組合繰返應力を受ける金属材料の破壊法則⁽¹⁾

(昭和17年10月18日 浜松臨時大会講演會に於て講演)

正員 西原利夫⁽²⁾ 正員 河本 實⁽³⁾

摘 要

可鍛性材料に対する松村博士の破損説即ち「可鍛性材料に於ては最大剪断應力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき弾性的破損を起す」といふ考へは延性の大きな材料に関する限り実験結果に非常に良く當嵌まるものである。併し、脆性材料に対しては當嵌まらない。よつて著者は次の如き考へ方を提案致し度い。即ち延性の大きな材料に対しては松村博士の説をそのまま用ひるが、脆性材料及び延性の比較的乏しい材料に対しては松村博士の説に於て最大剪断應力の代りに最大主應力を以て置き代へる。且これを繰返應力の場合に當嵌めて「延性の大きな材料に於ては繰返應力による最大剪断應力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき疲労破壊を起し、脆性材料及び延性の比較的乏しい材料に於ては繰返應力による最大主應力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき疲労破壊を起す」と考へる。而してこの考へ方より出発して種々の組合應力状態における疲労強さを表すべき条件式を導き、これが従来の実験結果と良く一致することを知つた。

1. 緒 言

金属材料の破壊には静應力による破壊と繰返應力による破壊所謂疲労破壊とがあり、両者はその破壊機構が一見全く異なる。静應力により破壊する場合は破壊以前に一般に著しい変形を生ずる。従て実際上は材料の弾性が破壊されるとき、即ち結晶内にひびきが生じ初めるときを以て静應力に対する強さとすべきであらう。併しそれは測定が困難であるから、簡単に降伏点を以て静應力に対する強さと看做することが出来る。全く同様なことがら疲労破壊のときも存在する。即ち材料が繰返應力により破壊する場合、破壊以前に加工効果に似た現象を生じ材料が脆化する。そのとき結晶内にやはりひびきが生じてゐる。このひびきが漸次発達して裂目となり終に破壊を起す。従て眞の意味から云へば結晶内にひびきが生じ初めるときを以て繰返應力に対する強さとすべきであらう。併しそれは求めることが困難であるから、実際上は簡単に繰返應力により裂目即ち破壊が起る限度を以て疲労強さと看做される。若しひびきが生じ初めるときを以て疲労強さと看做すならば、それは実際に云ふ疲労強さよりも或程度低くなる筈である⁽⁴⁾。かく強さの限度をひびきが生じ初めるか否かに帰するならば、全く異なる機構によると思はれる静應力による破壊と繰返應力による破壊との間にも或共通点の存在する事が首肯される。

著者は既に種々の金属材料につき組合曲げ振り疲労試験を

行ひ、それらの結果を従来からある静應力によつて破損する場合の種々の破損説をそのまま疲労の場合に適用して得られる結果と比較した⁽⁵⁾。垂直應力 σ と剪断應力 τ とを組合はせた場合の静應力に対する破損説は一般に、

$$f(\sigma, \tau) = c \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表はされる。 c は常数であり、 f は σ 及び τ の函数で各破損説によつて異なる。例へばボアソン常数を m とすれば、

$$\text{最大主應力説にては} \quad f = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\text{最大剪断應力説にては} \quad f = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

最大主歪説にては

$$f = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\sigma + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

剪断歪エネルギー説にては $f = \sigma^2 + 3\tau^2$

$$\text{歪エネルギー説にては} \quad f = \sigma^2 + 2\left(1 + \frac{1}{m}\right)\tau^2$$

これらの各説を疲労の場合に適用する。即ち今 σ 及び τ を正負等大値間に変動する繰返應力とし、(1) 式に依つて

$$f(\sigma, \tau) = c' \quad \dots\dots\dots (2)$$

とする。 c' は一般に c とは異なる常数で疲労試験結果に依り定めらるべきものである。静應力に依て破損する場合 (1) 式に於て f の値として最大主應力を取ればこれは脆性材料に対して相當良く當嵌まり、又最大剪断應力を取れば延性材料に対して大体當嵌まるといふことは良く知られてゐることであるが、疲労破壊の場合にも (2) 式に於て f の値として

(1) A Criterion for Fatigue Strength of Metals under Combined Stresses. (2) Toshio NISHIHARA, Member. The Kyōto Imperial University. (3) Minoru KAWAMOTO, Member. The Kyōto Imperial University. 京都帝国大学。 (4) 例へば、西原利夫、河本實、機械学会論文集、腐蝕法に依る疲労部分の検出、5巻20号1-43頁(昭和14-8)参照。

(5) 京都帝国大学工学部紀要、Vol. X, No. 6, (1941), 117頁。

最大主應力を取れば脆性材料に、最大剪断應力を取れば延性材料に大体當嵌まるものである。従て静破壊といふも疲労破壊といふもその根本に於ては全く同じであると看做すことが出来よう。

上述の各破損説に於てはその説を表すべき式の中に材料の性質によつて変化すべき量を全然含んでゐない。即ち脆性材料たると延性材料たるとの如何を問はず、又脆性の程度及び延性の程度の如何を問はず、總ての材料に就き一つの式を以てその強さの限度を表はさんとしたものでこの点に非常な無理が存在する。従てこれらの破損説は何れも或材料には比較的良く當嵌まつても他の材料には一般に當嵌まらないのが普通である。従て破損説を表すべき式の中に材料の性質によつて変化すべき量を導入し、その量の選び方によつて延性材料にも又脆性材料にも當嵌まる如くすることが適切であらう。こういう方法に従つた破損説の中主なるものに就き考へて見よう。

1. 松村博士の説⁽⁶⁾ この説に依れば弾性破損の条件は次の式

$$k\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = c \quad \dots\dots\dots(3)$$

にて表はされる。 k は材料の性質によつて変化すべき常数で実験によつて定められるものである。(3) 式にて $k=1$ とすれば最大主應力説と同一となり、 $k=0$ とすれば最大剪断應力説と同一となる。即ちこの説は最大主應力説と最大剪断應力説との両極端のものを組合はせた説といふことが出来よう。今垂直應力のみが作用するときの弾性限度を σ_e とし、剪断應力のみが作用する場合の弾性限度を τ_e とし、常数 k 及び c を決定すれば

$$\left(1 - \frac{\sigma_e}{2\tau_e}\right)\sigma + \frac{\sigma_e}{2\tau_e}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_e \quad \dots\dots\dots(4)$$

2. Mohr の説⁽⁷⁾ この説は Mohr の應力図に於て種種の異なる應力状態に対して夫々主要円を画いてその包絡線を以て材料の強さの極限とするものである。併し箇々の材料

第 1 図

につき数多の実験をしなければこの包絡線が求められないものとすれば、この説の價值は実用上半減せしめられるであらう。そこで Mohr は第 1 図の如く單純引張及び單純圧縮が作用するときの二つの主要円に対する共通切線を以て近似包

絡線とすることを提案した。この破損説を垂直應力 σ と剪断應力 τ とを組合はせた場合に適用して見よう。今圧縮應力のみが作用するときの弾性限度を σ_e とすれば、この包絡線によつて表はされる強さの限度を表すべき条件式は

$$\frac{\sigma_e - \sigma_e}{\sigma_e + \sigma_e}\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{2\sigma_e}{\sigma_e + \sigma_e} \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。(5) 式にて $\sigma_e = \sigma_c$ とすれば最大剪断應力説となり、 $\sigma_e = \infty$ とすれば最大主應力説となり、 $\sigma_e/\sigma_c = m$ とすれば最大主歪説となる。即ちこれらの説は何れも Mohr の説の特殊な場合としてその中に包含される。

3. 小野博士の説 小野博士は Mohr の説に於て第 2 図の如く單純引張及び單純圧縮に対する主要円と單純剪りに対する主要円との共通切線 AB 及び CD を以て近似包絡線と看做すことを提案された⁽⁸⁾。これに依れば今單純剪りに対する弾性限度を τ_e とすれば

AB に対して

$$\left(1 - \frac{\sigma_e}{2\tau_e}\right)\sigma + \frac{\sigma_e}{2\tau_e}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_e \quad \dots\dots\dots(6)$$

