簡単な規則に従ふ漸変断面を有する片持梁の捩れ振動数⁽¹⁾

(昭和 17 年 3 月 14 日 長崎地方講演會に於て講演)

正 員 中 川 元⁽²⁾

摘 要

直線的及び指数函数的な勾配を有する相似断面の片持梁の第 1 次及び第 2 次捩れ振動数を求めた。両者の振動数は自由端が細くなる場合以外は殆ど同じである。尙この様な勾配部を一樣断面部に接合した場合も解いた。この様な場合には全長が勾配を有する場合に比べて第 1 次振動数は下り、第 2 次振動数は上る。

1. 緒 言

断面が漸変する片持梁の捩れ振動に関する文献は Ch. Platrier⁽³⁾, Dungen⁽⁴⁾ の積分方程式によるもの、R. V. Wolff⁽⁵⁾ の勢方式によるもの、及び R.P. Coleman⁽⁶⁾, 松尾氏⁽⁷⁾ の微分方程式の解によるもの等がある。最近高橋氏⁽⁸⁾ は微分方程式の固有値問題として美事な方法による有益な論文を発表された。一般的には積分方程式或は固有値問題とする解法が望ましいが、振動数方程式が決定したとしても、振動数を求めるまでの計算は級数展開となるから煩雑にして必ずしも容易ではない。微分方程式が解かれるには漸変断面が簡単な型に限られ一般性に欠けるが、振動数方程式が決定した後の計算は比較的正確で且容易である。

筆者は簡単な規則に従ふ場合として直線的及び指数函数的な勾配を有する相似断面の場合を解いた。この様な特殊な場合には振動数方程式が極めて簡単になるから、第 1 次 (基本) 及び第 2 次の振動数は正確な値に近い結果が得られると思ふ。第 2 次振動数迄正確に求めた結果が少いので既に発表された文献への補足としたい。

尙直線的及び指数函数的な勾配部を一樣断面部に接合した場合をも解いた。

第 1 図

2. 全長が勾配をなす場合

1. 微分方程式 G : 横弾性係数、 θ : 捩れ角、 φ : x 或は z のみを含む正規函数、 γ : 単位体積の重さ、 g : 重力による加速度、 t : 時間、 I_p : x 断面の極慣性モーメント、 J : x 断面の捩れ剛性、 ω : 円振動数とすれば捩れ振動の方程式は

$$\frac{\gamma}{g} I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(G J \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (1)$$

である。上式に

$$\theta = \varphi e^{i\omega t}$$

とおき

$$\gamma/gG = p^2 \quad (2)$$

とすれば次の常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{J} \cdot \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\omega^2 p^2 I_p}{J} \varphi = 0 \quad (3)$$

2. I_p 及び J x に垂直な断面における直角座標を y, z , 断面積を A , 捩れ函数を u とすれば

$$I_p = \int (y^2 + z^2) dA$$

$$J = \int \left(y \frac{\partial u}{\partial z} - z \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 + z^2 \right) dA$$

にして共に長さの 4 乗の単位を有してゐる⁽⁹⁾。断面の形状が x に沿ふて相似のときには比例常数を k とおけば $y = kz$ であるから I_p 及び J は定数 (k の函数) と z の 4 乗の積で與へられる。故に次の関係が成立する。

$$I_p/J = K^2 \quad (4)$$

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dx} = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{4}{z} \frac{dz}{dx} \quad (5)$$

例へば半径 z の円形断面では

$$I_p = J = \frac{\pi z^4}{2}, \quad K^2 = \frac{I_p}{J} = 1$$

長半径 y , 短半径 z の楕円断面では

(1) The Frequency of Torsional Vibration of a Cantilever Beam Tapering in Accordance with Simple Formulae.

(2) Hazime NAKAGAWA, Member. The Meiji College of Technology. 明治専門学校.

(3) Ch. Platrier, Les phénomènes de torsion étudiés à l'aide des équations intégrales de Volterra et Fredholm, C. R., 178, (1924), 1877~1880.

(4) Van den Dungen; Quelques applications techniques des équations intégrales, C. R., 177 (1923), 243~245.

(5) R.V. Wolff; Über die Bestimmung der Torsionseigenfrequenz eingespannter Träger von Flugzeugtragflügeln, Lufo. Bd. 17, Ht. 7, (1940) 204~206.

(6) R.P. Coleman; The Frequency of Torsional Vibration of a Tapered Beam, N.A.C.A.T.N. No. 697, (1939).

