接触点の軌跡と歯形曲線(第 1 報)⁽¹⁾ 量的 関 係

(昭和 17 年 10 月 30 日 仙台地方講演會に於て講演)

正 員 堀 内 義 和⁽²⁾

緒 言

歯形曲線論に於て接触点の軌跡が重要な役割を演ずる事は周知のことに属する。蓋し一對の歯形により角速比一定な回轉を円滑に継続せしめるためには軌跡上の一点とピッチ点を結ぶ直線が常にその点における両歯形の共通法線になる事が要請されるからである(歯形の機構学的条件: Verzahnungsgesetz)。その結果歯形は接触点の軌跡の動径に垂直な直線の包絡線として一意に決定され、逆に接触点の軌跡も歯形から定まる。斯様に一對一の對應に結ばれてゐる両者の關係を闡明するのが本研究の目的である。

一般に物理、工学等に関する幾何学的問題を取扱ふ上に座標系の選択が重要なことは云ふ迄もない。歯形曲線論も亦例外ではあり得ない。現に成瀬教授により盛な展開をなしてゐる本理論に切線座標系 (Tangentenkoordinaten) が如何に有効であるかをみれば自ら首肯し得るところであらう。本報告に於ては Cesàro, Darboux, Cartan 等の幾何学者により自由に驅使されてゐる méthode de repère mobile⁽³⁾ (Mithbewegsbezugsystem) 並に特種曲線座標系 [C] が又本理論に役立つことを紹介し、その導入により研究を進めようとするものである。

第 1 報に於て取扱つた問題は両者の間の量的關係である。即ち repère mobile の方法を用ひ、

1. 接触点の軌跡より直接歯形の曲率を求め、
座標系 [C] の導入により或時間内の、

第 1 図

1. 接触点 M の歯形上の移動距離 (並に速度)
2. M 点の接触点の軌跡上の移動距離 (並に速度)
- ハ. ピッチ円の回轉角回轉弧の長さ (並に回轉角速度) 及びラックの移動距離 (並に速度)

を調べた⁽⁴⁾。我々は今後の便宜のため歯車の噛合を第 1 図の如く選んだ場合直交座標系を [R], 極座標系を [P] と呼ぶことにする。

1. 歯形の曲率⁽⁵⁾

平面曲線 Γ が曲線弧の長さ s をパラメータとして

$$x=x(s), \quad y=y(s)$$

と與へられ、 x 及び y は考へてゐる領域に於て s に一價にして第二次微係数が存在するものとする (以下取扱ふ曲線はこの性質ありとす)。 Γ 上の一点 $M(x, y)$ における切線 u , 法線 v からなる直交座標系 [M] を考へ、 M 点が Γ 上を移動するとき我々がこの動座標系に固着して共に動き、 Γ の幾何学的性質の曲線に沿ふての変化を観察することにより曲線 Γ を研究するのが repère mobile の方法である。その一つの場合として平面上の一固定点 $F(X, Y)$ を [M] 系から眺める (第 2 図)。ベクトル $\overrightarrow{MF}$ の長さを ρ , こ

第 2 図

れが切線 u の正方向となす角を σ , 切線 u が x 軸の正方向となす角を φ とすれば [M] 系に関する固定点 F の相対直交座標 u, v 及び相対極座標 ρ, σ と座標 $(X, Y), (x, y)$ の關係は次の如く表はされる⁽⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} u &= (X-x) \cos \varphi + (Y-y) \sin \varphi \\ v &= -(X-x) \sin \varphi + (Y-y) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

(1) On the Path of Contacts and Tooth Profiles (Part 1).
(2) Yoshikazu HORIUCHI, Member, Nakajima Hikōki Kaisha, 中島飛行機會社。
(3) 例へば E. Cesàro: Lezioni di geometria intrinseca. (Neapel 1900).

(4) 接触点の軌跡と歯形曲線、第 1 報の要報中歯形の表示に関する部分は計算の誤りを訂正の上補報に掲載することにした。
(5) 王銘爵、機械學會論文集、7 卷 29 号 IV (昭 16-11).
(6) 前掲 (3) § 12.