CD に対して

$$\left(\frac{\sigma_e}{2\tau_e} - 1\right)\sigma + \frac{\sigma_e}{2\tau_e}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = -\sigma_e \quad \dots\dots\dots(7)$$

にて破損の条件が與へられる。(6) 式は (4) 式と全く同一である。即ち Mohr の説にて小野博士の近似包絡線を取れば松村博士の説と同一となる。

尙小野博士は Mohr の説を基礎として組合應力による疲労破壊条件を導いてをられる⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

第 2 図

4. 延性材料に対する Bailey の説⁽¹¹⁾ Bailey は延性材料の降伏条件として次の如き式を唱へた。即ち材料の表面における主應力を $\sigma_1, \sigma_2 (=0), \sigma_3$ とすれば

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \lambda(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \lambda(\sigma_2 - \sigma_3)^2 = \mu \quad \dots\dots\dots(8)$$

但し λ 及び μ は常数である。これを垂直應力 σ と剪断應力 τ とを組合はせた場合に適用すると

$$\sigma^2 + 2\frac{2+\lambda}{1+\lambda}\tau^2 = \mu \quad \dots\dots\dots(9)$$

となる。この説に於て $\lambda=0$ とすれば最大剪断應力説となり、

(8) 機械学会誌、16 卷 29 号 37 頁 (1912)。

(9) 機械学会論文、

6 卷 25 号 1-30 頁 (昭 15-11)。

(10) 機械学会論文、7 卷 29 号

1-7 頁 (昭 16-11)。

(11) Inst. of Mech. Eng. Proc., 143, 2,

(1940), 101.

(6) 機械学会誌、13 卷 23 号 1 頁 (明 43-9)。

(7) V.D.I., Bd.

XXXXIV, Nr. 45, (1900), 1324 頁。

$\lambda=1$ とすれば剪断歪エネルギー説となり、 $\lambda=m-1$ とすれば歪エネルギー説となる。尚 Bailey は (9) 式の条件より延性材料の組合せ応力による疲労の場合に就ても論じてゐる。

5. 可鍛性材料に対する松村博士の説⁽¹²⁾ この説は「可鍛性材料に於ては最大剪断応力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき弾性的破損を起す」といふのである。変容とは剪断歪エネルギーのことである。従て主応力をその大きさの順に $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とすればこの説は次の式によつて表はされる。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = a - b[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \dots (10)$$

a 及び b は材料及び応力の分布状態による常数で実験より定めるべきものである。(10) 式を垂直応力 σ と剪断応力 τ とを組合はせた場合に適用すると

$$\sigma^2 + 2\frac{3b+2}{2b+1}\tau^2 = \frac{a}{2b+1} \dots (11)$$

となる。この説に於て $b=0$ とすれば最大剪断応力説となり、 $b=\infty$ とすれば剪断歪エネルギー説となり、 $b=-\frac{m-1}{m-2}$ とすれば歪エネルギー説となる。

2. 静応力に対する破損法則

Bailey の説及び可鍛性材料に対する松村博士の説は (9) 及び (11) 式より明らかなる如く、何れも垂直応力 σ 及び剪断応力 τ に関する楕円法則である。而してこの楕円法則なるものは延性の大きな材料に関する限り非常に良く実験の結果に當嵌まるものである。併し脆性材料に対しては全然當嵌まらない。著者の行つた疲労試験の結果によれば脆性材料のみならず可鍛性材料でも硬鋼の如く比較的延性の乏しい材料に対しては又當嵌まらない。

依て著者は次の如き考へ方を提案致し度いのである。即ち延性の大きな材料に対しては松村博士の説をそのまま用ひるが、脆性材料及び延性の比較的乏しい材料に対しては松村博士の説に於て最大剪断応力の代りに最大主応力を以て置き代へて、「延性の大きな材料に於ては最大剪断応力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき弾性的破損を起し、脆性材料或は延性の比較的乏しい材料に於ては最大主応力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき弾性的破損を起す」と考へる。この考へに従て弾性破損の条件を式で表はせば次の如くなる。即ち

延性材料では

$$\xi(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = p \dots (12)$$

脆性材料では

$$\eta\sigma_1^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = q \dots (13)$$

但し ξ, η, p 及び q は材料及び応力状態等によつて定まる常数で実験により定めるべきものである。

今垂直応力 σ と剪断応力 τ とを組合はせた場合を考へると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

これを (12) 及び (13) 式に代入すると

延性材料では

$$(\xi+2)\sigma^2 + 2(2\xi+3)\tau^2 = p \dots (15)$$

脆性材料では

$$\eta\left[\sigma\left\{\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right\} + \tau^2\right] + 2(\sigma^2 + 3\tau^2) = q \dots (16)$$

次に ξ, η, p 及び q なる常数を決定しよう。今垂直応力のみが作用するときの弾性限度を σ_e とすれば、(15) 及び (16) 式より

$$p = (\xi+2)\sigma_e^2 \dots (17)$$

$$q = (\eta+2)\sigma_e^2 \dots (18)$$

剪断応力のみが作用するときの弾性限度を τ_e とすれば、同様に

$$p = 2(2\xi+3)\tau_e^2 \dots (19)$$

$$q = (\eta+\sigma)\tau_e^2 \dots (20)$$

(17) と (19) 式及び (18) と (20) 式より p 及び q を消去し、且

$$\psi = \frac{\tau_e}{\sigma_e} \dots (21)$$

と置けば、延性材料に対しては

$$\psi^2 = \frac{\xi+2}{2(2\xi+3)} \quad \text{或は} \quad \xi = 2\frac{1-3\psi^2}{4\psi^2-1} \dots (22)$$

脆性材料に対しては

$$\psi^2 = \frac{\eta+2}{\eta+6} \quad \text{或は} \quad \eta = 2\frac{3\psi^2-1}{1-\psi^2} \dots (23)$$

となる。さて如何なるとき延性材料に対する式を用ひ、又如何なるとき脆性材料に対する式を用ふべきかを考へるに、 ξ 及び η は常に零或は零より大なるべきにより (22) 及び (23) 式より次の関係あることを知る。即ち

$$\text{延性材料に於ては} \quad \psi \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{脆性材料に於ては} \quad \psi \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

従て逆に $\psi \leq 1/\sqrt{3}$ なるときは延性材料に対する式 (15) を用ひ、 $\psi \geq 1/\sqrt{3}$ なるときは脆性材料に対する式 (16) を用ひればよい。 $\psi = 1/\sqrt{3}$ なるときは両式は同一となる故何れを用ひても良いが (15) 式の方が簡単である。

結局この説は簡単のために

$$U = \xi(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \dots (24)$$

$$V = \eta\sigma_1^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \dots (25)$$

と置けば、函数 U 或は V の大きさが材料の静的破損を左右することになり

(12) 機械学会誌、33 巻 156 号 181 頁 (附 5-4)。

延性材料(或は $\psi \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$) ならば $U=p$ (26)

脆性材料(或は $\psi > \frac{1}{\sqrt{3}}$) ならば $V=q$ (27)

によつて破損条件が定まる。

尚静應力に対する破損条件式に就ては、第5節に於て後述する。

3. 繰返應力に対する破壊法則

前節に述べた著者の破損法則を繰返應力の場合に適用する。即ち「延性の大きな材料に於ては繰返應力による最大剪断應力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき疲労破壊を起し、脆性材料及び延性の比較的乏しい材料に於ては繰返應力による最大主應力が変容の程度によつて変化する定数値に達するとき疲労破壊を起す」と考へる。従て今前節の(24)及び(25)式に於て σ_1 , σ_2 及び σ_3 を或範囲内に変動する主應力の最大値を表はしてゐるものとすれば、これらの式に依て表はされてゐる函数 U 或は V の大きさが疲労破壊の起るか否かに影響を與へるといふことになる。但し茲に常数 ξ 及び η は静應力の場合も繰返應力の場合も仮りに同じ値を取るものとして置くが、この仮定が不當でないことに就ては後述する。かく U 或は V の大きさが疲労破壊の起否に影響を與へるのであるが、單にそれらの大きさのみが疲労破壊の起否を決定するとは考へられない。何となれば上述の如く σ_1 , σ_2 及び σ_3 は一般に或最大値と最小値との間を変動する應力の最大値であるが、疲労破壊の起否は單にその最大値のみならずその変動する範囲の如何によつても亦影響を受けるからである。そこで今変動する應力を二つの成分に分けて考へる。即ち一つは変動せず静的に作用する平均應力で他は正負等大値間に変動する應力振幅である。そこで主應力 σ_1 , σ_2 , σ_3 の中静的に作用する成分を σ_{1m} , σ_{2m} , σ_{3m} とし、正負等大値間に変動する成分を σ_{1a} , σ_{2a} , σ_{3a} とすれば

$$\sigma_1 = \sigma_{1m} + \sigma_{1a}, \quad \sigma_2 = \sigma_{2m} + \sigma_{2a}, \quad \sigma_3 = \sigma_{3m} + \sigma_{3a}$$

