ね ぢ フ ラ イ ス 輪 郭 の 解 法⁽¹⁾

(昭和 17 年 7 月 23 日 第 423 回講演會に於て講演)

正 員 小 堀 威⁽²⁾

1. 緒 言

ねぢフライス輪郭の計算に関する文献としては、著者の知る範囲に於ては、東京帝国大学教授青木 保博士が紹介されてゐる H. H. Jeffcott 氏の論文⁽³⁾及び京都帝国大学奥島啓式氏の論文⁽⁴⁾がある。然し前者は三角及び四角ねぢに関するもので、而もねぢ軸とフライス軸との関係角に就ては論及されてをらず、又後者に於ては、その点に就ての検討は行はれてゐるが、取り扱つてゐるねぢ面は直線を母線とするものに限られてゐる。

著者は特殊形状を有する日立スクリッポンプ用ねぢに対するフライス輪郭を求めに際し、全く任意の形状を有するねぢに対するフライス輪郭計算の基礎式を誘導し得たので茲にこれを報告する次第である。

2. ねぢ軸とフライス軸との関係角

ねぢ底における隅を完全に切削するためには、ねぢ軸とフライス軸とのなす角を適當に定めなければならない。この角を任意に定めたのでは、ねぢ底に隅肉を残すことになる。

第 1 図に示す如きねぢの隅 A, B を完全に切削するための条件を求めないのであるが、A における螺旋曲線を取り出して示せば第 2 図の如くなり、その方程式は次の如く表はされる。

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho_1 \cos \varphi \\ Y &= \rho_1 \sin \varphi \\ Z &= a\varphi + \zeta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

但し a は h をねぢのリードとすれば

$$a = h/2\pi$$

次に X 軸を回轉軸として座標軸を第 2 図に示す如く θ だけ回轉させて得る新座標軸を x, y, z とし、旧軸に対する方向余弦を夫々 (l_1, m_1, n_1) , (l_2, m_2, n_2) 及び (l_3, m_3, n_3) とすれば、新旧両座標の間には

$$x = l_1 X + m_1 Y + n_1 Z$$

$$y = l_2 X + m_2 Y + n_2 Z$$

$$z = l_3 X + m_3 Y + n_3 Z$$

なる関係が成立する。但し各方向余弦の値は第 2 図より明らかなる如く

$$l_1 = 1$$

$$l_2 = 0$$

$$l_3 = 0$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = \cos \theta$$

$$m_3 = \sin \theta$$

$$n_1 = 0$$

$$n_2 = -\sin \theta$$

$$n_3 = \cos \theta$$

なるを以つて、これ等の値を上式に代入し、更に X, Y, Z に (1) 式の値を入れれば

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_1 \cos \varphi \\ y &= \rho_1 \sin \varphi \cos \theta - (a\varphi + \zeta_1) \sin \theta \\ z &= \rho_1 \sin \varphi \sin \theta + (a\varphi + \zeta_1) \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となる。この式は新座標軸に対する螺旋曲線の方程式である。この空間曲線を $Y-Z$ 面及び $z-x$ 面へ投影して得られる平面曲線の方程式は夫々 (1) 式及び (2) 式より

$$\left. \begin{aligned} Y &= \rho_1 \sin \varphi \\ Z &= a\varphi + \zeta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1')$$

$$\text{及び } \left. \begin{aligned} x &= \rho_1 \cos \varphi \\ z &= \rho_1 \sin \varphi \sin \theta + (a\varphi + \zeta_1) \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2')$$

となる。これ等の曲線は第 3 図に示される。

第 1 図

第 2 図

第 3 図

今 x 軸上に於て $x=k$ の距離に在る点 Q を通り、 y 軸に平行なる直線をフライス軸とし、これに半径 r にして厚さの極めて小なるフライスを取り付け、これを回轉させ乍ら

[昭和 17 年 11 月]

(1) Solution of Milling Cutter Profile for Screw Thread.
(2) Takesi KOBORI, Member, Kameari Works Hitachi Ltd. 日立製作所亀有工場。
(3) 精密機械, 3 卷 66 号 65 頁 (昭 14-3).
(4) 機械学会論文集, 3 卷 12 号 268 頁 (昭 12-8).