これ等を s につき微分すれば

$$\left. \begin{aligned} du/ds &= v/\kappa - 1 \\ dv/ds &= -u/\kappa \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} d\rho/ds &= -\cos \sigma \\ d\sigma/ds &= -1/\kappa + \sin \sigma/\rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

茲に κ は点 M における曲線 Γ の曲率半径である。(1)~(3) 式は Γ に沿ふ [M] 系から眺めたとき相対座標 (u, v) 又は (ρ, σ) を有する点 F が曲線 Γ に関して不動なることを示す条件式である。

今 Γ が第 I 象限⁽⁷⁾に於て座標系 [R] 及び [P] により夫々

$$x=x(s), y=y(s) \quad \text{及び} \quad r=f(\theta)$$

として與へられてある。ピッチ円の半径 R_i なる O_i -車 ($i=1, 2$) の歯形 Γ_1, Γ_2 が或瞬間 Γ 上的一点 $M(x, y)$ に於て接触してゐれば、 M 点は歯車の回轉⁽⁸⁾につれて Γ 及び Γ_i 上を連続的に移動する。 Γ 上、点 M から見れば、歯車の中心 O_i は歯車の回轉即ち M 点の運動には無関係に Γ に対して不動である。歯形 Γ_i はピッチ円と共に回轉する直交座標系により曲線弧の長さ s_i をパラメータとして與へられてある。 Γ_i 上点 M から觀察すれば中心 O_i は矢張り M 点の運動に拘らず不動である(第3図)。従て曲線 Γ 及び Γ_i に関する点 O_i の不動条件式として夫々

第 3 図

$$\left. \begin{aligned} d\rho/ds &= -\cos \sigma \\ d\sigma/ds &= -1/\kappa + \sin \sigma/\rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} d\rho_i/ds_i &= -\cos \sigma_i \\ d\sigma_i/ds_i &= -1/\kappa_i + \sin \sigma_i/\rho_i, (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を得。 O_1 -車に就て考へれば歯形の機構学的条件から

$$\sigma_1 = \sigma + \varphi - \theta + \pi/2 + \text{常数}^{(9)} \dots\dots\dots (6)$$

s_1 に関して微分して

$$\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{d(\sigma + \varphi - \theta + \pi/2 + \text{常数})}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1}$$

(7) 他の象限に於ても全く同様である。 (8) 特に断らない場合は今後回轉方向は O_1 -車が反時計式であると定める。 (9) $\vec{MO_1}$, u 及び u_1 の相対的位置の関係により常数項だけの差異を生ずるも最後の結果は同じである。

こゝで $\rho = \rho_1$ 及び $d\rho/ds = 1/\kappa$ なることに注意し、(4), (5) 式を用ふれば

$$-\rho_1^2/(\kappa_1 \rho_1 \cos \sigma_1) + \tan \sigma_1 = \tan \sigma - \rho \sec \sigma \cdot d\theta/ds \dots\dots (7)$$

この式中

$$\rho_1 \cos \sigma_1 = -R_1 \cos \theta, \quad \tan \sigma_1 = (r - R_1 \sin \theta)/(R_1 \cos \theta)$$

又 α を $\vec{MO_1}$ が x -軸の正方向となす角とすれば

$$\tan \alpha = \frac{y - R_1}{x} = \frac{r \sin \theta - R_1}{r \cos \theta}$$

$$\tan \varphi = \frac{d(r \sin \theta)}{d(r \cos \theta)} = \frac{r' \tan \theta + r}{r' - r \tan \theta}$$

$$\therefore \tan \sigma = \tan(\alpha - \varphi) = \frac{(r - R_1 \sin \theta)r + r' R_1 \cos \theta}{(R_1 \cos \theta - r')r + r' R_1 \sin \theta}$$

$$\therefore \sec \sigma = \rho \sqrt{r^2 + r'^2} / \{(R_1 \cos \theta - r')r + R_1 \sin \theta \cdot r'\}$$

$$\text{但し} \quad \rho = R_1^2 + r^2 - 2 R_1 r \sin \theta$$

$$\text{又} \quad ds/d\theta = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

従て (7) 式を整理し、歯形 Γ_1 の曲率 $1/\kappa_1$ を得る。

$$1/\kappa_1 = -(R_1 \cos \theta - r') / \{(R_1 r \cos \theta + (R_1 \sin \theta - r)r')\}$$

同様に $i=2$ から進めば歯形 Γ_2 の曲率 $1/\kappa_2$ を得る。ラックの歯形 Γ_r の曲率 $1/\kappa_r$ は O_2 -車のピッチ円半径 R_2 を $\rightarrow \infty$ とした極限として得られる。即ち各象限における各種噛合に対する歯形 Γ_i ($i=1, 2; p, r$)⁽¹⁰⁾ の曲率は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa_i} &= -\frac{R_i \cos \theta + \varepsilon_i r'}{R_i r \cos \theta + (R_i \sin \theta + \varepsilon_i r)r'}, (i=1, 2, p) \\ \frac{1}{\kappa_r} &= -\frac{1}{r + r' \tan \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