そこで今(24)及び(25)式に倣つて次の如く置く。

$$U_m = \xi(\sigma_{1m} - \sigma_{3m})^2 + [(\sigma_{1m} - \sigma_{2m})^2 + (\sigma_{2m} - \sigma_{3m})^2 + (\sigma_{3m} - \sigma_{1m})^2] \dots (28)$$

$$U_a = \xi(\sigma_{1a} - \sigma_{3a})^2 + [(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{3a} - \sigma_{1a})^2] \dots (29)$$

$$V_m = \eta \sigma_{1m}^2 + [(\sigma_{1m} - \sigma_{2m})^2 + (\sigma_{2m} - \sigma_{3m})^2 + (\sigma_{3m} - \sigma_{1m})^2] \dots (30)$$

$$V_a = \eta \sigma_{1a}^2 + [(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{3a} - \sigma_{1a})^2] \dots (31)$$

而してこの U_m 及び U_a 或は V_m 及び V_a の大きさが又疲労破壊の起否に影響を與へるものと考へる。かく考へるならば結局疲労強さは一般に次の条件式によつて表はされることとなる。即ち

$$\text{延性材料に対して} \quad U + f(U_m, U_a) = p \dots (32)$$

$$\text{脆性材料に対して} \quad V + f(V_m, V_a) = q \dots (33)$$

(32) 及び (33) 式に於て左辺第2項は應力が繰返應力なるための影響を表はすもので一般に U_m 及び U_a 或は V_m

及び V_a の函数である。若しこの項を除去するならば前節の(26)及び(27)式と全く同一となり静應力の場合の破損条件となる。然らばこの函数 f の形は如何に定むべきかと云ふに、これは結局実験結果に合ふ様に定めらるべきであらう。計算の簡単のために今次の如き形を採用することとする。

$$f(U_m, U_a) = -\alpha U_m + \beta U_a - \gamma \sqrt{U_m \cdot U_a} \dots (34)$$

$$f(V_m, V_a) = -\alpha V_m + \beta V_a - \gamma \sqrt{V_m \cdot V_a} \dots (35)$$

但し α , β 及び γ は常数にして実験結果より決定さるべきものである。尚符号は後の便宜のため上の如く選んでおく。

(34) 及び (35) 式を (32) 及び (33) 式に代入すれば

延性材料に対して

$$U - \alpha U_m + \beta U_a - \gamma \sqrt{U_m \cdot U_a} = p \dots (36)$$

脆性材料に対して

$$V - \alpha V_m + \beta V_a - \gamma \sqrt{V_m \cdot V_a} = q \dots (37)$$

これが繰返應力の場合の破壊条件を表はす関係式である。

U , V , U_m , U_a , V_m 及び V_a は一般に (24), (25), (28), (29), (30) 及び (31) 式にて與へられるが、今これを垂直應力と剪断應力とを組合はせた場合に當嵌めて見よう。垂直應力の最大値を σ としその静的に作用する成分を σ_m , 変動する成分を σ_a とする。同様に剪断應力の最大値を τ としその静及び変動する成分を各 τ_m 及び τ_a とすると

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a, \quad \tau = \tau_m + \tau_a$$

従て(14)式と同様に

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_m + \sigma_a) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 4(\tau_m + \tau_a)^2} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_m + \sigma_a) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 4(\tau_m + \tau_a)^2} \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1m} &= \frac{1}{2}\sigma_m + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_m^2 + 4\tau_m^2} \\ \sigma_{2m} &= 0 \\ \sigma_{3m} &= \frac{1}{2}\sigma_m - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_m^2 + 4\tau_m^2} \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1a} &= \frac{1}{2}\sigma_a + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2} \\ \sigma_{2a} &= 0 \\ \sigma_{3a} &= \frac{1}{2}\sigma_a - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2} \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

(38), (39) 及び (40) 式を (24), (25), (28), (29), (30) 及び (31) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} U &= (\xi + 2)(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 2(2\xi + 3)(\tau_m + \tau_a)^2 \\ U_m &= (\xi + 2)\sigma_m^2 + 2(2\xi + 3)\tau_m^2 \\ U_a &= (\xi + 2)\sigma_a^2 + 2(2\xi + 3)\tau_a^2 \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= \eta \left[(\sigma_m + \sigma_a) \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_m + \sigma_a) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 4(\tau_m + \tau_a)^2} \right\} + (\tau_m + \tau_a)^2 \right] \\ &\quad + 2\{(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 3(\tau_m + \tau_a)^2\} \\ V_m &= \eta \left[\sigma_m \left\{ \frac{1}{2}\sigma_m + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_m^2 + 4\tau_m^2} \right\} + \tau_m^2 \right] \\ &\quad + 2(\sigma_m^2 + 3\tau_m^2) \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

$$V_a = \eta \left[\sigma_a \left\{ \frac{1}{2} \sigma_a + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2} \right\} + \tau_a^2 \right] + 2(\sigma_a^2 + 3\tau_a^2)$$

以上で組合繰返応力を受ける場合の強さを表すべき条件が求められたのであるが、未だ常数 ξ, η 及び α, β, γ の値については未解決のまゝである。次にこれらの常数を決定しよう。

1. 常数 ξ 及び η の決定 今垂直応力のみが正負等大値間を変動する場合を考へる。これは両振引張圧縮疲労試験或は回轉曲げ試験の如き場合で、このときの耐久限度を σ_w とすれば

$$\sigma_a = \sigma_w, \quad \sigma_m = \tau_m = \tau_a = 0$$

この関係を (41) 及び (42) 式に代入すれば

$$U = U_a = (\xi + 2)\sigma_w^2, \quad U_m = 0 \\ V = V_a = (\eta + 2)\sigma_w^2, \quad V_m = 0$$

これらの値を (36) 及び (37) 式に代入すれば

$$(1 + \beta)(\xi + 2)\sigma_w^2 = p \quad (43)$$

$$(1 + \beta)(\eta + 2)\sigma_w^2 = q \quad (44)$$

次に剪断応力のみが正負等大値間を変動する場合を考へる。このときの耐久限度を τ_w とすれば

$$\tau_a = \tau_w, \quad \tau_m = \sigma_m = \sigma_a = 0$$

この関係を (41) 及び (42) 式に代入すれば

$$U = U_a = 2(2\xi + 3)\tau_w^2, \quad U_m = 0 \\ V = V_a = (\eta + 6)\tau_w^2, \quad V_m = 0$$

これらの値を (36) 及び (37) 式に代入すれば

$$2(1 + \beta)(2\xi + 3)\tau_w^2 = p \quad (45)$$

$$(1 + \beta)(\eta + 6)\tau_w^2 = q \quad (46)$$

(43) と (45) 式及び (44) と (46) 式より p, q 及び β を消去し、且

$$\varphi = \frac{\tau_w}{\sigma_w} \quad (47)$$

と置けば、延性材料に対しては

$$\varphi^2 = \frac{\xi + 2}{2(2\xi + 3)} \quad \text{或は} \quad \xi = 2 \frac{1 - 3\varphi^2}{4\varphi^2 - 1} \quad (48)$$

