粒子の沈降速度に就て⁽¹⁾

(昭和17年2月19日及び20日 第21回滿洲地方講演會に於て講演)

正員 岸本支那⁽²⁾ 准員 伊藤四郎⁽³⁾

1. 緒言

流体中を沈降する微粒子の速度とその大きさとの関係を求めるのにストークスの式を使用することは、古くより知られており、既往の報告は殆どストークスの式の應用であるが、一般に粒子の大きさが大きくなつて来ると、ストークスの式は使用できない。而して大きさ或は沈降速度の一方のみを知つても、その粒子がストークスの式の範囲に行動してゐるかどうかは直ちに知ることはできない。著者等はストークスの式に頼らず廣範圍に適用し得る簡単な計算法を提出し、実験によりその應用範圍を検討し、現在工業的に用ひられてゐる鑛山、化学機械等の設計の一助となさんため、この研究を行つた。

2. 計算法

(1) 粒子の大きさと沈降終速の関係 沈降する粒子を球形と看做して運動方式を立てると

$$m dv/dt = P - R \quad \dots\dots\dots(1)$$

但し m = 球体の質量 = $(\pi/6)d^3\sigma$ g

d = 球径 cm

σ = 球体の密度 g/cm³

v = 沈降速度 cm/s

t = 時間 s

P = 球体に働く見掛けの重力 = $(\pi/6)d^3$

$(\sigma - \rho)g$ dyne

ρ = 流体密度 g/cm³

g = 重力の加速度 cm/s²

R = 流体抵抗 = $\phi \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot (\pi/4)d^2$ dyne

ϕ = 抵抗係数

ϕ はレイノルズ数 R_e の函数として実験的に知られており第1図に示した (以後これを原曲線と呼ぶ)。

(1) 式に於て R は速度の増加と共に大きくなり

$$P = R$$

になつたとき

$$dv/dt = 0$$

このときの速度を終速と言ひ v_l で表はすと (1) 式より

$$v_l = \sqrt{\{8gd(\sigma - \rho)/(6\phi\rho)\}} \quad \dots\dots\dots(2)$$

本式で ϕ は R_e の函数であるため、 v_l を直ちに計算することはできない。然るに v_l に相當するレイノルズ数は

$$R_e = dv_l/\nu \quad \dots\dots\dots(3)$$

但し ν = 流体の運動粘性係数 cm²/s

(2) 及び (3) 式から v_l を消去して

$$d = \sqrt[3]{[6\phi R_e^2 \nu^2 \rho / \{8g(\sigma - \rho)\}]} \quad \dots\dots\dots(4)$$

なる式を得るが、この式は終速を以て沈降してゐる粒子の R_e と d との関係を表はす。故に σ , ρ 及び ν が既知なる場合、第1図より任意の R_e から ϕ の値に相當する d を (4) 式より計算し、この d の値を (3) 式に入れて v_l を算出し、この計算を各 R_e に就て行へば $d-v_l$ 関係曲線が求められる。

今 20°C の水 ($\rho=1$, $\nu=0.01$) 中を $\sigma=2$ 即ち $\sigma-\rho=1$ の球体が沈降する場合を標準にとつて (3) 及び (4) 式より、

第1図 $R_e-\phi$ 曲線

$$\left. \begin{aligned} d &= \sqrt[3]{\{(0.0001 R_e^2 \phi) / 1.306 \cdot 67\}} \\ v_l &= 0.01 R_e / d \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

この値を第1表 (次頁参照) に示す。第1表の d 及び v_l より ρ , ν 及び σ の異なる他の $d-v_l$ 曲線は次の方法により求められる。即ち、 ρ' , ν' なる流体中を σ' , d' なる球体が沈降する場合には (3) 及び (4) 式より

$$d' = \sqrt[3]{[6\phi R_e'^2 \nu'^2 \rho' / \{8g(\sigma' - \rho')\}]} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$v_l' = R_e' \nu' / d'$$

(1) Falling velocity of particle in fluid. (2) Sinaiti Kishimoto, Member. The Central laboratory of the South Manchuria Railway Company. 満鉄中央試験所。 (3) Sirō Ito, Associate Member. The Central laboratory of the South Manchuria Railway Company. 満鉄中央試験所。