茲に ε_i は ± 1 にして象限には無関係、只噛合ひの種類のみにより次表に従ふ。

第 1 表 ε_i

噛合種類	歯形	ε_i
外 接	Γ_1	-1
	Γ_2	+1
内 接	Γ_1	-1
	Γ_2	-1
ラックと小歯車	Γ_p	-1

2. 應 用 例 (その 1)

例 I. 一對の歯車のピッチ円半径と歯形の曲率半径の間の関係⁽¹¹⁾ 歯車同志の噛合の場合は (8) 式を変形し

$$-\frac{1}{r'} = \frac{\tan \theta}{r + \kappa_i} + \frac{\varepsilon_i \sec \theta}{R_i}, \quad (i=1, 2)$$

この 2 式から r' を消去すれば

$$\frac{1}{R_1} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{R_2} = \varepsilon_1 \sin \theta \left(\frac{1}{r + \kappa_2} - \frac{1}{r + \kappa_1} \right)$$

又は

(10) $i=p$ はラックと小歯車の噛合における小歯車を示し $i=r$ はラックを示す。 (11) 成瀬政男、歯車、岩波書店(昭和 9 年)、131 頁。以後單に「歯車」と記す。

[昭和 18 年 5 月]

$$\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} = \sin \theta \left(\frac{1}{r + \kappa_1} - \frac{1}{r + \kappa_2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{外接嚙合 (+)} \\ \text{内接嚙合 (-)} \end{array}$$

ラックと小歯車の嚙合の場合は (8) 式から

$$-\frac{1}{r'} = \frac{tg \theta}{r + \kappa_p} - \frac{\sec \theta}{R_p}, \quad -\frac{1}{r'} = \frac{tg \theta}{r + \kappa_r}$$

r' を消去し

$$\frac{1}{R_p} = \sin \theta \left(\frac{1}{r + \kappa_p} - \frac{1}{r + \kappa_r} \right)$$

これは又歯車同志の嚙合で $R_2 \rightarrow \infty$ とした極限として得られる。上式の κ_i, κ_r は勿論符号を込めた値である。

例 II. 滑り率 滑り率の定義式、

$$\sigma_i' = \frac{ds_j - ds_i}{ds_i} \dots\dots O_i\text{-車の歯本の面の滑り率}$$

$$\sigma_i = \frac{ds_i - ds_j}{ds_i} \dots\dots \text{歯末の面}$$

茲に ds_i は接触点 M が Γ 上微小距離 ds を移動する間に、歯形 Γ_i 上で移動した距離である。然るに ds_i とピッチ円 Γ_i の回轉量 $d\lambda$ の間のよく知られた関係式 $ds_i = \kappa_i \sin \theta \cdot d\lambda / (\kappa_i + r)$ ⁽¹²⁾ を上の定義式に當て嵌め、(8) 式を用ふれば直に滑り率の一般式を得 ⁽¹³⁾。

$$\sigma_i', -\sigma_i = \frac{\varepsilon_j R_j - \varepsilon_i R_i}{R_j} \cdot \frac{r \cdot r'}{R_i r \cos \theta + (R_i \sin \theta + \varepsilon_i r) r'} \\ \sigma_i = \frac{\sigma_i'}{1 + \sigma_i'}, \quad (i=1, 2)$$

ラックと小歯車の嚙合の滑り率は上式に於て $R_2 \rightarrow \infty$ とすればよい。

$$\sigma_p', -\sigma_p = \frac{r \cdot r'}{R_p r \cos \theta + (R_p \sin \theta - r) r'} \\ \sigma_r', -\sigma_r = \frac{-r \cdot r'}{R_p (r \cos \theta + r' \sin \theta)} \\ \sigma_p = \frac{\sigma_r'}{1 + \sigma_r'}$$

1. Γ がリマーソン $r = a \sin \theta \mp b$, ($a, b > 0$)

内接及び外接嚙合

$$\sigma_i' = -\sigma_i = (\varepsilon_j R_j - \varepsilon_i R_i) r' / \{ \sin \theta + r(1/a + \varepsilon_i/R_i) \}$$

ラックと小歯車の嚙合

$$\sigma_p' = -\sigma_p = ar / \{ (R_p - a)r + aR_p \sin \theta \}$$

$$\sigma_r' = -\sigma_r = -ar / R_p (r + a \sin \theta)$$

(1) $a = R_1, \dots\dots \Gamma_1$ は松村式直線歯形となり、滑り率 $(\sigma_i)_m, (\sigma_i')_m$ は ⁽¹⁴⁾