脆性材料に対しては

$$\varphi^2 = \frac{\eta + 2}{\eta + 6} \quad \text{或は} \quad \eta = 2 \frac{3\varphi^2 - 1}{1 - \varphi^2} \quad (49)$$

となる。さて如何なるとき延性材料に対する式を用ひ、又如何なるとき脆性材料に対する式を用ふべきかを考へるに、 ξ 及び η は常に零或は零より大なるべきにより (48) 及び (49) 式より次の関係あることを知る。即ち

$$\text{延性材料に於ては} \quad \varphi \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{脆性材料に於ては} \quad \varphi \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

従て逆に $\varphi \leq 1/\sqrt{3}$ なるときは延性材料に対する式 (36) を用ひ、 $\varphi \geq 1/\sqrt{3}$ なるときは脆性材料に対する式 (37) を用

ひればよい。 $\varphi = 1/\sqrt{3}$ なるときは両式は同一となる故何れを用ひても良いが (36) 式の方が簡單である。

本節の初めに断つた如く以上の計算に於ては繰返応力の場合の ξ 及び η と静応力の場合の ξ 及び η とを等しいと仮定して計算を進めて来たのであるが、この仮定は換言すれば (48) 及び (49) 式にて與へられる ξ 及び η と前節の (22) 及び (23) 式にて與へられる ξ 及び η とを等しいとすることである。従てこれらの式より明らかなる如く、若し

$$\varphi = \psi \quad \text{即ち} \quad \frac{\tau_w}{\sigma_w} = \frac{\tau_e}{\sigma_e} \quad (50)$$

なる関係が成立するならばこの仮定は確かに真である。然るに緒言に於て述べた如く静応力による弾性の破壊と繰返応力による疲労破壊とはその根本に於ては全く同一と考へられるのであるから、(50) 式の関係が成立すると看做することは極めて妥當なることと思はれるが、その確かなる成否は信頼すべき実験の結果に待つこととし、こゝでは仮りに (50) 式の関係が成立するものと看做して計算を進めることとする。併し仮令 (50) 式の関係が成立しないものとし、静応力の場合と繰返応力の場合とにつき別個に本論文と同様な計算を行つてもその結果は本論文の結果と大した変化のないことを断つて置く。

2. 常数 α, β 及び γ の決定 今垂直応力のみが作用し且その応力振幅 σ_a が漸次少なくなつて零となつた極限の場合を考へるに応力振幅 σ_a が無限に小さくなつても疲労破壊を起すためには平均応力 σ_m が真破断力 σ_T に等しくなければならない。即ち

$$\sigma_m = \sigma_T, \quad \sigma_a = \tau_m = \tau_a = 0$$

この関係を (41) 及び (42) 式に代入すると

$$U = U_m = (\xi + 2)\sigma_T^2, \quad U_a = 0 \\ V = V_m = (\eta + 2)\sigma_T^2, \quad V_a = 0$$

これらの値を (36) 及び (37) 式に代入すれば

$$(1 - \alpha)(\xi + 2)\sigma_T^2 = p \quad (51)$$

$$(1 - \alpha)(\eta + 2)\sigma_T^2 = q \quad (52)$$

次に剪断応力のみが作用し且その応力振幅 τ_a が漸次少なくなつて零となつた極限の場合を考へるに、この場合に疲労破壊を起すためには平均応力 τ_m が真破断力 τ_T に等しくなければならない。即ち

$$\tau_m = \tau_T, \quad \tau_a = \sigma_m = \sigma_a = 0$$

この関係を (41) 及び (42) 式に代入すると

$$U = U_m = 2(2\xi + 3)\tau_T^2, \quad U_a = 0 \\ V = V_m = (\eta + 6)\tau_T^2, \quad V_a = 0$$

これらの値を (36) 及び (37) 式に代入すれば

$$2(1 - \alpha)(2\xi + 3)\tau_T^2 = p \quad (53)$$

$$(1 - \alpha)(\eta + 6)\tau_T^2 = q \quad (54)$$

(51) 或は (52) 式に (17) 或は (18) 式の関係を代入するか、又は (53) 或は (54) 式に (19) 或は (20) 式の関係を代入し、且

$$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_T} \quad \text{或は} \quad \frac{\tau_e}{\tau_T} \quad (55)$$

と置けば、延性材料たると脆性材料たるとの如何に拘らず次の関係式が得られる

$$1-\alpha^2=v^2 \quad \text{或は} \quad \alpha=1-v^2 \quad \dots\dots\dots(56)$$

これで α の値が決定された。但し (55) 式の v の値としては垂直應力が静なる場合は前者を用ひ、剪断應力が静なる場合は後者を用ひるべきである。

次に常数 β の値を求める。それには (43) 及び (44) 式に (17) 及び (18) 式の関係代入するか、又は (45) 及び (46) 式に (19) 及び (20) 式の関係代入し、且

$$w=\frac{\sigma_e}{\sigma_w}=\frac{\tau_e}{\tau_w} \quad \dots\dots\dots(57)$$

と置けば、この場合に於ても延性材料たると脆性材料たるとの如何に拘らず次の関係式が得られる。

$$1+\beta=w^2 \quad \text{或は} \quad \beta=w^2-1 \quad \dots\dots\dots(58)$$

これで β の値が決定された。

次に常数 γ の値であるが、これは材料のみならず組合應力の種類や実験方法その他によつて変化する常数と看做す。従て γ は個々の場合の実験結果より決定する。

以上で著者の破壊法則を基礎とし組合繰返應力を受ける場合の疲労強さを求めるべき一般的な計算方法が求められた。そこで次に以上の計算方法により種々の特殊な場合の疲労強さを計算により求め、実験結果と比較して見よう。

4. 垂直應力或は剪断應力のみが或最大値と最小値との間を変動する場合

1. 垂直應力のみが或最大値と最小値との間を変動する場合
この場合は $\tau_m=\tau_a=0$ であるから、この関係を (41) 及び (42) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} U &= (\xi+2)(\sigma_m+\sigma_a)^2, & V &= (\eta+2)(\sigma_m+\sigma_a)^2 \\ U_m &= (\xi+2)\sigma_m^2, & V_m &= (\eta+2)\sigma_m^2 \\ U_a &= (\xi+2)\sigma_a^2, & V_a &= (\eta+2)\sigma_a^2 \end{aligned}$$

これらの関係を (36) 及び (37) 式に代入すれば、延性材料に対しては

$$(\xi+2)[(1-\alpha)\sigma_m^2+(2-\gamma)\sigma_m\sigma_a+(1+\beta)\sigma_a^2]=\rho$$

脆性材料に対しては

$$(\eta+2)[(1-\alpha)\sigma_m^2+(2-\gamma)\sigma_m\sigma_a+(1+\beta)\sigma_a^2]=q$$

これらの式の ρ 及び q に (17) 及び (18) 式の値を代入すると、延性材料たると脆性材料たるとの如何に拘らず次の関係式が得られる。

$$(1-\alpha)\sigma_m^2+(2-\gamma)\sigma_m\sigma_a+(1+\beta)\sigma_a^2=\sigma_e^2$$

これに (56) 及び (58) 式の α 及び β の値を代入すれば

$$v^2\sigma_m^2+(2-\gamma)\sigma_m\sigma_a+w^2\sigma_a^2=\sigma_e^2 \quad \dots\dots\dots(59)$$

常数 γ はこの場合の実験結果より定めるのであるが、今 γ を定めるべき条件としては次の実験的事実即ち「引張圧縮耐久限度線図に於て平均應力が零なるときの耐久限度を表はす点と應力が零と最大値との間を変動する場合の耐久限度を表はす点と真破断力を表はす点との 3 点は常に一直線上にあ

る」といふ条件より決定しよう。そこで今繰返應力が零と最大値との間を変動する場合の耐久限度を σ_u とし

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_u}=u \quad \dots\dots\dots(60)$$