ねぢにも回轉運動と同時にリードに相當する送り運動を與へて、半径 ρ_1 の円筒面上に (1) 式若しくは (2) 式に依て表はされる螺旋曲線を画かすものとする。

このフライス円周を $z-x$ 面へ投影すれば円となり、その方程式は

$$(x-k)^2 + z^2 = r^2 \quad (3)$$

となる。この円は (2') 式の表はす曲線と互に相切することゝ必要とする。この切点を P とする。又フライス円周を $Y-Z$ 面へ投影すれば直線となり、この直線は点 P の投影点 P' に於て (1') 式の表はす曲線と互に相切しなければならない。

(1') 式の表はす曲線の任意の点における傾斜は

$$\frac{dY}{dZ} = \frac{\rho_1 \cos \varphi}{a}$$

にして、 P' 点に於てはこの値は $\tan \theta$ に等しくなければならない。即ち

$$\frac{\rho_1 \cos \varphi}{a} = \tan \theta$$

或は $\rho_1 \cos \varphi = a \tan \theta \quad (4)$

次に (2') 式の表はす曲線の任意の点における傾斜は

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-\rho_1 \sin \varphi}{\rho_1 \cos \varphi \sin \theta + a \cos \theta}$$

にして、又 (3) 式の表はす円の任意の点における傾斜は

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-z}{x-k}$$

となる。両曲線の切点 P に於ては、上の dx/dz の二つの値は等しくなければならない。即ち

$$\frac{z}{x-k} = \frac{\rho_1 \sin \varphi}{\rho_1 \cos \varphi \sin \theta + a \cos \theta} \quad (5)$$

茲に於て (2') の 2 式及び (4), (5) の式を聯立方程式として θ を解き出せば、その余角がねぢ軸とフライス軸とのなすべき角である。

實際問題としてこれ等の方程式を解くことは非常に厄介であるが、予め θ の値を仮定して (4) 式より φ の値を求め、これ等の値を (2') 式に代入して x, z の値を算出する。次にこれ等 θ, φ, x 及び z の値を (5) 式に代入し、左右両辺の値が等しくなるか否かを検し、等しくなるまで θ の値を仮定し直して行けばよい。

3. ねぢ底円筒部切削輪郭

第 4 図に示す如く、原点より y 軸の負の方向に δ の距離に在りて、 y 軸に垂直なる平面 EF にてねぢ底円筒部を切断する時に生ずる曲線は明らかに楕円にして、次式に依て表はされる。

$$\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{(z-\delta \cot \theta)^2}{\rho_1^2 \operatorname{cosec}^2 \theta} = 1 \quad (6)$$

次に前節と同様に x 軸上に於て $x=k$ の距離に在る点 Q を通り、 y 軸に平行なる直線をフライス軸とし、これに取り付けたフライスを以て円筒面を切削するものとし、フライス第 8 巻 第 33 号 (第 4 部)]

第 4 図

を EF 面に依て切断せる部分の半径を r とすれば、この円はやはり (3) 式に依て表はされる。而してこの円は (6) 式の表はす楕円に切することを要する。

(3) 式の表はす円の任意の点における傾斜は前に求めたうに

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-z}{x-k}$$

にして、又 (6) 式の表はす楕円の任意の点における傾斜は

$$\frac{dx}{dz} = \frac{z-\delta \cot \theta}{x \operatorname{cosec}^2 \theta}$$

となる。両曲線が互に切するためには、その切点に於て上の dx/dz の二つの値は等しくなければならない。即ち

$$\frac{z}{x-k} = \frac{z-\delta \cot \theta}{x \operatorname{cosec}^2 \theta} \quad (7)$$

茲に於て δ の値を與へれば、(6), (7) 両式より x, z の値を求め、これ等の値を (3) 式に代入して、その部分のフライスの半径 r を求めることができる。 δ の種々の値に対応して r を求めれば、ねぢ底円筒部に対するフライス輪郭が定まる。

(6), (7) の両式より x, z を解き出すに當つては、途中四次方程式が現はれてこれ亦非常に厄介である。實際問題としては、 x 若しくは z の値を仮定して (7) 式に依り他方を求め、これ等の値が (6) 式を満足する如く x, z の値を探し出すのが却て便利である。

δ に與ふべき最大値 δ' は、第 3 図に於て Y, Z 軸に対する P' 点の座標を (Y', Z') とすれば次式にて與へられる。

$$\delta' = Z' \sin \theta - Y' \cos \theta \quad (8)$$

4. ねぢ面切削輪郭

第 5 図に示す如く原点より y 軸の負の方向に ε の距離に在りて、 y 軸に垂直なる平面 GH にてねぢ面を切断する時に生ずる曲線の方程式を求めるためには、ねぢ面の形状が與へられなければならない。

今第 5 図に示す如くねぢ面を $Z-X$ 面に於て切断する時に生ずる曲線 AC の方程式を一般的に

$$\zeta = f(\rho) \quad (9)$$

第 6 図

依て

$$\frac{d\zeta}{d\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{48^2 - \rho^2}}$$