第 1 表

R_e	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10	20	50	100	200	500	1 000	2 000	5 000	10 000
ψ	245	123	50	26.6	14.75	7	4.35	2.70	1.58	1.10	0.805	0.545	0.450	0.395	0.39	0.41
d	0.005 723	0.007 22	0.009 855	0.0126 7	0.016 53	0.023 75	0.032 15	0.043 5	0.067 09	0.094 43	0.135 2	0.218 5	0.324 7	0.494 6	0.906 9	1.462
v_l	0.175	0.277	0.507	0.789	1.210	2.105	3.109	4.590	7.450	10.590	14.800	22.886	30.750	40.420	55.120	68.300

上の両式と (5) 式とより

$$\left. \begin{aligned} d' &= d \sqrt[3]{(\nu'/0.01)^2 / \{(\sigma' - \rho')/\rho'\}} \\ v_l' &= v_l \sqrt[3]{(\nu'/0.01) \cdot \{(\sigma' - \rho')/\rho'\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

第 2 図は 20°C の水中及び空气中を種々なる密度の粒子の d 及び v_l を計算し両対数方眼紙に画いたもので、 R_e は -45° の傾きを持ち、一つの R_e 線上では σ の変化は対数的であり、且総ての R_e 線上では各実長は等しいから、 ν 一定の場合には一つの σ に就ての曲線を求めたならば後は作図に依て求めることができる。

(2) 終速に達する時間 固体或は液体粒子が流体中を落下の際、終速に達する迄の時間は既往に於て報告を見ないが工業装置設計上関係があるので計算して見た。(1) 式の積分で終速に達する迄の時間 t_l を求めるには原曲線の函数形が必要である。ストークス式 $\psi = 24/R_e$ は概算的に用ひても $R_e = 1$ 迄で範囲が小さいので著者等は便宜上 $\psi = 1 + 25/R_e$ なる式を提出し第 1 図中に点線で求めた処、 $R_e = 200$ 以下に於て近似的に原曲線に一致するので $R_e = 200$ 迄の終速粒径に対してはこれで計算し、又 $R_e = 200$ 以上では ψ の値は 0.8~0.4 の範囲にあり $R_e = 200$ 迄の値に比して変動は極めて小さいので終速における ψ を一定に取つて計算し時間的關係を求めて見た。(1) 式に $\psi = 1 + 25/R_e$ を入れると

$$m \frac{dv}{dt} = P - \frac{25}{8} \nu \rho \pi d v - \frac{1}{8} \rho \pi d^2 v^2 \dots\dots\dots(7)$$

上式の形を簡単にするため

$$a = P, \quad b = \frac{25}{16} \nu \rho \pi d, \quad c = \frac{1}{8} \rho \pi d^2 \dots\dots\dots(8)$$

と置いて (7) 式を積分し積分常数を $t=0$ の時 $v=0$ として決定すると

$$t = \frac{1}{2/m\sqrt{(b^2+ac)}} \times \log_e \frac{\{\sqrt{(b^2+ac)+b+cv}\}/\{\sqrt{(b^2+ac)-b-cv}\}}{\{\sqrt{(b^2+ac)+b}\}/\{\sqrt{(b^2+ac)-b}\}} \dots\dots\dots(9)$$

上式を変形して

$$v = \frac{\{\sqrt{(b^2+ac)+b}\} \{e^{2t/m\sqrt{(b^2+ac)}} - 1\}}{c \left\{ \frac{\sqrt{(b^2+ac)+b}}{\sqrt{(b^2+ac)-b}} e^{2t/m\sqrt{(b^2+ac)}} + 1 \right\}} \dots\dots\dots(10)$$

(10) 式で t を含む項は t の増加につれて著しく大となり、終局には -1 及び +1 は無視され

$$v_l = \{\sqrt{(b^2+ac)-b}\}/c \dots\dots\dots(11)$$

第 2 図 $d-v_l$ 曲線

となる。 v_l に達する時間 t_l を求むるため (11) 式を (9) 式に入れると $\sqrt{(b^2+ac)-b}$ と $-cv_l$ は大きき等しく符号反対のため v_l に達するには無限大の時間を要することとなるのであるが、(9) 式の $t-v$ 関係を作図すると $v=0.98 v_l$ 迄は急速に変化し残りの 2% 位に無限大の時間を要してゐるから、 $0.98 v_l$ に達する時間を終速到達時間と看做して差支へないと思はれるので (11) 式の 98% を (9) 式に入れて

$$t_{11} = \frac{1}{2/m\sqrt{(b^2+ac)}} \times \log_e \frac{\{1.98\sqrt{(b^2+ac)+0.02b}\}/\{0.02\{\sqrt{(b^2+ac)-b}\}\}}{\{\sqrt{(b^2+ac)+b}\}/\{\sqrt{(b^2+ac)-b}\}} \dots\dots\dots(12)$$

