q_{xx} = \lambda' D + 2\mu' Z_{xx} \text{ etc.}$$

$$\text{但し } D \equiv Z_{xx} + Z_{yy} + Z_{zz} \quad \dots\dots\dots (56)$$

$$\lambda' \equiv \frac{\nu\kappa}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\nu(\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\mu' \equiv \frac{\kappa}{2(1+\nu)} = \frac{\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi}{2(1+\nu)} \quad \dots\dots\dots (58)$$

然るに (50), (41) 式を参照すれば容易に

$$\mu' = \chi \quad \dots\dots\dots (59)$$

なる事を証明する事が出来る。又これから次式も得られる。

$$\kappa = 2(1+\nu)\chi \quad \dots\dots\dots (60)$$

これは (50) 並に (41) から當然成立すべき式である。従て複素應力と歪との関係を整理して書けば完全弾性体の場合と全く相似的な式となる。

複素歪の分値に対しては

$$\left. \begin{aligned} Z_{xx} &= \kappa^{-1} \{Q_{xx} - \nu(Q_{yy} + Q_{zz})\}, & Z_{yz} &= 2(1+\nu)\kappa^{-1} Q_{yz} \\ Z_{yy} &= \kappa^{-1} \{Q_{yy} - \nu(Q_{zz} + Q_{xx})\}, & Z_{zx} &= 2(1+\nu)\kappa^{-1} Q_{zx} \\ Z_{zz} &= \kappa^{-1} \{Q_{zz} - \nu(Q_{xx} + Q_{yy})\}, & Z_{xy} &= 2(1+\nu)\kappa^{-1} Q_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (61)$$

複素應力の分値に対しては

$$\left. \begin{aligned} Q_{xx} &= \lambda' D + 2\chi Z_{xx}, & Q_{yz} &= \chi Z_{yz} \\ Q_{yy} &= \lambda' D + 2\chi Z_{yy}, & Q_{zx} &= \chi Z_{zx} \\ Q_{zz} &= \lambda' D + 2\chi Z_{zz}, & Q_{xy} &= \chi Z_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (62)$$

但し $D \equiv Z_{xx} + Z_{yy} + Z_{zz}$.

以上の如く應力又は歪に比例する量の一次式に帰結し得る式は、(51) より當然の帰結として、皆完全弾性論の対応式より次の如き形式上の置換に依て達し得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{應力} &: \text{複素應力} \\ \text{歪} &: \text{複素歪} \\ E &: \kappa \\ G &: \chi \\ \lambda \text{ (Lamé の定数)} &: \lambda' \\ \mu \text{ (Lamé の定数)} &: \mu' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (63)$$

然るに完全弾性論における弾性振動の基礎式は應力並にそれと元を同じくする量に関する一次式の形式を採るのでやゝりかゝる置換を行ふ事が出来る。

従てこゝに取扱つてゐる様な擬弾性体振動の基礎方程式は次の如く書く事が出来る。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = \mu' \nabla^2 \mathbf{Z} + (\lambda' + \mu') \text{grad div } \mathbf{Z}$$

但し ρ : 密度, t : 時間

$\mathbf{Z}$: 振動点の変位ベクトル $\mathbf{S}$ の複素化せられたもの

$$\nabla^2: \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2.$$

今この式を少しく書き換へると次の様にも表はせる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = (\sqrt{G^2 - \eta^2} + i\eta) \nabla^2 \mathbf{Z} + \frac{\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{grad div } \mathbf{Z}.$$

次に非回轉の波又は体積変化の波に関する基礎式は次の如くなる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = \frac{(1-\nu)(\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla^2 \mathbf{Z}$$

$$\rho \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{(1-\nu)(\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla^2 D$$

又変形の波又は等体積の波に関する基礎式は次の如くなる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = (\sqrt{G^2 - \eta^2} + i\eta) \nabla^2 \mathbf{W}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = (\sqrt{G^2 - \eta^2} + i\eta) \nabla^2 \mathbf{Z}$$

但し $2\mathbf{W} = \text{curl } \mathbf{Z}$.

以上がかゝる内部摩擦定数を含む擬弾性体の振動力学に関する基礎方程式である。かゝる基礎式は減衰性弾性波又は衝撃波の取扱に若干の新しい基礎を與へるものと考へる。

5. 結 論

Kimball 型内部摩擦を含む擬弾性体振動の力学は、従来の完全弾性力学に、單に應力と歪間の位相差を許容するだけの一般化に依て、應じ得るものである事が判明した。この應力、歪間の位相差の許容は、その弾性履歴を楕円形にし、當然應力、歪間の比例性を放棄した。併し我々が或方法で複素化した複素應力及び複素歪なる量を採用すれば、再びその間に形式上の比例性を取戻した。かくて我々は従来の完全弾性力学とその取扱上極めて相似せる力学の基礎式を得る事になつたのである。この事はこの新しい力学の取扱が、完全弾性の場合よりも甚だしく複雑となる事なしに遂行し得られる事を示すものであらう。尙本基礎式は減衰性弾性波の取扱に若干の新しい基礎を與へるものと考へる。

(昭和 16 年 4 月 5 日受付)

[第 7 卷 第 27 号 (第 1 部)]