となる。

(1) ねち軸とフライス軸とのなす角 ねち軸とフライス軸との距離を $k=65\text{ mm}$ として置く。

$\theta = 66.97^\circ$ と仮定すれば

$$\tan \theta = 2.3524270$$

$$\sin \theta = 0.92030014$$

$$\cos \theta = 0.39121305$$

依て (4) 式より

$$\cos \varphi = \frac{7.6394 \times 2.3524217}{18} = 0.99839616$$

これより φ の値を求めれば正負の値が得られるが、第 3 図より負とすべきことを知るを以つて

$$\varphi = -3.2455^\circ \text{ 或は } -0.0566446 \text{ rad}$$

$$\sin \varphi = -\sqrt{1 - 0.99839616^2} = -0.0566137$$

依て (2') 式より

$$x = 18 \times 0.99839616 = 17.971 \text{ mm}$$

$$z = 18 \times (-0.0566137) \times 0.92030014$$

$$+ (-7.6394 \times 0.0566446 + 9) \times 0.39121305$$

$$= 2.4138 \text{ mm}$$

以上の値を用ひて (5) 式の両辺を計算すれば

$$\text{右辺} = -0.052185$$

$$\text{左辺} = -0.051326$$

となり、両辺の値は大体一致してゐるが、更に θ の値を仮定し直して両辺の値を接近させることができる。併し k の値は多少変更することは差支へないから、左辺の値が右辺の値に等しくなる様に k の値を定めれば

$$\frac{2.4138}{17.971 - k} = -0.052185$$

$$k = \frac{2.4138}{0.052185} + 17.971 = 64.226 \text{ mm}$$

即ち $k = 64.226 \text{ mm}$ と取れば、 $\theta = 66.97^\circ$ と定めることができる。依てねち軸とフライス軸とのなすべき角は 23.03° となる。

(2) ねち底円筒部切削輪郭 $\theta = 66.97^\circ$ なるを以つて

$$\cot \theta = 0.42509289, \quad \operatorname{cosec} \theta = 1.08660203$$

先づ $\delta = 0$ とすれば (6), (7) 両式は夫々次の如くなる。

第 8 巻 第 33 号 (第 4 部)]

$$x^2 + \frac{z^2}{1.08660203^2} = 18^2 \dots\dots\dots (i)$$

$$\frac{z}{x - 64.226} = \frac{z}{1.08660203^2 x} \dots\dots\dots (ii)$$

(ii) より $z = 0$

或は $x - 64.226 = 1.08660203^2 x$

$$x = -355.42 \text{ mm}$$

然るに x の負の値は実際に適しないから $z = 0$ のみを取る。

依て (i) より

$$x = 18 \text{ mm}$$

従て (3) 式より

$$r^2 = (18 - 64.226)^2$$

$$r = 46.226 \text{ mm}$$

次に第 3 図における P' 点の座標 Y' , Z' は (1') 式に先に得た φ の値を代入して

$$Y' = -18 \times 0.0566137 = -1.019 \text{ mm}$$

$$Z' = -7.6394 \times 0.0566446 + 9 = 8.567 \text{ mm}$$

(8) 式より

$$\delta' = 8.567 \times 0.92030014 - (-1.019) \times 0.39121305 = 8.283 \text{ mm}$$

$\delta = \delta'$ におけるフライス半径 r は、先に θ の値を求める時に得てゐる x , z の値を用ひ (3) 式より

$$r^2 = (17.971 - 64.226)^2 + 2.4138^2$$

$$r = 46.318 \text{ mm}$$

次に一例として $\delta = 4 \text{ mm}$ とすれば (6), (7) 両式は夫々次の如くなる。

$$x^2 + \frac{(z - 4 \times 0.42509289)^2}{1.08660203^2} = 18^2 \dots\dots\dots (iii)$$

$$\frac{z}{x - 64.226} = \frac{z - 4 \times 0.42509289}{1.08660203^2 x} \dots\dots\dots (iv)$$

$z = 1.165 \text{ mm}$ と仮定すれば、(iii) より $x = 17.993 \text{ mm}$ を得る。これ等の値を用ひて (iv) の両辺を計算すれば

$$\text{左辺} = -0.025198, \quad \text{右辺} = -0.025201$$

となり、両辺の値は可なりよく一致してゐるから、 x , z の値を上のように定め、(3) 式より

$$r^2 = (17.993 - 64.226)^2 + 1.165^2$$

$$r = 46.248 \text{ mm}$$

(3) ねち面切削輪郭 ε に種々の値を與へてそれに対応する r の値を求めればよいのであるが、 ε の最小値は δ' にして、この値に対しては已に求めた如く $r = 46.318 \text{ mm}$ である。次に一例として $\varepsilon = 11 \text{ mm}$ に対する r の値を計算して見る。

$\varepsilon = 11 \text{ mm}$ とすれば (12) 式の第 2 式は

$$-11 = \rho \sin \varphi \cos \theta - (a\varphi + 53.497 - \sqrt{48^2 - \rho^2}) \sin \theta$$