と置いて、上記の 3 点が一直線をなすといふ条件を式で表せば

$$2u=v+w \quad \dots\dots\dots(61)$$

となる。さて $\sigma_m=(1/2)\sigma_u$ なるときは $\sigma_a=(1/2)\sigma_u$ となるべきにより、この条件を (59) 式に代入すると、次の関係式が得られる。

$$v^2+2-\gamma+w^2=4u^2$$

この式に (61) 式の u の値を代入し、 γ を求めると

$$\gamma=2(1-v\cdot w) \quad \dots\dots\dots(62)$$

これで γ の値が決定された。(62) 式の γ の値を (59) 式に代入し簡単にすれば

$$v\sigma_m+w\sigma_a=\sigma_e \quad \dots\dots\dots(63)$$

従て σ_m と σ_a は直線関係となる。一例として $v=0.4$, $w=1.1$ として (63) 式の表はす直線を図示すれば第 3 図の如くなる。この様に計算の結果は「平均應力が与へた場合の引張圧縮耐久限度は耐久限度線図に於て平均應力が零なる場合の耐久限度を表はす点と真破断力を表はす点とを結ぶ直線にて與へられる」といふ従来の実験結果と完全に一致する。

第 3 図 垂直應力のみが或最大値と最小値との間を変動する場合

2. 剪断應力のみが或最大値と最小値との間を変動する場合
この場合は $\sigma_m=\sigma_a=0$ であるから、この関係を (41) 及び (42) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} U &= 2(2\xi+3)(\tau_m+\tau_a)^2, & V &= (\eta+6)(\tau_m+\tau_a)^2 \\ U_m &= 2(2\xi+3)\tau_m^2, & V_m &= (\eta+6)\tau_m^2 \\ U_a &= 2(2\xi+3)\tau_a^2, & V_a &= (\eta+6)\tau_a^2 \end{aligned}$$

これらの関係を (36) 及び (37) 式に代入し、前と同様に ρ , q , α 及び β に夫々 (19), (20), (56) 及び (58) 式の値を代入すれば

$$v^2\tau_m^2+(2-\gamma)\tau_m\tau_a+w^2\tau_a^2=\tau_e^2 \quad \dots\dots\dots(64)$$

となる。常数 γ を決定すべき条件としては應力が零と最大値との間を変動する場合の耐久限度を用ひて見よう。このときの耐久限度を τ_u として

$$\frac{\tau_e}{\tau_u}=u' \quad \dots\dots\dots(65)$$

と置く。而して $\tau_m=(1/2)\tau_u$ なるとき $\tau_a=(1/2)\tau_u$ となる

[昭和 18 年 5 月]

べき条件を (64) 式に代入して r の値を求めると

$$r = v^2 + w^2 - 4u' + 2$$

この値を (64) 式に代入すれば

$$v^2 \tau_m^2 + (4u'^2 - v^2 - w^2) \tau_m \tau_a + w^2 \tau_a^2 = \tau_e^2 \quad \dots\dots\dots (66)$$

これが τ_m と τ_a との関係を表はす式である。 τ_m 及び τ_a を両軸に取るとき (66) 式は一般に原点に中心を有し主軸が座標軸と一致しない様な楕円を表はしてゐる。特に $u' = (1/2)(v+w)$ のときは直線となり、 $u' = (1/2)\sqrt{v^2+w^2}$ のときは主軸が座標軸と一致した楕円となる。今仮りに $v=0.4, w=1.1$ として (66) 式の曲線を図示すると第 4 図の如くなる。このときは $u'=0.75$ のとき直線となり、 $u'=0.585$ のとき主軸が座標軸と一致した楕円となる。

第 4 図 剪断応力のみが或最大値と最小値との間を変動する場合

5. 垂直応力及び剪断応力が共に正負等大値間を変動する場合

垂直応力の最大値を σ 、剪断応力の最大値を τ とすれば、この場合は

$$\sigma_a = \sigma, \tau_a = \tau, \sigma_m = \tau_m = 0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

1. $\varphi \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ なる場合 (67) 式の関係 (41) 式に代入すると

$$U = U_a = (\xi + 2)\sigma^2 + 2(2\xi + 3)\tau^2$$

$$U_m = 0$$

これらの関係を (36) 式に代入すると

$$(1 + \beta)[(\xi + 2)\sigma^2 + 2(2\xi + 3)\tau^2] = p \quad \dots\dots\dots (68)$$

p, ξ 及び β に (17), (48) 及び (58) 式の値を代入し、簡単にすれば次の如くなる。

$$\sigma^2 + \frac{1}{\varphi^2} \tau^2 = \sigma_w^2 \quad \dots\dots\dots (69)$$

これが耐久限度における σ と τ との関係を表はす式である。

2. $\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ なる場合 (67) 式の関係 (42) 式に代入すると

$$V = V_a = \eta \left[\sigma \left(\frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) + \tau^2 \right] + 2(\sigma^2 + 3\tau^2)$$

$$V_m = 0$$

これらの関係を (37) 式に代入すれば

$$1 + \beta \left[\eta \left\{ \sigma \left(\frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) + \tau^2 \right\} + 2(\sigma^2 + 3\tau^2) \right] = q \quad \dots\dots\dots (70)$$

q 及び β に (18) 及び (58) 式の値を代入し、変形すれば

$$\eta \left[\sigma \left(\frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) + \tau^2 - \sigma_w^2 \right] + 2(\sigma^2 + 3\tau^2 - \sigma_w^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (71)$$

これに (49) 式の η の値を代入して簡単にすれば

$$(1 + \varphi^2)\sigma^2 + (3\varphi^2 - 1)\sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + 4\tau^2 = 4\varphi^2\sigma_w^2 \quad \dots\dots\dots (72)$$

これが $\varphi \geq 1/\sqrt{3}$ なるときの σ と τ との関係を表はす式である。

(72) 式より実際 σ 及び τ の値を求めるには計算が相当面倒であるので次の様にして近似式を導き出すことが出来る。即ち今 (71) 式につき考へるに、この式の左辺第 1 項の [] 内を零と等しく置いた方程式を作ればそれは最大主応力説を表はし、同様に第 2 項の () 内を零と等しく置いた方程式を作ればそれは剪断歪エネルギー説を表はしてゐる。然るに最大主応力説に於ては

$$\frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_w$$

なる関係が存在する故、この関係を (71) 式の左辺第 1 項に代入すれば

$$\eta(\sigma_w \sigma + \tau^2 - \sigma_w^2) + 2(\sigma^2 + 3\tau^2 - \sigma_w^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (73)$$

(73) 式に於ても左辺第 1 項の () 内を零と等しく置いた方程式を作ればそれは最大主応力説を表はし、同様に第 2 項の () 内を零と等しく置いた方程式を作ればそれは剪断歪エネルギー説を表はすこと (71) 式における同様である。従て (71) 式の代りに (73) 式を用ひることとし、(73) 式の η に (49) 式の値を代入して簡単にすれば

$$(1 - \varphi^2)\sigma^2 + (3\varphi^2 - 1)\sigma_w \sigma + 2\tau^2 = 2\varphi^2\sigma_w^2 \quad \dots\dots\dots (74)$$

となる。即ち (72) 式の代りに近似的に (74) 式を用ひることが出来る。

第 5 図 垂直応力及び剪断応力が共に正負等大値間を変動する場合 (著者の式)

$\varphi \leq 1/\sqrt{3}$ なる場合の (69) 式、 $\varphi \geq 1/\sqrt{3}$ なる場合の (72) 式及び近似式 (74) に於て $\varphi = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ 及び 1.0 としてこれらの式の表はす曲線を図示すると第 5 図の如くなる。図より明らかな如く近似式 (73) は (72) 式よりも常に安全側にある。これらの曲線が果して実験結果に一致するかどうかは今こゝに更めて驗する必要はない。何となれば (69) 及び (74) 式は既に著者が種々の材料につき行つた組合曲げ振り疲労試験結果に良く當嵌まるものとして報告した式⁽⁵⁾と全然同一であるからである。尙第 5 図中には比較のため最大主應力説、最大主歪説、歪エネルギー説、剪断歪エネルギー説及び最大剪断應力説等を表はすべき曲線をも示した (但しポアソン常数 $m=10/3$ とした)。著者の式に於て $\varphi = 0.5, 1/\sqrt{3}, 1.0$ としたときは夫々最大剪断應力説、剪断歪エネルギー説、最大主應力説と一致することは勿論である。