(i) 外接嚙合、($\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = +1$)

$$(\sigma_1')_m = r(1/R_1 + 1/R_2) / \sin \theta,$$

$$(\sigma_2)_m = r(1/R_1 + 1/R_2) / \{ \sin \theta + r(1/R_1 + 1/R_2) \}$$

(ii) 内接嚙合、($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$)

$$(\sigma_1')_m = r(1/R_1 - 1/R_2) / \sin \theta,$$

$$(\sigma_2)_m = r(1/R_1 - 1/R_2) / \{ \sin \theta + r(1/R_1 - 1/R_2) \}$$

(iii) ラックと小歯車の嚙合、($\varepsilon_p = -1$)

$$\sigma_p' = r / (R_p \sin \theta), \quad \sigma_r = r / (r + R_p \sin \theta)$$

(ロ) $a = 2a_2, b = 0, \dots\dots$ (サイクロイド歯形)

(i) 外接嚙合、($\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = +1$)

$$\sigma_1' = (1/R_1 + 1/R_2) / (1/a_2 - 1/R_1),$$

$$\sigma_2 = (1/R_1 + 1/R_2) / (1/a_2 + 1/R_2)$$

(ii) 内接嚙合、($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$)

$$\sigma_1' = (1/R_1 + 1/R_2) / (1/a_2 - 1/R_1),$$

$$\sigma_2 = (1/R_2 - 1/R_1) / (1/a_2 - 1/R_2)$$

(iii) ラックと小歯車の嚙合、($\varepsilon_p = -1$)

$$\sigma_p' = a_2 / R_p - a_2, \quad \sigma_r = a_2 / R_p$$

即ちサイクロイド歯形の滑り率は全部定値である。

2. 円弧歯形の滑り率

第 I 型円弧歯形

$$\Gamma: r = R_1 \sin \theta + a_1 - \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} \quad (15)$$

$$\sigma_1' = r(1/R_1 + 1/R_2)(a_1 - r) / (a_1 \sin \theta),$$

$$\sigma_2 = r(1/R_1 + 1/R_2) \{ a_1 \sin \theta / (a_1 - r) + r(1/R_1 + 1/R_2) \}$$

第 II 型円弧歯形

$$\Gamma: r = R_1 \sin \theta - a_1 + \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}$$

$$\sigma_1' = r(1/R_1 + 1/R_2)(a_1 + r) / (a_1 \sin \theta),$$

$$\sigma_2 = r(1/R_1 + 1/R_2) \{ a_1 \sin \theta / (a_1 + r) + r(1/R_1 + 1/R_2) \}$$

第 III 型円弧歯形

$$\Gamma: r = -R_2 \sin \theta + a_2 + \sqrt{d_2^2 - R_2^2 \cos^2 \theta}$$

$$\sigma' = r(1/R_1 + 1/R_2) \{ a_2 \sin \theta / (a_2 - r) - r(1/R_1 + 1/R_2) \},$$

$$\sigma_2 = r(1/R_1 + 1/R_2)(a_2 - r) / (a_2 \sin \theta).$$

第 IV 型円弧歯形

$$\Gamma: r = -R_2 \sin \theta - a_2 + \sqrt{d_2^2 - R_2^2 \cos^2 \theta}$$

$$\sigma_1' = r(1/R_1 + 1/R_2) \{ a_2 \sin \theta / (a_2 + r) - r(1/R_1 + 1/R_2) \},$$

$$\sigma_2 = r(1/R_1 + 1/R_2)(a_2 + r) / a_2 \sin \theta$$

例 III. 歯形の凹凸 歯形のピッチ点に対する凹凸の判定は嚙合方程式に重要である。

Γ 上の一点 (r, θ) に対応する歯形 Γ_i 上の曲率 $1/\kappa_i$ が ≥ 0 に従ひ歯形はこの点に於てピッチ点に対し凸又は凹である。この点に於て $1/\kappa_i$ の符号が變れば彎曲点である。

1. Γ が直線 (インボリュート歯形) 圧力角を α とすれば

第 I 象限: $\theta = \alpha$, 第 II 象限: $\theta = \pi - \alpha$

第 III 象限: $\theta = \pi + \alpha$,

第 IV 象限: $\theta = \pi - \alpha$, ($r' = \infty, 0 < \alpha < \pi/2$)