(7) 松尾政元、プロペラ翼の捩れ振動に就ての一考察、日本航空学会誌、8 卷 77 号 (昭 16-9).

(8) 高橋利衛、断面が任意に漸変する片持梁の捩れ振動に就て、日本航空学会誌、9 卷 81 号 (昭 17-1).

(9) 漸変断面の J は同断面形の均一梁のそれと違つてゐるのであるが、誤差は小さいので一般に無視しても差支ない。

$$I_p = \frac{\pi}{4} yz(y^2 + z^2) = \frac{\pi}{4} k(k^2 + 1)z^4$$

$$J = \pi yz \frac{y^2 z^2}{y^2 + z^2} = \pi \frac{k^3}{k^2 + 1} z^4$$

$$K^2 = \frac{I_p}{J} = \frac{1}{4} \left(k^2 + \frac{1}{k^2} + 2 \right)$$

辺長 y 及び z の矩形断面では

$$I_p = \frac{yz}{12} (y^2 + z^2) = \frac{1}{12} k(k^2 + 1)z^4$$

J の値は St. Venant の厳密な解によると

$$J = Cyz^3 = Ckz^4$$

こゝで C は定数ではなく、 k に従て第1表の如き値をとる。

第 1 表

k	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10.00	∞
C	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

$$k^2 = \frac{I_p}{J} = \frac{k^2 + 1}{12C}$$

Föpl の近似解によると

$$J = \frac{y^3 z^3}{3 \cdot 6 (y^2 + z^2)} = \frac{k^3}{3 \cdot 6 (k^2 + 1)} z^4$$

$$K^2 = \frac{I_p}{J} = 0.3 \left(k^2 + \frac{1}{k^2} + 2 \right)$$

3. 直線式 断面の半径、幅、厚さを表はす変数 z が a より b まで直線的に変化する場合には

$$z = a + \frac{b-a}{l} x \quad \dots\dots\dots(6)$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \left(\frac{b-a}{l} \right) \frac{d\varphi}{dz} \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \left(\frac{b-a}{l} \right)^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

(4), (5), (6), (7) 式を (3) 式に代入すると

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{4}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \left(\frac{l}{b-a} \omega p K \right)^2 \varphi = 0$$

この微分方程式の解は次式で與へられる。

$$\varphi = z^{-3/2} \{ A J_{3/2}(\beta z) + B J_{-3/2}(\beta z) \} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{b-a}{l} \beta z^{-3/2} \{ -A J_{5/2}(\beta z) + B J_{-5/2}(\beta z) \} \quad \dots\dots\dots(9)$$

こゝで

$$\beta = \frac{l \omega p K}{b-a}, \quad b \neq a \quad \dots\dots\dots(10)$$

周辺条件

$$\left. \begin{aligned} x=0, z=a \text{ に於て } \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \\ x=l, z=b \quad \quad \quad \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} A J_{3/2}(\beta b) + B J_{-3/2}(\beta b) &= 0 \\ -A J_{5/2}(\beta a) + B J_{-5/2}(\beta a) &= 0 \end{aligned}$$

第 8 卷 第 32 号 (第 1 部)]

積分常数 A, B を消去すると

$$\begin{vmatrix} J_{3/2}(\beta b), & J_{-3/2}(\beta b) \\ -J_{5/2}(\beta a), & J_{-5/2}(\beta a) \end{vmatrix} = 0$$

である。

$$\beta b = \lambda, \quad \beta a = (a/b)\lambda \quad \dots\dots\dots(12)$$

とおき

$$\left. \begin{aligned} J_{3/2}(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} - \cos \lambda \right) \\ J_{-3/2}(\lambda) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \left(\sin \lambda + \frac{\cos \lambda}{\lambda} \right) \\ J_{5/2}\left(\frac{a}{b}\lambda\right) &= -\sqrt{\frac{2b}{\pi a \lambda}} \left\{ \left(1 - \frac{3b^2}{a^2 \lambda^2} \right) \sin \frac{a}{b}\lambda + \frac{3b}{a \lambda} \cos \frac{a}{b}\lambda \right\} \\ J_{-5/2}\left(\frac{a}{b}\lambda\right) &= \sqrt{\frac{2b}{\pi a \lambda}} \left\{ -\left(1 - \frac{3b^2}{a^2 \lambda^2} \right) \cos \frac{a}{b}\lambda + \frac{3b}{a \lambda} \sin \frac{a}{b}\lambda \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