更に (10) 式の $v=dx/dt$ を積分すると沈降距離が求まる。

即ち

$$x = \frac{-\{\sqrt{(b^2+ac)+b}\}}{c} t + \frac{m}{c} \log_e \left\{ \frac{\sqrt{(b^2+ac)+b}}{\sqrt{(b^2+ac)-b}} e^{2t/m\sqrt{(b^2+ac)}} + 1 \right\} + K_1 \dots\dots\dots(13)$$

[昭和 17 年 8 月]

K_1 は $t=0$ のとき $x=0$ とすれば

$$K_1 = -\frac{m}{c} \log_e \left\{ \frac{\sqrt{(b^2+ac)}+b}{\sqrt{(b^2+ac)}-b} + 1 \right\} \dots\dots\dots(14)$$

(12) 及び (13) 式は $R_e=200$ 以下の終速粒子に対する計算式であるが、 $R_e=200$ 以上の粒子に対しては次の方法を用ひる。即ち、静止点から終速に達する迄の経過の中 $R_e=200$ 迄は (9) 式に $v=R_e\nu/d=200\nu/d$ を入れて求め、以後は終速に達する迄 ψ の値を一定に取つて (1) 式を積分したものを用ひる。即ち $\psi=\text{const.}$ にして積分し記号を (8) 式と同じ

この式で前項が $R_e=0\sim 200$ の間の時間を表はし、後項は $R_e=200\sim$ 終速迄の時間を表はす。

次に (18) 式 $v=dx/dt$ を積分し、積分常数を $t=0$ のとき $x=0$ として決めると、

$$x = \frac{m}{c\psi} \log_e \frac{\gamma e^{(2/m)t\sqrt{(ac\psi)}+1}}{(\gamma+1)e^{(1/m)t\sqrt{(ac\psi)}}} \dots\dots\dots(21)$$

$R_e=200$ 以上の粒径の沈降距離は (13) 式の中の t に (20) 式の前項の値を、又 (21) 式中の t に (20) 式の後項の値を入れて加算する。

第 3 図

にとると

$$t = \frac{1}{2/m\sqrt{(ac\psi)}} \log_e \frac{\sqrt{(ac\psi)}+c\psi v}{\sqrt{(ac\psi)}-c\psi v} + K_2 \dots\dots\dots(15)$$

K_2 は $t=0$ のとき $v=200\nu/d$ を取ると (15) 式は

$$t = \frac{1}{2/m\sqrt{(ac\psi)}} \times \log_e \left\{ \frac{\sqrt{(ac\psi)}+c\psi v}{\sqrt{(ac\psi)}+16b\psi} \right\} / \left\{ \frac{\sqrt{(ac\psi)}-c\psi v}{\sqrt{(ac\psi)}-16b\psi} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

上式に於て $\{\sqrt{(ac\psi)}+16b\psi\}/\{\sqrt{(ac\psi)}-16b\psi\} = \gamma$ (17)

と置き替へ形を変へると

$$v = \frac{\sqrt{(ac\psi)}}{c\psi} \cdot \frac{\gamma e^{(2/m)t\sqrt{(ac\psi)}}-1}{\gamma e^{(2/m)t\sqrt{(ac\psi)}}+1} \dots\dots\dots(18)$$

(18) 式は (10) 式と同様の経過で

$$v_1 = \frac{\sqrt{(ac\psi)}}{c\psi} = \sqrt{\frac{a}{c\psi}} \dots\dots\dots(19)$$

これは (2) 式と同じものであるが、(12) 式におけると同様に $0.98v_1$ を (16) 式に入れて $R_e=200$ の点より終速迄の時間を求め、それに (9) 式より $R_e=0$ から 200 迄の時間を求めて加算した式は

$$t_{12} = \frac{1}{2/m\sqrt{(b^2+ac)}} \times \log_e \left\{ \frac{\sqrt{(b^2+ac)}+b+200cv/d}{\sqrt{(b^2+ac)}+b} \right\} / \left\{ \frac{\sqrt{(b^2+ac)}-b-200cv/d}{\sqrt{(b^2+ac)}-b} \right\} + \frac{1}{2/m\sqrt{(ac\psi)}} \times \log_e \left\{ \frac{\sqrt{(ac\psi)}+16b\psi}{\sqrt{(ac\psi)}-16b\psi} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