Γ 上ピッチ点からの距離 $l_i (\leq R_i \sin \alpha)$ なる点に対応する歯形 Γ_i 上の点の曲率は

$$1/\kappa_i = -\varepsilon_i / (R_i \sin \theta + \varepsilon_i l_i), \quad (i=1, 2)$$

外接嚙合 ($\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = +1$), (第 4 図 .a)

		第 I, II 象限	第 III, IV 象限
Γ_1	一般点	$l_1 < R_1 \sin \alpha \dots\dots$ 凸 [$\kappa_1 = R_1 \sin \alpha - l_1 > 0$]	$l_2 < R_2 \sin \alpha \dots\dots$ 凹 [$\kappa_1 = -R_1 \sin \alpha - l_2 < 0$]
	干渉点	$l_1 = R_1 \sin \alpha$ [$\kappa_1 = 0$]	
	ピッチ点	$l = 0$	
		[$\kappa_1 = R_1 \sin \alpha > 0$]	

(15) 應用例 IV. 参照。

(12) 歯車, 132 頁。 (13) 前掲, 脚註 (5)。 (14) 歯車, 154 頁。

		第 I, II 象限	第 III, IV 象限
Γ_2	一般点	$l_1 < R_1 \sin \alpha \dots\dots\dots$ 凹 [$\kappa_2 = - (R_2 \sin \alpha + l_1) < 0$]	$l_2 < R_2 \sin \alpha \dots\dots\dots$ 凸 [$\kappa_2 = - (-R_2 \sin \alpha + l_2) > 0$]
	干渉点		$l_2 = R_2 \sin \alpha$ [$\kappa_2 = 0$]
	ビッチ点	$l_1 = 0 \dots\dots\dots$ 凹 [$\kappa_2 = -R_2 \sin \alpha < 0$]	

内接噛合 ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$), (第4図 b)

		第 I, II 象限	第 III, IV 象限
Γ_1 及 Γ_2	一般点	$l < R_1 \sin \alpha < R_2 \sin \alpha \dots\dots\dots$ 凸 凹 $\begin{cases} \kappa_1 = R_1 \sin \alpha - l > 0 \\ \kappa_2 = R_2 \sin \alpha - l > 0 \\ \kappa_2 > \kappa_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \kappa_1 = - (R_1 \sin \alpha + l) < 0 \\ \kappa_2 = - (R_2 \sin \alpha + l) < 0 \\ \kappa_2 > \kappa_1 \end{cases}$
	干渉点	$l = R_1 \sin \alpha$ $\begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = (R_2 - R_1) \sin \alpha \end{cases}$	
	ビッチ点	$l = 0$ $\begin{cases} \kappa_1 = R_1 \sin \alpha \\ \kappa_2 = R_2 \sin \alpha \end{cases}$	

ラックと小歯車の噛合 ($\epsilon_p = -1$), (第4図 c)

Γ_p	内外接噛合の歯形 Γ_1 と同じ
Γ_r	$1/\kappa_r = -1/(r+r' \tan \alpha) = 0 \dots\dots\dots$ 直線

第4図 a 外接噛合

第4図 b 内接噛合

第4図 c ラックと小歯車の噛合

2. Γ が円 (サイクロイド歯形)第 I, II 象限: $r = 2a_2 \sin \theta$,第 III, IV 象限: $r = -2a_1 \sin \theta$, ($R_i > a_j > 0$)第 I, II 象限における曲率 $\frac{1}{\kappa_i} = -\frac{R_i + 2\epsilon_i a_2}{2r(R_i + \epsilon_i a_2)}$ 第 III, IV 象限における曲率 $\frac{1}{\kappa_i} = -\frac{R_i - 2\epsilon_i a_1}{2r(R_i - \epsilon_i a_1)}$ 外接噛合 ($\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = +1$)

		第 I, II 象限	第 III, IV 象限
Γ_1	一般点	$0 < \theta < \pi/2$ $\kappa_1 = -\frac{2r(R_1 - a_2)}{R_1 - 2a_2}$ $\begin{cases} R_1 < 2a_2 < 2R_1 \dots\dots\dots$ 凸 $2a_2 < R_1 \dots\dots\dots$ 凹	$-\pi/2 < \theta < 0$ $\kappa_1 = -\frac{2r(R_1 + a_1)}{R_1 + 2a_1}$ $\dots\dots\dots$ 凹
	ビッチ点	$\theta = 0, \kappa_1 = 0$	$\theta = 0, \kappa_1 = 0$
Γ_2	一般点	$0 < \theta < \pi/2$ $\kappa_2 = -\frac{2r(R_2 + a_2)}{R_2 + 2a_2}$ $\dots\dots\dots$ 凹	$-\pi/2 < \theta < 0$ $\kappa_2 = -\frac{2r(R_2 - a_1)}{R_2 - 2a_1}$ $\begin{cases} R_2 < 2a_1 < 2R_2 \dots\dots\dots$ 凸 $2a_1 < R_2 \dots\dots\dots$ 凹
	ビッチ点	$\theta = 0, \kappa_2 = 0$	$\theta = 0, \kappa_2 = 0$