の関係代入すれば振動数方程式は次式で與へられる。

第 2 図

第 3 図

第 2 表

a/b	λ	$\frac{b-a}{b}\lambda$	$\tan\left(\frac{b-a}{b}\lambda\right)$	$\frac{3\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)-\lambda^2}{3\left(\frac{b}{a}\right)^2+3\left(\frac{b}{a}-1\right)\lambda^2}\lambda$	$\frac{1}{Kl}\sqrt{\frac{Gg}{r}}$ の係数
1/10	4.494	4.0446	1.269	1.267	4.045
1/5	4.505	3.6040	0.4985	0.4981	3.604
1/4	4.524	3.3930	0.2567	0.2573	3.393
1/3	4.601	3.0674	-0.0743	-0.0743	3.067
1/2	5.053	2.5265	-0.7066	-0.7067	2.527
2/3	6.357	2.1190	-1.638	-1.637	2.119
3/4	7.816	1.9540	-2.481	-2.476	1.954
4/5	9.330	1.8660	-3.289	-3.292	1.866
9/10	17.075	1.7075	-7.270	-7.269	1.708
10/9	-12.954	1.4394	7.567	7.568	1.439
5/4	-5.200	1.3000	3.602	3.598	1.300
4/3	-3.678	1.2260	2.784	2.787	1.226
3/2	-2.198	1.0990	1.960	1.960	1.099
2	-0.825	0.8250	1.083	1.082	0.825
3	-0.2635	0.5270	0.5819	0.5819	0.527
4	-0.1245	0.3735	0.3919	0.3919	0.374
5	-0.0716	0.2864	0.2945	0.2945	0.286
10	-0.0150	0.1350	0.1358	0.1358	0.135

第 3 表

a/b	λ	$\frac{b-a}{b}\lambda$	$\tan\left(\frac{b-a}{b}\lambda\right)$	$\frac{3\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)-\lambda^2}{3\left(\frac{b}{a}\right)^2+3\left(\frac{b}{a}-1\right)\lambda^2}\lambda$	$\frac{1}{Kl}\sqrt{\frac{Gg}{r}}$ の係数
1/10	7.731	6.9577	0.7996	0.7994	6.958
1/5	7.839	6.2712	-0.0120	-0.0122	6.271
1/4	7.993	5.9949	-0.2966	-0.2966	5.995
1/3	8.455	5.6365	-0.7550	-0.7551	5.637
1/2	10.386	5.1928	-1.919	-1.919	5.193
2/3	14.845	4.9482	-4.162	-4.162	4.948
3/4	19.466	4.8666	-6.436	-6.436	4.867
4/5	24.132	4.8264	-8.735	-8.736	4.826
9/10	47.615	4.7615	-20.360	-20.360	4.761

$$\frac{3\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)-\lambda^2}{3\left(\frac{b}{a}\right)^2+3\left(\frac{b}{a}-1\right)\lambda^2}\lambda = \tan\left(\frac{b-a}{b}\lambda\right) \quad (14)$$

但し $b > a$ のときは $\lambda > 0$, $b < a$ のときは $\lambda < 0$ である。

予め a/b に一定値を與へ、第 2, 3 図に示す如き曲線を書いて第 1 次および第 2 次の根をもとめると、 $b > a$ のときは $\pi/2 < \{(b-a)/b\}\lambda < (3/2)\pi$ の間に第 1 次の根、
 $(3/2)\pi < \{(b-a)/b\}\lambda < (5/2)\pi$ の間に第 2 次の根が存在する。
 $b < a$ の時は $\{(b-a)/b\}\lambda < \pi/2$ の間に第 1 次の根が存在する。
(2), (10), (12) 式より円振動数は次式で與へられる。

$$\omega = \lambda \frac{b-a}{b} \cdot \frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{r}} \quad (15)$$

数値計算の結果は第 1 次振動数は第 2 表の如く、第 2 次振動数は第 3 表の如くである。

$a=0$ のときは

$$\lambda = \tan \lambda \quad (16)$$

となるから、この第 1 次の根は 4.4934, 第 2 次の根は 7.7253 である。

$1/Kl\sqrt{Gg/r}$ の係数変る模様は一様断面における係数が $\pi/2$ および $(3/2)\pi$ であるから、第 4 図、5 図の実線で表はされる。