第 8 卷 第 32 号 (第 3 部)]

以上の諸式の計算には符号 a, b, c は (8) 式で、 γ は (17) 式で、又 m, d, ν, ψ は従前に定められた関係を用ひる。 $d-v_1$ 曲線の計算例を第 3 図に示した。図に於て見る如く $R_e=200$ の点に不連続点が出るが、これは $R_e-\psi$ の函数形に依るもので大体点線の如くなるべきものと思はれる。

又 (9) 式及び (16) 式は R_e 一定の範囲内では (2) 式より $v_1 \propto (\sigma-\rho)^{1/3}$ 、(4) 式より

$d \propto (\sigma-\rho)^{-1/3}$ その他の項も夫々 σ 或は $(\sigma-\rho)$ の函数としてまとめると

$$t_1 = K_3 \sigma / (\sigma-\rho)^{2/3} \dots\dots\dots(22)$$

K_3 は常数であるが、上式は $\sigma=3\rho$ で極小値を取る。 σ に比して ρ が無視し得る場合、例へば空気中に於ては

$$t_1 = K_3 \sigma^{1/3} \dots\dots\dots(23)$$

なる式を得る。

3. 実 験

実験は径 10 cm、長さ 140 cm のガラス管に液体を入れ各種の粒子を沈降せしめ、その $d-v_1$ を測定、計算値と比較した。

ガラス球 (径 1~6 mm) による実験は第 4 図の如く殆ど計算値と一致する。球形ならざる粒子としてゴムの正立方体を使用し、これを球形と看做した場合の相当直径を求めるため、正立方体の実験値を σ 等しき球の $d-v_1$ 計算曲線上に移してその d と正立方体の辺長 l を比較したものを第 5 図に示した。この場合レイノルズ数小なる内は正立方体もこれと等質量の球体と看做し得る如く運動するが、終速の R_e が 250 前後になつた場合急に抵抗係数が変化する点が現はれ且それ以後も辺長と相当直径の関係は略直線的に変化することを示してゐる。

次に実際のな粒子として石炭、珪素鉄、鉄錆を用ひたが、これは篩別けた粒子を更に大きさ大体一様な数十箇よりなる数群に別け、その目方を測定し平均質量を求め、それから等質量の球体の径を算出、それを d として各粒子の終速の平均値を v_1 として採用した。その結果を第 6 図 (石炭)、第 7 図 (珪素鉄)、第 8 図 (鉄錆) に示した。実験値は計算値に

対し図示の如き差を示した。即ちゴム正立方体におけるが如く、球形としての $d-v_t$ 曲線に合致する臨界点が判然と出ないが尙研究すべき余地が多くある様に思はれる。それで逆に (2), (3) 式より ψ と R_c を求めた所、第 1 図に細実線で示した様な結果を得た。こゝに石炭は撫順炭坑に於て採炭時にできた粉炭、鉄礦石はエンゲルバッハ・グラインダで、

珪素鉄は ジョウクラッシャで粉碎されたものであるが、材料の特性による粉碎粒子の形状及び表面の状態が多分に ψ を左右させるものと考へられる。

4. 結 言

1. 粒子を球形と看做した場合、著者等の提出した方法に

より、 $d-v_t$ 関係は簡単に求め得る。

2. 終速に達する迄の時間は液体中では殆ど瞬間で装置設計上考慮する必要はない。

3. 粒子の如何を問はず、 R_c の極く小さい沈降速度に於ては、これを等質量の球体と看做し得る。

4. 実際粒子に應用する場合には、 $R_c-\psi$ の関係値を実験的に求めておくと正確なる値を知り得る。

(昭和 17 年 4 月 28 日受付)

第 4 図

第 5 図
辺長—相当直径関係曲線

第 6 図

第 7 図

第 8 図

第 6, 7, 8 図中媒質液体の ν 及び ρ は

A..... $\rho=0.800$, $\nu=0.00835$ B..... $\rho=1.00$, $\nu=0.01$ C..... $\rho=0.88$, $\nu=0.09125$ D..... $\rho=0.909$, $\nu=0.2533$

[昭和 17 年 8 月]