第5図 $2a_2 < R_1$ のとき Γ_1 は凹 (I, II 象限) $2a_1 < R_2$ のとき Γ_2 は凹 (III, IV 象限)吟味を要するのは Γ_1, Γ_2 がともに凹の場合である。

第 I, II 象限に於て

$$|\kappa_1| - |\kappa_2| = 2a_2 r (R_1 + R_2) + [(R_2 + 2a_2)(R_1 - 2a_2)] > 0$$

第 III, IV 象限に於て

$$|\kappa_2| - |\kappa_1| = 2a_1 r (R_1 + R_2) + [(R_2 - 2a_1)(R_1 + 2a_1)] > 0$$

何れの場合にも不都合は生じない (第5図)。

内接噛合 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$)

	第 I, II 象限	第 III, IV 象限
Γ_1	外接噛合と同様	同左
F_2	一般点 $0 < \theta < \pi/2$ $\kappa_2 = -\frac{2r(R_2 - a_2)}{R_2 - 2a_2}$ $\begin{cases} R_2 < 2a_2 < 2R_1 \dots \text{凸} \\ 2a_2 < R_2 \dots \text{凹} \end{cases}$	$-\pi/2 < \theta < 0$ $\kappa_2 = -\frac{2r(R_2 + a_1)}{R_2 + 2a_1}$凹
ピッチ点	$\theta = 0, \kappa_2 = 0$	$\theta = 0, \kappa_2 = 0$

吟味を要するのは次の場合である。

第 I, II 象限に於て

(i) Γ_1, Γ_2 ともに凸 ($R_1 < R_2 < 2a_2 < 2R_1$)

$$\kappa_2 - \kappa_1 = -\frac{2r(R_2 - a_2)}{R_2 - 2a_2} + \frac{2r(R_1 - a_2)}{R_1 - 2a_2} = \frac{2ra_2(R_2 - R_1)}{(2a_2 - R_1)(2a_2 - R_2)} > 0$$

故に可能である (第 6 図 a)。

(ii) Γ_1 は凹、 Γ_2 は凸。 Γ_1 に対し $2a_2 < R_1$, Γ_2 に対し $R_2 < 2a_2 < 2R_1$ 。

故に $R_2 < R_1$ となり、 $R_2 > R_1$ に矛盾し、不可能である。

(iii) Γ_1 は凸、 Γ_2 は凹。 $R_1 < 2a_2 < R_2 < 2R_1$ 。

第 6 図 a Γ_1, Γ_2 ともに凸

第 6 図 b Γ_1, Γ_2 ともに凹

第 6 図 c Γ_1, Γ_2 ともに凹

この組合せは可能である。

(iv) Γ_1, Γ_2 ともに凹。 Γ_1 に対し $2a_2 < R_1$, Γ_2 に対し $2a_2 < R_2$ 。

$$|\kappa_1| - |\kappa_2| = \frac{2r(R_1 - a_2)}{R_1 - 2a_2} - \frac{2r(R_2 - a_2)}{R_2 - 2a_2} = \frac{2r(R_2 - R_1)}{(R_1 - 2a_2)(R_2 - 2a_2)} > 0$$

故に可能である (第 6 図 b)。

第 III, IV 象限に於ては Γ_1, Γ_2 ともに凹の場合

$$|\kappa_2| - |\kappa_1| = \frac{2r(R_2 - R_1)a_1}{(R_1 + 2a_1)(R_2 + 2a_1)} > 0$$

故に可能である (第 6 図 c)。

3. Γ がリマソン: $r = a \sin \theta \mp b$, ($a, b > 0$)