4. 指数函数式 z が a より b ま
で指数函数的に漸変する場合には

$$z = ae^{(x/l)\log(b/a)}, \quad a \neq 0 \quad (17)$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{z}{l} \log \frac{b}{a} \cdot \frac{d\varphi}{dz} \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \left(\frac{1}{l} \log \frac{b}{a} \right)^2 \left(z^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + z \frac{d\varphi}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(4), (5), (17), (18) 式を (3) 式に代入すると

$$z^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 5z \frac{d\varphi}{dz} + \left(\omega p K \frac{l}{\log(b/a)} \right)^2 \varphi = 0$$

この微分方程式の解は次式で與へられる。

$$\varphi = z^{-2} \{ A z \sqrt{4-\beta^2} + B z^{-\sqrt{4-\beta^2}} \} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{1}{l} \log \frac{b}{a} \\ &\times z^{-2} \left\{ (\sqrt{4-\beta^2}-2) A z \sqrt{4-\beta^2} \right. \\ &\left. - (\sqrt{4-\beta^2}+2) B z^{-\sqrt{4-\beta^2}} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

こゝで

$$\beta = \frac{\omega p K l}{\log(b/a)} \quad (21)$$

周辺条件 (11) 式を代入して積分定数 A, B を消去すると

$$\left\{ (\sqrt{4-\beta^2}-2) a \sqrt{4-\beta^2} - (\sqrt{4-\beta^2}+2) a^{-\sqrt{4-\beta^2}} \right\} b^{\sqrt{4-\beta^2}} = 0$$

を得る。

$\beta < 2$ のときは

$$\sqrt{4-\beta^2} = \lambda \quad (22)$$

とおけば

$$\frac{2-\lambda}{2+\lambda} = (b/a)^{2\lambda} = e^{2\lambda \log(b/a)}$$

上式を数値計算に便利な式に直せば振動数方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda &= -2 \frac{e^{2\lambda \log(b/a)} - 1}{e^{2\lambda \log(b/a)} + 1} \\ &= -2 \tanh\{\lambda \log(b/a)\} \end{aligned} \quad (23)$$

[昭和 17 年 8 月]

第 4 図

第 5 図

$\beta > 2$ のときは

$$\sqrt{4 - \beta^2} = i\lambda \quad (24)$$

とおけば振動数方程式として次式を得る。

$$\lambda = -2 \tan\{\lambda \log(b/a)\} \quad (25)$$

初根 λ の近似値を求めると、 $b > a$ のときは (25) 式が成立し、第 1 次の根は第 4 表の如く $\pi/2 < \lambda \log(b/a) < \pi$ の間にあり、第 2 次の根は第 5 表の如く $(3/2)\pi < \lambda \log(b/a) < 2\pi$ の

間にある。 $b < a$ のときは第 4 表の如く $a/b < 3/2$ で (25) 式が成立し、 $a/b > 2$ で (23) 式が成立する。(21), (22), (24) 式より円振動数は次式で與へられる。

$$\beta < 2, \quad \omega = \sqrt{4 - \lambda^2} \log(b/a) \cdot \frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{r}} \quad (26)$$

$$\beta > 2, \quad \omega = \sqrt{4 + \lambda^2} \log(b/a) \cdot \frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{r}} \quad (27)$$

$1/Kl \sqrt{Gg/r}$ の係数が変わる模様は第 4 図、5 図の点線で表はされる。

$a \rightarrow 0$ のときは $\lambda \log(b/a)$ が有限値をとるには $\lambda \rightarrow 0$ でなければならぬが、(27) 式より $\omega \rightarrow \infty$ となる。即ち $z = ae(x/l) \log(b/a) = a^{1-x/l} b^{x/l}$ であるから、 $a \rightarrow 0$ のときは $x/l < 1$ では $z = 0$, $x/l = 1$ では $z = b$ である。故に慣性モーメントが零なる片持梁の振動となるので $\omega \rightarrow \infty$ となるわけである。