今若し $w=1$ 即ち應力が正負等大値間を變動する場合の耐久限度を静應力に対する弾性限度に等しいと看做せば、(58) 式より $\beta=0$ となり、従て (68) 及び (70) 式は夫々静應力の場合の (15) 及び (16) 式と全然同一となる。従て (69), (72) 及び (74) 式に於て σ 及び τ を静的に作用する應力と看做し且 σ_w の代りに σ_e とすれば、これらの各式は直に静應力によつて破損する場合の破損条件を表はす式となる。

緒言に述べた松村博士の説に於て σ 及び τ を正負等大値間に變動する應力の最大値を表はすものと看做し且 σ_e の代りに σ_w として (4) 式を疲労の場合に適用すると

$$(2\varphi-1)\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 2\varphi\sigma_w \quad (75)$$

となる。前と同様に $\varphi = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ として (75) 式の表はす曲線を図示すると第 6 図の如くなる。第 6 図に於ても前と同様比較のため各破壊説を表はす曲線をも示した。著者の式 (69), (72) 及び (74) 式等に於て $\varphi = 1/\sqrt{3}$ とすれば剪断歪エネルギー説と完全に一致し、このとき σ と τ との関係は原点に中心を有する楕円によつて表はされるが、

第 6 図 垂直應力及び剪断應力が共に正負等大値間を變動する場合 (松村博士の式)

(75) 式に於ては $\varphi = 1/\sqrt{3}$ としても σ と τ との関係は原点に中心を有する楕円とはならない。第 6 図に見られる如く (75) 式の曲線と剪断歪エネルギー説を表はす曲線とは交つてゐる。然るに著者の行つた組合曲げ振り疲労試験の結果に依ても明らかなる如く $\varphi = 1/\sqrt{3}$ のときは原点に中心を有する楕円が最も良く実験の結果に一致するのである。

6. 垂直應力が正負等大値間を變動し 剪断應力が静なる場合

静剪断應力が τ_{st} なるときの耐久限度における垂直應力振幅を σ_a とすると、この場合は

$$\tau_m = \tau_{st}, \quad \sigma_m = \tau_a = 0 \quad (76)$$

1. $\varphi \leq 1/\sqrt{3}$ なる場合 (76) 式の関係 (41) 式に代入すると

$$U = (\xi + 2)\sigma_a^2 + 2(2\xi + 3)\tau_{st}^2$$

$$U_m = 2(2\xi + 3)\tau_{st}^2$$

$$U_a = (\xi + 2)\sigma_a^2$$

これらの関係を (36) 式に代入すると

$$(1 + \beta)(\xi + 2)\sigma_a^2 - \gamma\sqrt{2(\xi + 2)(2\xi + 3)}\sigma_a\tau_{st} + 2(1 - \alpha)(2\xi + 3)\tau_{st}^2 = \rho$$

ρ, ξ, α 及び β に夫々 (17), (48), (56) 及び (58) 式の値を代入し、簡単にすれば次の如くなる。

$$\varphi^2 w^2 \sigma_a^2 - \gamma \varphi \sigma_a \tau_{st} + v^2 \tau_{st}^2 = \varphi^2 \sigma_e^2 \quad (77)$$

この式より静剪断應力が τ_{st} なるときの耐久限度における垂直應力振幅 σ_a が求められる。 σ_a 及び τ_{st} を夫々両軸に取るとき (77) 式は通常原点に中心を有し主軸が座標軸と一致しない楕円となる。

次に (77) 式より計算した結果が果して実験結果に一致するか否かを驗して見よう。第 7 図は小野博士⁽¹³⁾ 及び Lea-Budgen⁽¹⁴⁾ によつて行はれた回轉曲げと静振りとを同時に與へた場合の疲労試験結果である。図の如く実験結果は静振り應力が余り大きくない範囲に於ては静振り應力を與へることにより回轉曲げ耐久限度は却て増大する結果となつてゐる。

第 7 図 静振り應力を與へた回轉曲げ試験 (延性材料)

(13) 機械學會誌, 23 卷 62 号 201 頁 (大 10-9).

(14) Engg.,

Vol. CXXII, (1926), 242.

そこで今仮りに前と同様 $v=0.4$, $w=1.1$ とし且 $\varphi=0.5$, $r=0.32$ として (77) 式の表はす曲線を図示すると第 7 図中に画いた曲線となる。図の如くこの曲線は静振り應力を與へることにより回轉曲げ耐久限度は最初却て増大する如き形の曲線となり実験結果に良く當嵌まる。

2. $\varphi \geq 1/\sqrt{3}$ なる場合 (76) 式の関係を (42) 式に代入すると

$$V = \eta \left[\sigma_a \left(\frac{1}{2} \sigma_a + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_{st}^2} \right) + \tau_{st}^2 \right] + 2(\sigma_a^2 + 3\tau_{st}^2)$$

$$V_m = (\eta + 6)\tau_{st}^2$$

$$V_a = (\eta + 2)\sigma_a^2$$

これらの関係を (37) 式に代入すると

$$\eta \left[\sigma_a \left(\frac{1}{2} \sigma_a + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_{st}^2} \right) + \tau_{st}^2 \right] + 2(\sigma_a^2 + 3\tau_{st}^2) - \alpha(\eta + 6)\tau_{st}^2 + \beta(\eta + 2)\sigma_a^2 - \gamma \sqrt{(\eta + 2)(\eta + 6)} \cdot \sigma_a \tau_{st} = q$$

q, η, α 及び β に夫々 (18), (49), (56) 及び (58) 式の値を代入し簡単にすれば次の如くなる。

$$(4w^2\varphi^2 - 3\varphi^2 + 1)\sigma_a^2 + (3\varphi^2 - 1)\sigma_a \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_{st}^2} - 4\gamma\varphi\sigma_a\tau_{st} + 4v^2\tau_{st}^2 = 4\varphi^2\sigma_e^2 \quad (78)$$

これが静剪断應力 τ_{st} と耐久限度における垂直應力振幅 σ_a との関係を表はす式である。

第 8 図 静振り應力を與へた回轉曲げ試験 (鑄鉄)

次にこの式が果して実験結果と一致するかどうかを驗すために、小野博士が鑄鉄について行はれた回轉曲げと静振りとを組合はせた場合の疲労試験結果⁽¹⁵⁾に當嵌めて見よう。第 8 図がその実験結果である。図の如く鑄鉄に於ては延性材料の場合と異なり静振り應力の作用により回轉曲げ耐久限度は最初より低下してゐる。さてこの場合は $\tau_T = 20.7 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_w = 7.49 \text{ kg/mm}^2$ である。今仮りに $w=1$, $\varphi=0.8$ (著者が鑄鉄に就て行つた組合曲げ振り疲労試験の結果⁽¹⁶⁾によれば $\varphi=0.808$ であつた) とすれば $v=0.29$ となる。 r は実験の結果より定めるべきで、その条件としては $\tau_{st}=5.25 \text{ kg/mm}^2$ のとき $\sigma_a=7.0 \text{ kg/mm}^2$ となる様決定すれば $r=0.232$ となる。これらの数値を用ひて (78) 式の表はす曲線を図示すると、第 8 図中に画いた曲線となる。図の如くこの曲線は実験結果と良く一致してゐる。

7. 剪断應力が正負等大値間を變動し 垂直應力が靜なる場合

静垂直應力が σ_{st} なるときの耐久限度における剪断應力振幅を τ_a とすれば、この場合は

$$\sigma_m = \sigma_{st}, \quad \sigma_a = \tau_m = 0 \quad (79)$$

1. $\varphi \leq 1/\sqrt{3}$ なる場合 (79) 式の関係を (41) 式に代入すると

$$U = (\xi + 2)\sigma_{st}^2 + 2(2\xi + 3)\tau_a^2$$

$$U_m = (\xi + 2)\sigma_{st}^2$$

$$U_a = 2(2\xi + 3)\tau_a^2$$

これらの関係を (36) 式に代入すると

$$(1 - \alpha)(\xi + 2)\sigma_{st}^2 - \gamma \sqrt{2(\xi + 2)(2\xi + 3)} \cdot \sigma_{st} \tau_a + 2(1 + \beta)(2\xi + 3)\tau_a^2 = p$$

p, ξ, α 及び β に夫々 (19), (48), (56) 及び (58) 式の値を代入し、簡単にすれば次の如くなる。

$$v^2\varphi^2\sigma_{st}^2 - \gamma\varphi\sigma_{st}\tau_a + w^2\tau_a^2 = \tau_e^2 \quad (80)$$