但し (16) $-b$ のとき $2R_1 \geq a$ ならば同時に $a < b$

$2R_1 < a$ ならば $b/(a - 2R_1) > \sin \theta > b/a$

$+b$ のとき $2R_1 > a + b$

曲率は

$$1/\kappa_i = -(R_i + \varepsilon_i a) / \{a(2R_i + \varepsilon_i a) \sin \theta \mp b(R_i + \varepsilon_i a)\}$$

$$1/\kappa_r = -1/(2a \sin \theta \mp b)$$

外 接 噛 合 (第 7 図)

a の値	Γ_1 の曲率 $1/\kappa_1$	Γ_1 の凹凸	Γ_2 の曲率 $1/\kappa_2$	Γ_2 の凹凸	Γ の範囲
$a = R_1$	0	$-b$ 直線 $+b$ 直線	$-(R_1 + R_2)$ $+ \{R_1(R_1 + 2R_2) \sin \theta \mp b(R_1 + R_2)\}$	$-b$ 凹 $+b$ 凹	$\sin^{-1} \frac{b}{R_1} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + 2R_2} \sim \frac{\pi}{2}$ $0 \sim \frac{\pi}{2}$
$a < R_1$	$-(R_1 - a)$ $+ \{a(2R_1 - a) \sin \theta \mp b(R_1 - a)\}$	$-b$ 凹 $+b$ 凹	$-(a + R_2)$ $+ \{a(a + 2R_2) \sin \theta \mp b(a + R_2)\}$	$-b$ 凹 $+b$ 凹	$\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{a + R_2}{a + 2R_2} \sim \frac{\pi}{2}$ $\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{a - R_1}{2R_1 - a} \sim \frac{\pi}{2}$
$R_1 < a < 2R_1$	同上	$-b$ 凸 $+b$ 凸	同上	$-b$ 凹 $+b$ 凹	同上
$2R_1 < a$	$-(R_1 - a)$ $+ \{a(2R_1 - a) \sin \theta \mp b(R_1 - a)\}$	$-b$ 凸凹不能 $+b$不能	$-(a + R_2)$ $+ \{a(a + 2R_2) \sin \theta \mp b(a + R_2)\}$	$-b$凹不能 $+b$不能	$\sin^{-1} \frac{b}{a} > \theta < \sin^{-1} \frac{b}{a}$

(16) この制限及び Γ の範囲に関しては読者参照。

[昭和 18 年 5 月]

内、外接嚙合の場合、 a 及び b の値に対する歯形 Γ_1 , Γ_2 の組合はせの吟味は続報に詳述する。

例 IV. 定曲率歯形の接触点の軌跡

1. 直線歯形 歯形 Γ_1 が直線となるためには
 $1/\kappa_1=0$ より $r'=R_1 \cos \theta$

積分して初期条件を $\theta=0$ のとき $r=R \pm b$, ($0 < b < R_1$) と定めれば、求める接触点の軌跡は次のリマソンとなる。

$$r=R_1 \sin \theta \pm b$$

2. 円弧歯形 第 I 型円弧歯形: 第 8 図の如く Γ_1 の歯本の面に半径 a_1 なる円弧を與へたものである。曲率半径

第 7 図 c. $2R_1 > a > R_1$

内 接 嚙 合

a の値	Γ_1 の曲率 $1/\kappa_1$	Γ_1 の凹凸	Γ_2 の曲率 $1/\kappa_2$	Γ_2 の凹凸	Γ の範囲
$a=R_1$	0	$-b$ $+b$ 直線	$-(R_2-R_1)$ $\div \{a(2R_2-R_1) \sin \theta$ $\mp b(R_2-R_1)\}$	$-b$ $+b$... 凹	$\sin^{-1} \frac{b}{R_1} \frac{R_2-R_1}{2R_2-R_1} \sim \frac{\pi}{2}$ $0 \sim \frac{\pi}{2}$
$a < R_1$	$-(R_1-a)$ $\div \{a(2R_1-a) \sin \theta$ $\mp b(R_1-a)\}$	$-b$ $+b$ 凹	$-(R_2-a)$ $\div \{a(2R_2-a) \sin \theta$ $\mp b(R_2-a)\}$	$-b$ $+b$... 凹	$\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{R_2-a}{2R_2-a} \sim \frac{\pi}{2}$ $\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{a-R_1}{2R_1-a} \sim \frac{\pi}{2}$
$R_1 < a < 2R_1$	$(R_2 > a$ のとき) 同 上 $(R_2 < a$ のとき) 同 上	$-b$ $+b$ 凸	同 上	$-b$ $+b$... 凹 $-b$ $+b$... 凸	$\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{R_2-a}{2R_2-a} \sim \frac{\pi}{2}$ $\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{R_2-a}{2R_2-a} \sim \frac{\pi}{2}$
$a > 2R_1$	$(2R_2 > a > R_2$ のとき) $-(R_1-a)$ $\div \{a(2R_1-a) \sin \theta$ $-b(R_1-a)\}$ $(R_2 > a > 2R_1$ のとき) 同 上	$-b$ $+b$ 凸 凹 不能 $-b$ $+b$ 凸 凹 不能	$-(R_2-a)$ $\div \{a(2R_2-a) \sin \theta$ $-b(R_2-a)\}$ 同 上	$-b$ 凸 $+b$... 不能 $-b$ 凸 $+b$... 不能	$\sin^{-1} \frac{b}{a-R_1} \sim$ $\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{a-R_1}{a-2R_1}$ $\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{a-R_2}{a-2R_2} \sim$ $\sin^{-1} \frac{b}{a} \frac{a-R_1}{a-2R_1}$