3. 勾配部を接合した場合

5. 直線式 勾配部に於ては

第 4 表

a/b	λ	$\lambda \log_e \frac{b}{a}$	$\tan\left(\lambda \log \frac{b}{a}\right)$	$-2 \tan\left(\lambda \log \frac{b}{a}\right)$	$\frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{r}}$ の係数
1/10	1.139 4	2.623 6	-0.569 9	1.139 8	5.300
1/7	1.315 5	2.559 8	-0.657 7	1.315 4	4.658
1/5	1.543 6	2.484 3	-0.771 8	1.543 6	4.066
1/4	1.748	2.423 3	-0.874 0	1.748	3.682
1/3	2.118	2.326 8	-1.060	2.120	3.200
1/2	3.094	2.144 6	-1.547	3.094	2.554
2/3	4.841	1.962 7	-2.420	4.840	2.124
3/4	6.498	1.869 3	-3.250	6.500	1.956
4/5	8.122	1.812 3	-4.060	8.120	1.867
9/10	16.082	1.694 6	-8.039	16.078	1.708
		$\lambda \log_e \frac{a}{b}$	$\tan\left(\lambda \log \frac{a}{b}\right)$	$2 \tan\left(\lambda \log \frac{a}{b}\right)$	
10/9	13.512	1.423 8	6.754	13.508	1.439
5/4	5.468	1.220 1	2.734	5.468	1.299
4/3	3.762	1.082 3	1.881	3.762	1.226
3/2	1.823	0.739 2	0.911 5	1.823	1.097
			$\tanh\left(\lambda \log \frac{a}{b}\right)$	$2 \tanh\left(\lambda \log \frac{a}{b}\right)$	
2	1.614	1.118 7	0.807 0	1.614	0.819
3	1.945	2.136 8	0.972 5	1.945	0.512
4	1.983 8	2.750 1	0.991 9	1.983 8	0.352
5	1.993 6	3.208 5	0.996 8	1.993 6	0.257
10	1.999 6	4.604 3	0.999 8	1.999 6	0.092

$$z = a + \frac{b-a}{\alpha l} x \quad (28)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{b-a}{\alpha l}\right) \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \left(\frac{b-a}{\alpha l}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{4}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \left(\frac{\alpha l}{b-a} \omega p K\right)^2 \varphi = 0$$

第 5 表

a/b	λ	$\lambda \log_e \frac{b}{a}$	$\tan\left(\lambda \log_e \frac{b}{a}\right)$	$-2 \tan\left(\lambda \log_e \frac{b}{a}\right)$	$\frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{r}}$ の係数
1/10	2.352 6	5.417 0	-1.176 3	2.352 5	7.110
1/5	3.269 2	5.261 4	-1.634 7	3.269 4	6.168
1/4	3.752 5	5.202 1	-1.876 2	3.752 3	5.895
1/3	4.658 6	5.117 9	-2.329 4	4.658 8	5.570
1/2	7.189 9	4.983 7	-3.595 0	7.190 1	5.173
2/3	12.029	4.877 2	-6.012 9	12.026	4.944
3/4	16.793	4.831 0	-8.392 0	16.784	4.865
4/5	21.534	4.805 0	-10.767	21.535	4.826
9/10	45.143	4.756 7	-22.558	45.116	4.761

第 6 図

$$\beta = \frac{\omega p K \alpha l}{b-a} \quad (29)$$

とおけば解は次式で與へられる。

$$\varphi = z^{-3/2} \{ A J_{3/2}(\beta z) + B J_{-3/2}(\beta z) \} \quad (30)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{b-a}{\alpha l} \beta z^{-3/2} \{ -A J_{5/2}(\beta z) + B J_{-5/2}(\beta z) \} \quad (31)$$

一樣断面部に於ては

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \omega^2 p^2 K^2 \varphi = 0$$

$$\varphi = C \cos(\omega p K x) + D \sin(\omega p K x) \quad (32)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \omega p K \{ -C \sin(\omega p K x) + D \cos(\omega p K x) \} \quad (33)$$

勾配部に添字 1, 一樣断面部に添字 2 を附せば、周辺条件は

$$\left. \begin{aligned} x=0, z=a \text{ に於て } d\varphi_1/dx &= 0 \\ x=\alpha l, z=b \quad \quad (d\varphi_1/dx) &= (d\varphi_2/dx) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \varphi_1 &= \varphi_2 \\ x=l, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(34) 式の条件を (30), (31), (32), (34) 式に代入して聯立方程式の積分常数を消去すれば

$$\begin{vmatrix} -J_{5/2}(\beta a), & J_{-5/2}(\beta a), & 0, & 0 \\ -J_{5/2}(\beta b), & J_{-5/2}(\beta b), & b^{3/2} \sin(\omega p K \alpha l), & -b^{3/2} \cos(\omega p K \alpha l) \\ J_{3/2}(\beta b), & J_{-3/2}(\beta b), & -b^{3/2} \cos(\omega p K \alpha l), & -b^{3/2} \sin(\omega p K \alpha l) \\ 0, & 0, & \cos(\omega p K l), & \sin(\omega p K l) \end{vmatrix} = 0$$