この式より静垂直應力が σ_{st} なるときの耐久限度における剪断應力振幅 τ_a が求められる。 σ_{st} 及び τ_a を夫々兩軸に取るとき (80) 式は (77) 式と同様通常原点に中心を有する楕円となる。

次に (80) 式が果して実験結果を表はすに適するか否かを驗すために、著者が 0.1% 炭素鋼及び 0.34% 炭素鋼に就て行つた繰返振りと静引張とを組合はせた場合の疲労試験結果⁽¹⁷⁾に當嵌めて見よう。第 9 図に 0.1% 炭素鋼の実験結果

第 9 図 静引張應力を與へた繰返振り試験 (0.1% 炭素鋼)

を示す。図の如く振り耐久限度は静引張應力によつて大した影響を受けないが、静應力により幾分上昇する傾向が認められる。さてこの場合は $\sigma_T = 83.4 \text{ kg/mm}^2$, $\tau_w = 12 \text{ kg/mm}^2$ であつた。今仮りに $w=1.1$, $\varphi=1/\sqrt{3}$ とすれば $v=0.274$ となる。 r は実験の結果の他の一点を通る様に決定する。例へば $\sigma_{st}=20.49 \text{ kg/mm}^2$ のとき $\tau_a=12.44 \text{ kg/mm}^2$ とせば $r=0.16$ となる。これらの値を用ひて (80) 式によつて表はされる曲線を描くと第 9 図中に示した曲線となる。図の如くこの曲線は実験結果と良く一致してゐる。

第 10 図は 0.34% 炭素鋼の実験結果である。この場合も前と同様静引張應力によつて振り耐久限度は却て上昇する傾向がある。さてこの場合は $\sigma_T = 81.2 \text{ kg/mm}^2$, $\tau_w = 12 \text{ kg/mm}^2$ であつた。そこで前と同様 $w=1.1$, $\varphi=1/\sqrt{3}$ とすれば $v=0.28$ となる。 r は $\sigma_{st}=30.7 \text{ kg/mm}^2$ のとき $\tau_a=12.41 \text{ kg/mm}^2$ となる様に決定すれば $r=0.168$ となる。これらの値を用ひて (80) 式の表はす曲線を図示すると第 10 図中に画いた如き曲線となり実験結果に良く一致する。

(15) 機械学会論文誌, 6 巻 25 号 1-30 頁 (昭 15-11).

(16) 機械学会論文誌, 7 巻 29 号 1-85 頁 (昭 16-11).

(17) 日本金属学会誌, 6 巻 6 号 316 頁 (1942).

第 10 図 静引張応力を與へた繰返振り試験
(0.34% 炭素鋼)

2. $\varphi \geq 1/\sqrt{3}$ なる場合 (79) 式の関係を (42) 式に代入すると

$$V = \gamma \left[\sigma_{st} \left(\frac{1}{2} \sigma_{st} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{st}^2 + 4\tau_a^2} \right) + \tau_a^2 \right] + 2(\sigma_{st}^2 + 3\tau_a^2)$$

$$V_m = (\gamma + 2)\sigma_{st}^2$$

$$V_a = (\gamma + 6)\tau_a^2$$

これらの関係を (37) 式に代入すると

$$\gamma \left[\sigma_{st} \left(\frac{1}{2} \sigma_{st} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{st}^2 + 4\tau_a^2} \right) + \tau_a^2 \right] + 2(\sigma_{st}^2 + 3\tau_a^2) - \alpha(\gamma + 2)\sigma_{st}^2 + \beta(\gamma + 6)\tau_a^2 - \gamma \sqrt{(\gamma + 2)(\gamma + 6)\sigma_{st}\tau_a} = q$$

q , γ , α 及び β に夫々 (20), (49), (56) 及び (58) 式の値を代入し、簡単にすれば次の如くなる。

$$(4v^2\varphi^2 - 3\varphi^2 + 1)\sigma_{st}^2 + (3\varphi^2 - 1)\sigma_{st}\sqrt{\sigma_{st}^2 + 4\tau_a^2} - 4\gamma\varphi\sigma_{st}\tau_a + 4v^2\tau_a^2 = 4\tau_a^2 \dots\dots\dots (81)$$

これが静垂直応力 σ_{st} と耐久限度における垂直応力振幅 τ_a との関係を表はす式である。

第 11 図 静引張応力を與へた繰返振り試験
(0.72% 炭素鋼)

次に (81) 式を著者が曾て 0.72% 炭素鋼及び鋳鉄に就て行つた繰返振りと静引張とを組合はせた場合の疲労試験結果⁽¹⁸⁾に當嵌めて見よう。第 11 図は 0.72% 炭素鋼に就ての実験結果である。図の如くこの場合は静引張応力の作用により振り耐久限度は低下する傾向がある。さてこの場合の φ の値は不明であるが仮りに 0.68 とする。(著者が 0.62% 炭素鋼に就て組合曲げ振り疲労試験を行つた実験結果に於ては $\varphi = 0.667$ であつた⁽¹⁹⁾。 φ の値は炭素量の多くなる程大きくなる傾向があるから、仮りにこいふ値を選ぶこととする。)

(18) 脚註 (17) と同じ。

(19) 脚註 (16) と同じ。

然らば勿論 $\varphi > 1/\sqrt{3}$ であるから脆性材料に対する式 (81) を用ひるべきである。尚この場合 $\sigma_T = 102 \text{ kg/mm}^2$, $\tau_w = 20 \text{ kg/mm}^2$ であつた。今仮りに $w = 1.1$ とすれば $v = 0.317$ となる。尚 γ は $\sigma_{st} = 35.5 \text{ kg/mm}^2$ のとき $\tau_a = 16.3 \text{ kg/mm}^2$ となる様決定すれば $\gamma = -0.153$ となる。これらの値を用ひて (81) 式によつて表はされる曲線を図示すると第 11 図中に画いた如き曲線となり実験結果と大体一致する。

第 12 図 静引張応力を與へた繰返振り試験 (鋳鉄)

鋳鉄に就ての実験結果を第 12 図に示す。図の如く鋳鉄に於ては静引張応力によつて振り耐久限度は著しく低下してゐる。さてこの場合は $\sigma_T = 15.55 \text{ kg/mm}^2$, $\tau_w = 5.7 \text{ kg/mm}^2$ であつた。今前と同様に $w = 1$, $\varphi = 0.8$ とすれば $v = 0.458$ となる。尚 γ は $\sigma_m = 2.5 \text{ kg/mm}^2$ のとき $\tau_a = 4.5 \text{ kg/mm}^2$ となる様決定すると $\gamma = -0.83$ となる。これらの値を用ひて (81) 式によつて表はされる曲線を図示すると第 12 図中に画いた如き曲線となり実験結果と大体一致する。

8. 結 論

(1) 「延性の大きな材料に於ては最大剪断応力が変容の程度に依て変化する定数値に達するとき弾性的破損を起し、脆性材料或は延性の比較的乏しい材料に於ては最大主応力が変容の程度に依て変化する定数値に達するとき弾性的破損を起す」といふ新しい考へ方を提案し、これより破損の条件式を求めた。且この考へ方を疲労の場合に適用し種々の組合應力状態における疲労破損の条件を表はすべき一般式を導いた。

(2) これを垂直応力のみが或最大値と最小値との間を変動する場合に適用すると「平均応力を與へた場合の引張圧縮耐久限度は耐久限度線図に於て平均応力が零なる場合の耐久限度を表はす点と真破断力を表はす点とを結ぶ直線にて與へられる」といふ従来の実験結果と完全に一致する。