となる。

今 $\varphi = 2.15^\circ (= 0.03752455 \text{ rad})$ と仮定すれば

$$\sin \varphi = 0.037\ 515\ 77, \quad \cos \varphi = 0.999\ 296\ 04$$

なるを以つて上式に代入し整理すれば

$$\rho^2 - 2 \times 0.666\ 938\ 88 \rho - 554.022\ 936\ 88 = 0$$

これを解きて $\rho = 24.214\ \text{mm}$

$$\text{依て} \quad \zeta = 53.497 - \sqrt{48^2 - 24.214^2} = 12.052\ \text{mm}$$

故に (12) 式の第 1 式及び第 2 式から夫々

$$x = 24.214 \times 0.999\ 296\ 04 = 24.197\ \text{mm}$$

$$\begin{aligned} z &= 24.214 \times 0.037\ 515\ 77 \times 0.920\ 300\ 4 \\ &\quad + (7.639\ 4 \times 0.037\ 524\ 55 + 12.052) \times 0.391\ 213\ 05 \\ &= 5.663\ 1\ \text{mm} \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \frac{d\zeta}{d\rho} \rho = \frac{24.214^2}{\sqrt{48^2 - 24.214^2}} = 14.146\ 912 \text{ なるを以つて、}$$

(13) 式の両辺の値を求めれば

$$\text{左辺} = -0.141\ 475, \quad \text{右辺} = -0.141\ 427$$

となり、両辺の値は大體一致してゐるから、 x, z の値を上
の如く取れば、フライス半径 r は

$$r^2 = (24.197 - 64.226)^2 + 5.663\ 1^2$$

$$r = 40.428\ \text{mm}$$

ε の値は何処まで取ればよいと言ふに、丁度 $\rho = 30\ \text{mm}$
になる如き値まで取ればよい。今 $\rho = 30\ \text{mm}$ と定めれば

$$\zeta = 53.497 - \sqrt{48^2 - 30^2} = 16.027\ \text{mm}$$

となるを以つて (12) 式の第 2 式は

$$-\varepsilon = 30 \sin \varphi \cos \theta - (a\varphi + 16.027) \sin \theta$$

となる。

今 $\varphi = 0.42^\circ (= 0.007\ 330\ 38\ \text{rad})$ と假定すれば

$$\sin \varphi = 0.007\ 330\ 32, \quad \cos \varphi = 0.999\ 973\ 13$$

となるを以つて上式より ε を求めれば

$$\varepsilon = 14.715\ \text{mm}$$

となる。更に (12) 式の第 1 式及び第 3 式より x, z を求
めれば

$$x = 29.999\ \text{mm}, \quad z = 6.494\ \text{mm}$$

なるを以つて、これ等の値を用ひて (13) 式の両辺を計算す
れば

第 7 図

第 1 表

θ 或は ε mm	r mm
0	46.226
4	46.248
8.283	46.318
11	40.428
14.715	34.838

なればよい。但し茲にはその計算例は省略する。

6. 結 言

以上ねぢをフライス削りする時に、ねぢ軸とフライス軸と
のなすべき角、並にフライス輪郭を求める一般式を導いたの
であるが、これ等の式に依り輪郭全部を計算することは、上
の計算例に見るも明らかなる如く非常に繁雜なるを以つて、
実際問題としては図式に依りて求め、然る後二三の点に就き
計算に依り檢するのが便利である。

尙 $\zeta = f(\rho)$ なる函数の形に依りてはフライス削りが不可
能の場合もあり得るのであるが、この問題を一般的に論ずる
ことは困難である。但し個々の問題に対しては切削可能なる
か否かを吟味することは難事ではない。

(昭和 17 年 9 月 10 日受付)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= -0.189\ 719, \\ \text{右辺} &= -0.189\ 630 \end{aligned}$$

となり、大體一致してゐるから
 $\varepsilon = 14.715\ \text{mm}$ と定めることが
できる。この時のフライス半径
 r は

$$r^2 = (29.999 - 64.226)^2 + 6.494^2$$

$$r = 34.838\ \text{mm}$$

以上求めた結果を表示すれば
第 1 表の如く、これを図示すべ
ば第 7 図の如くなる。本例に於
ては曲線の途中は各 1 点のみし

か計算をしてゐないが、実際に於ては数
点に対して計算をする必要がある。

尙フライスとねぢ面とをフライス軸に
直角な平面にて切断する時の各々の切口
の曲線は 1 点に於て切する外は、決して
他の点で交つてはならない。これがため
にはねぢ面の切口曲線上の任意の点とフ
ライス軸との距離 r' を求め、これとフ
ライス半径 r とを比較して常に $r' \geq r$