である。上式を整理すると

第 7 図

$$\frac{J_{5/2}(\beta a) J_{-3/2}(\beta b) + J_{-5/2}(\beta a) J_{3/2}(\beta b)}{J_{5/2}(\beta a) J_{-5/2}(\beta b) - J_{-5/2}(\beta a) J_{5/2}(\beta b)} = -\tan\{(1-\alpha)\omega p K l\}$$

(12), (13), (29) 式を代入すると振動数方程式は次式で與へられる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda^2 - 3 \frac{b(b-a)}{a^2} \right\} \lambda^2 + \left\{ \left(3 \frac{b}{a} - 1 \right) \lambda^2 + 3 \frac{b^2}{a^2} \right\} \lambda \tan\left(\frac{b-a}{b} \lambda\right) \\ & - 3 \frac{b-a}{a} \left(\lambda^2 + 3 \frac{b}{a} \right) \lambda - \left\{ \lambda^4 - \left(1 - 3 \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right) \lambda^2 + 9 \frac{b^2}{a^2} \right\} \tan\left(\frac{b-a}{b} \lambda\right) \\ & = -\tan\left\{ \frac{(1-\alpha)(b-a)}{\alpha b} \lambda \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

(2), (12), (29) 式より円振動数は

$$\omega = \frac{\lambda(b-a)}{\alpha b} \cdot \frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{r}} \quad (36)$$

である。予め α 及び a/b に一定値を與へ第 7 図に示す如き曲線を書いて第 1 次及び 2 次の根を求めると第 1 次振動数は第 6 表、第 2 次振動数は第 7 表の如く、係数の変る模様は第 5 図 $\alpha=1/2$ の実線で表はされる。

6. 指数函数式 勾配部に於ては

$$z = a e^{(\alpha/l) \log(b/a)} \quad (37)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{z}{\alpha l} \log \frac{b}{a} \cdot \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \left(\frac{1}{\alpha l} \log \frac{b}{a} \right)^2 \left(z^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + z \frac{d\varphi}{dz} \right)$$

$$z^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 5z \frac{d\varphi}{dz} + \left(\omega p K \frac{\alpha l}{\log(b/a)} \right)^2 \varphi = 0$$

$$\beta = \frac{\omega p K \alpha l}{\log(b/a)} \quad (38)$$

とおけば解は次式で與へられる。

$$\varphi = z^{-2} \{ A z \sqrt{4-\beta^2} + B z^{-1} \sqrt{4-\beta^2} \} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{1}{\alpha l} \log \frac{b}{a} \cdot z^{-2} \{ \sqrt{4-\beta^2} - 2 \} A z \sqrt{4-\beta^2} \\ &\quad - (\sqrt{4-\beta^2} + 2) B z^{-1} \sqrt{4-\beta^2} \quad (40) \end{aligned}$$

[昭和 17 年 8 月]

第 6 表 $\alpha=1/2$

a/b	λ	λ^2	$\frac{b-a}{b}\lambda$	$\tan \frac{b-a}{b}\lambda$	(35) 式 の左辺	(35) 式 の右辺	$\frac{1}{Kl}\sqrt{\frac{Gg}{\gamma}}$ の係数
0	1.303	1.697 8	1.303 0	3.644	-3.649	-3.644	2.606
1/10	1.420	2.016 4	1.278 0	3.317	-3.312	-3.317	2.556
1/5	1.558	2.427 4	1.246 4	2.974	-2.979	-2.974	2.493
1/4	1.640	2.689 6	1.230 0	2.820	-2.820	-2.820	2.460
1/3	1.792	3.211 3	1.194 7	2.532	-2.535	-2.532	2.389
1/2	2.222	4.937 3	1.111 0	2.019	-2.019	-2.019	2.222
2/3	3.021	9.126	1.007 0	1.581	-1.585	-1.581	2.014
3/4	3.804	14.470	0.951 0	1.401	-1.406	-1.401	1.902
4/5	4.578	20.958	0.915 6	1.301	-1.301	-1.301	1.831
9/10	8.506	72.352	0.850 6	1.139	-1.139	-1.139	1.701