(3) 又これを曲げ応力及び振り応力が共に正負等大値間を変動する場合に適用するときは著者が種々の材料に就て行つた組合曲げ振り疲労試験結果に良く當嵌まるものとして既に報告した式と同一となる。

(4) 更にこれを垂直応力或は剪断応力の何れか一方が静で他が正負等大値間を変動する場合に適用すると、延性材料に於ては静応力を與へることにより耐久限度は最初却て増大し、脆性材料に於ては静応力を與へることにより耐久限度は減少するといふ従来の実験結果に良く當嵌まる式となる。

9. 附 論

本論の第 6 節及び第 7 節に示した如く、垂直応力或は剪

[昭和 18 年 5 月]

断應力の何れか一方が静で他が正負等大値間を変動する場合に関する小野博士、Lea-Budgen 及び著者等の実験結果に依れば、静應力が耐久限度に及ぶ影響は延性材料なるか脆性材料なるかにより著しく異なる。即ち静應力を與へることにより耐久限度は延性材料に於ては最初却て増大し、脆性材料に於ては減少してゐる。而も上述の計算より得られる曲線はこれらの実験結果に良く一致してゐる。併し茲に注意すべきことは (77), (78), (80) 及び (81) 式の表はす曲線の形は γ の値の選び方如何によつて、耐久限度が静應力と共に増大する如き形とも又減少する如き形ともなり得ることである⁽²⁰⁾。従てこれら式は実験の結果を表はす手段としては眞に好都合なものに違ひないが、実験結果を理論的に説明する上からは幾分不十分なる憾がある。

併し上記実験結果が確かに理論的に根拠のあるものなることに就ては垂直應力が変動し剪断應力が静なる場合に対しては Bailey⁽²¹⁾ 及び小野博士⁽²²⁾ 等が、又剪断應力が変動し垂直應力が静なる場合に対しては著者⁽²³⁾ が既に報告した。尙最近 Bailey⁽²⁴⁾ は延性材料につき類似した計算法を報告してゐるが、著者は本論文に附隨して、次の二つの假定即ち

- (i) 垂直應力 (或は剪断應力) が或最大値と最小値との間を變動する場合の耐久限度は耐久限度線図に於て平均應力が零なる場合の耐久限度を表はす点と眞破断力 (或は振り破断力) を表はす点を結ぶ直線にて與へられる。
- (ii) 延性材料に於ては最大剪断應力面内の剪断應力が、又脆性材料に於ては最大主應力面内の垂直應力が疲労破壊を決定する。

に基づいて計算した結果が上記の実験的事実を良く説明し得ることを記述し度い。

1. 延性材料の場合 先づ垂直應力が正負等大値間を變動し剪断應力が静なる場合を考へる。今試験片の直角断面と α なる傾を有する断面に作用する剪断應力を τ' とすれば

$$\tau' = \frac{1}{2} \sigma_a \sin 2\alpha + \tau_{st} \cos 2\alpha$$

従てこの断面に作用する平均剪断應力を τ_m' 、剪断應力振幅を τ_a' とすれば

$$\tau_a' = \frac{1}{2} \sigma_a \sin 2\alpha, \quad \tau_m' = \tau_{st} \cos 2\alpha \quad \dots\dots\dots (82)$$

然るに最初の假定より

$$\frac{\tau_a'}{\tau_w} + \frac{\tau_m'}{\tau_T} = 1. \quad \text{即ち} \quad \tau_a' + \frac{\tau_m'}{w} = \tau_w \quad \dots\dots\dots (83)$$

(82) 式の関係を (83) 式に代入し、且最大剪断應力の生ずるのは

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sigma_a}{2\tau_{st}}$$

なる断面に於てであるから、この関係より α を消去すれば

(20) 延性材料に於ても静應力を與へることにより耐久限度は最初より減少するといふ実験結果を報告してゐるものもある。例へば回轉曲げと静振りを組合はせた場合に対しては Davies: Inst. of Mech. Eng. Proc., Vol. 131, (1935), 66 頁、又繰返振りと静引張とを組合はせた場合に対しては Hohe-nemser-Prager: Metallwirtschaft, Vol. 12, (1933), 342 頁。

(21) Engineering, Vol. CIV, (1917), 81 頁。

(22) 脚註 (13) に同じ。

(23) 脚註 (17) に同じ。

(24) 脚註 (11) に同じ。

次の如くなる。

$$\sigma_a^2 + 4 \frac{v}{w} \tau_{st}^2 = \sigma_w \sqrt{\sigma_a^2 + 4 \tau_{st}^2} \quad \dots\dots\dots (84)$$

(84) 式より σ_a と τ_{st} との関係を図示すると第 13 図の如くなり静應力により耐久限度が増大することが解る。

第 13 図 垂直應力が正負等大値間を變動し剪断應力が静なる場合 (延性材料)

次に剪断應力が正負等大値間を變動し垂直應力が静なる場合に就ても以上と同様にして次の関係が得られる。

$$\tau_a^2 + \frac{1}{4} \frac{v}{w} \sigma_{st}^2 = \frac{1}{2} \tau_w \sqrt{\sigma_{st}^2 + 4 \tau_a^2} \quad \dots\dots\dots (85)$$

(85) 式より τ_a と σ_{st} との関係を図示すると第 14 図の如くなり、一般には静應力により耐久限度が増大するがその量は第 13 図の場合に較べて極く僅かであり殊に w/v の値の小的时候は増加しない。

第 14 図 剪断應力が正負等大値間を變動し垂直應力が静なる場合 (延性材料)

2. 脆性材料の場合 先づ垂直應力が正負等大値間を變動し剪断應力が静なる場合を考へる。試験片の直角断面と α なる傾を有する断面に作用する垂直應力を σ' とすれば

$$\sigma' = \frac{1}{2} \sigma_a (1 + \cos 2\alpha) + \tau_{st} \sin 2\alpha$$

従てこの断面に作用する平均垂直應力を σ_m' 、垂直應力振幅を σ_a' とすれば

$$\sigma_a' = \frac{1}{2} \sigma_a (1 + \cos 2\alpha), \quad \sigma_m' = \tau_{st} \sin 2\alpha \quad \dots\dots\dots (86)$$

然るに最初の假定より

$$\frac{\sigma_a'}{\sigma_w} + \frac{\sigma_m'}{\sigma_T} = 1 \quad \text{即ち} \quad \sigma_a' + \frac{\sigma_m'}{w} = \sigma_w \quad \dots\dots\dots (87)$$

(86) 式の関係を (87) 式に代入し、且最大主應力の生ずるのは

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{st}}{\sigma_a}$$

なる断面に於てであるから、この関係より α を消去すれば

第 15 図 垂直應力が正負等大値間を変動し
剪断應力が靜なる場合 (脆性材料)

次の如くなる。

$$\sigma_a^2 + 4 \frac{v}{w} \tau_{st}^2 = (2\sigma_w - \sigma_a) \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_{st}^2} \dots\dots\dots (88)$$

(88) 式より σ_a と τ_{st} との関係を図示すると第 15 図の如く、静應力により耐久限度は概して減少する曲線となる。併しこのとき w/v の値の大なるときは耐久限度は最初極く僅か増大してゐる。このことは本論における (78) 式即ち第 8 図の曲線にても見られることである⁽²⁵⁾。

第 16 図 剪断應力が正負等大値間を変動し
垂直應力が靜なる場合 (脆性材料)

次に剪断應力が正負等大値間を変動し垂直應力が靜なる場合に就ても以上と同様にして次の関係が得られる。

$$\tau_a^2 + \frac{1}{4} \frac{v}{w} \sigma_{st}^2 = \frac{1}{4} \left(2\tau_w - \frac{v}{w} \sigma_{st} \right) \sqrt{\sigma_{st}^2 + 4\tau_a^2} \dots\dots\dots (89)$$

(89) 式より τ_a と σ_{st} との関係を図示すると第 16 図の如くなり静應力により耐久限度が最初より著しく減少することが解る。

(昭和 18 年 1 月 16 日受付)

(25) 小野博士は破壊までの應力繰返数が全く垂直應力で定まるものとしても静剪断應力が或程度の大きさに達するまではその影響が現はれないことを計算により示してをられる。脚註 (13) 参照。