第 7 表 $\alpha=1/2$

a/b	λ	λ^2	$\frac{b-a}{b}\lambda$	$\tan \frac{b-a}{b}\lambda$	(35) 式 の左辺	(35) 式 の右辺	$\frac{1}{Kl}\sqrt{\frac{Gg}{\gamma}}$
0	3.707 4	13.745	3.707 4	0.634 8	-0.634 8	-0.634 8	7.415
1/10	3.961 0	15.690	3.564 9	0.450 5	-0.449 9	-0.450 5	7.130
1/5	4.228 1	17.876	3.382 4	0.245 6	-0.245 8	-0.245 6	6.765
1/4	4.373 0	19.123	3.279 8	0.139 0	-0.138 8	-0.139 0	6.560
1/3	4.647 7	21.601	3.098 5	-0.043 2	0.043 2	0.043 2	6.197
1/2	5.539 5	30.686	2.769 8	-0.389 9	0.389 5	0.389 9	5.640
2/3	7.633 5	58.271	2.544 5	-0.679 9	0.680 0	0.679 9	5.089
3/4	9.879 5	97.605	2.469 9	-0.795 0	0.795 1	0.795 0	4.940
4/5	12.177	148.279	2.435 4	-0.852 9	0.852 1	0.852 9	4.871
9/10	23.856	569.109	2.385 6	-0.942 8	0.942 3	0.942 8	4.771

一樣断面部に於ては

$$\varphi = C \cos(\omega p K x) + D \sin(\omega p K x) \quad \dots\dots\dots(41)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \omega p K \{-C \sin(\omega p K x) + D \cos(\omega p K x)\} \quad \dots\dots\dots(42)$$

(34) 式の周辺条件を (39), (40), (41), (42) 式に代入して積分常数を消去すると

$$\begin{vmatrix} (\sqrt{4-\beta^2}-2)a\sqrt{4-\beta^2}, & (\sqrt{4-\beta^2}+2)a^{-\sqrt{4-\beta^2}}, & 0, & 0 \\ (\sqrt{4-\beta^2}-2)b\sqrt{4-\beta^2}, & (\sqrt{4-\beta^2}+2)b^{-\sqrt{4-\beta^2}}, & & \\ \beta b^2 \sin(\omega p K a l), & -\beta b^2 \cos(\omega p K a l) & & \\ b\sqrt{4-\beta^2}, & b^{-\sqrt{4-\beta^2}}, & -b^2 \cos(\omega p K a l), & \\ & & -b^2 \sin(\omega p K a l) & \\ 0, & 0, & \cos(\omega p K l), & \sin(\omega p K l) \end{vmatrix} = 0$$

上式を整理して

$$\beta < 2, \quad \sqrt{4-\beta^2} = \lambda \quad \dots\dots\dots(43)$$

とおけば

$$\lambda \coth\left(\lambda \log \frac{b}{a}\right) + 2 = \sqrt{4-\lambda^2} \tan\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \log \frac{b}{a} \cdot \sqrt{4-\lambda^2}\right) \quad \dots\dots\dots(44)$$

第 8 図

$$\beta > 2, \quad \sqrt{4-\lambda^2} = i\lambda \quad \dots\dots\dots(45)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \lambda \cot\left(\lambda \log \frac{b}{a}\right) + 2 \\ = \sqrt{4+\lambda^2} \tan\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \log \frac{b}{a} \sqrt{4+\lambda^2}\right) \quad \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

の振動数方程式を得る。

(2), (38), (43), (45) 式より円振動数は次式で與へられる。

$$\beta < 2, \quad \omega = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\alpha} \log \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}} \quad \dots\dots\dots(47)$$

$$\beta > 2, \quad \omega = \frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{\alpha} \log \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{Kl} \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}} \quad \dots\dots\dots(48)$$

同様第 8 図に示す如き曲線を書いて第 1 次及び第 2 次の根を求めると第 1 次振動数は第 8 表、第 2 次振動数は第 9 表の如く、係数の変る模様は第 5 図、 $\alpha=1/2$ の点線で表はされる。

$\alpha=0$ の時は丁度一樣断面を有する $l/2$ の棒の振動数と一致する訳であるから、第 1 次で π 、第 2 次で 3π の係数を有す。併しその様な点と結ぶことは第 5 図、 $\alpha=1/2$ の点線で示される如く滑らかな曲線では困難である。これは a/b が小さくなるにつれて一樣断面における J を (そのまゝ用ひた) 仮定が無理になつて来た結果によるのではなからうかと思はれる。むしろ π 及び 3π の点より夫々変曲点の近くで接する様な直接で以ておきかへた方が実際に近いのではないだらうか。

終りに臨み計算を手傳はれた植村温子君、昭和 17 年 9 月卒業生久富賢一君に謝意を表す。

第 8 表 $\alpha=1/2$

a/b	λ	λ^2	$\lambda \log_e \frac{b}{a}$	$\coth x$ ($\lambda \log_e b/a$)	(44) 式 の左辺	$\sqrt{4-\lambda^2}$	$\sqrt{4-\lambda^2} \log_e \frac{b}{a}$	$\tan(\sqrt{4-\lambda^2} \log_e \frac{b}{a})$	(44) 式 の右辺	$1/K\sqrt{Gg\tau}$ の係数
1/20	1.940 7	3.766 1	5.813 6	1.000 0	3.941	0.483 6	1.448 7	8.149 6	3.941	2.897
1/10	1.903 3	3.622 6	4.382 5	1.000 3	3.904	0.614 3	1.414 5	6.346 0	3.898	2.829
1/5	1.814 4	3.292 0	2.920 0	1.005 8	3.825	0.841 4	1.354 1	4.542 3	3.822	2.708
1/4	1.757 4	3.088 5	2.436 3	1.015 4	3.784	0.954 7	1.323 5	3.961 0	3.782	2.647
1/3	1.632 0	2.663 6	1.793 0	1.057 0	3.725	1.156 0	1.270 0	3.223 6	3.726	2.540
1/2	1.115 0	1.243 3	0.772 9	1.541 8	3.719	1.660 3	1.150 8	2.239 3	3.718	2.302
				$\cot x$ ($\lambda \log_e a/b$)	(45) 式 の左辺	$\sqrt{4+\lambda^2}$	$\sqrt{4+\lambda^2} \log_e \frac{b}{a}$	$\tan(\sqrt{4+\lambda^2} \log_e \frac{b}{a})$	(45) 式 の右辺	
2/3	1.538 5	2.367 0	0.623 8	1.389 5	4.138	2.523 3	1.023 1	1.639 5	4.137	2.046
3/4	2.670	7.128 9	0.768 1	1.035 2	4.764	3.336 0	0.959 7	1.427 4	4.762	1.920
4/5	3.620	13.104	0.807 8	0.956 2	5.461	4.135 7	0.922 8	1.320 9	5.463	1.846
9/10	7.832	61.340	0.825 3	0.923 2	9.231	8.083 3	0.851 7	1.142 2	9.233	1.704

第 9 表 $\alpha=1/2$

a/b	λ	λ^2	$\lambda \log_e \frac{b}{a}$	$\coth(\lambda \log_e \frac{b}{a})$	(44) 式 の左辺	$\sqrt{4-\lambda^2}$	$\sqrt{4-\lambda^2} \log_e \frac{b}{a}$	$\tan(\sqrt{4-\lambda^2} \log_e \frac{b}{a})$	(44) 式 の右辺	$1/K\sqrt{Gg\tau}$
1/20	1.389 3	1.930 1	4.162 0	1.000 5	3.390	1.4392	4.311 4	2.356 2	3.391	8.623
1/10	0.862 6	0.744 1	1.986 2	1.038 4	2.896	1.8044	4.154 8	1.603 5	2.893	8.310
				$\cot(\lambda \log_e \frac{b}{a})$	(45) 式 の左辺	$\sqrt{4+\lambda^2}$	$\sqrt{4+\lambda^2} \log_e \frac{b}{a}$	$\tan(\sqrt{4+\lambda^2} \log_e \frac{b}{a})$	(45) 式 の右辺	
1/5	1.184 8	1.403 8	1.906 8	-0.349 5	1.586	2.324 6	3.741 2	0.683 6	1.589	7.482
1/4	1.552 8	2.411 2	2.152 6	-0.657 8	0.979	2.532 0	3.510 1	0.386 1	0.978	7.020
1/3	2.095 6	4.391 5	2.302 2	-0.897 5	0.119	2.896 8	3.182 4	0.040 8	0.118	6.365
1/2	3.436	11.806 1	2.381 7	-1.052 3	-1.616	3.975 7	2.755 8	-0.406 1	-1.615	5.512
2/3	5.907	34.893	2.395 1	-1.081 0	-4.385	6.236 4	2.528 6	-0.703 4	-4.387	5.057
3/4	8.315	69.139	2.392 1	-1.074 5	-6.934	8.552 1	2.460 3	-0.810 8	-6.934	4.921
4/5	10.702	114.522	2.387 9	-1.065 5	-9.402	10.886 8	2.429 3	-0.863 5	-9.401	4.859
9/10	22.538	507.961	2.374 8	-1.037 9	-21.392	22.626 6	2.384 2	-0.945 5	-21.393	4.768

(昭和 17 年 4 月 27 日受付)