-b のとき
第 7 図 c $a > 2R_1$

第 8 図 a 第 I 型凹弧齒形

第 8 図 b

第 8 図 c

の正方向は $0 \rightarrow M$ であるから

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{-1}{a_1} = -\frac{R_1 \cos \theta - r'}{R_1 r \cos \theta + (R_1 \sin \theta - r)r'}$$

この完全微分方程式の解は

$$r^2 - 2(R_1 \sin \theta + a_1)r + 2a_1 R_1 \sin \theta = \text{const. } C$$

積分常数 C は $\theta = \pi/2$ の条件から定まる:

$$\overline{C_1 O_1} = d_1, \quad \varepsilon = d_1 - R_1 > 0, \quad r_0 = \pi/2 = a_1 - (d_1 - R_1)$$

$$\therefore C = d_1^2 - R_1^2 - a_1^2$$

故に求める接触点の軌跡 Γ は

$$r = a_1 + R_1 \sin \theta - \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}, \quad (d_1 > R_1)^{(17)}$$

同様にして第 II 型の Γ は:

$$r = -a_1 + R_1 \sin \theta + \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}$$

第 III 型の Γ は

$$r = a_2 - R_2 \sin \theta + \sqrt{d_2^2 - R_2^2 \cos^2 \theta}$$

第 IV 型の Γ は

$$r = -a_2 - R_2 \sin \theta + \sqrt{d_2^2 - R_2^2 \cos^2 \theta}$$

$\rho < 0$

第 9 図

3. 移動距離 並に速度

一平面上の点の位置を決定するため直交座標系に於て特に x -軸のみを任意の正則曲線に置き代へた様な特種の曲線座標系 [C] を用ひることが出来る。即ち或正則曲線 Σ を母曲線 x とし、その上の任意点 O を原点、 O 点における法線を y 軸とす。而して一点 P の座標 x 及び y を

(17) $d_1 > R_1$ なる条件に関しては補報に説明する。

$x = \text{弧 } \widehat{OQ}$ の長さ $y = \text{法線 } \overrightarrow{OP}$ の長さ

と定義する (第 9 図)。点 Q は点 P より Σ への法線の足とし、 x 及び y の符号は直交座標系の x 及び y の関係に置く。次に [C] 系の線素 (Linienlement) の形を調べる。点 $P(x, y)$ の隣点を $P'(x+dx, y+dy)$ とし、 P 点を通り母曲線 Σ に平行な曲線⁽¹⁸⁾ Σ' を引くことにより線素 ds は次の如く表はされることを知る。

$$ds^2 = dx^2(1 - y/\rho)^2 + dy^2 \quad \dots\dots\dots(9)$$

茲に ρ は Q 点における Σ の曲率半径である。

今歯車 O_1, O_2 が歯形曲線 Γ_1, Γ_2 が或瞬間 Γ 上の一点 M に於て互に接触し、次の瞬間には Γ_i 上点 N_i が Γ 上の点 M' に於て相接触するものとする。このとき歯形 Γ_i を母曲線とする [C]_i 系を考へる。但し原点は Γ_i 上例へばピッチ円との交点 F_i とし母曲線の方法は第 10 図の如く選ぶ。 Γ が [P] 系により $r=f(\theta)$ と表はされてあれば、[C]_i 系に関して

第 10 図

点 O の座標: $x = \text{弧 } \widehat{F_i M} = s_i, y = |\overrightarrow{MO}| = r$

次の瞬間相接触すべき N_i 点における Γ_i の法線がピッチ円と交はる点 O_i' は、点 N_1 及び点 N_2 が接触する瞬間共に回轉してピッチ点に相重なるべきにより $\widehat{O_1'O} = \widehat{O_2'O}$ にして $\widehat{O_1'N_1} = \widehat{O_2'N_2}$ がこの瞬間における Γ の動径の長さになる。従て [C]_i 系に関して

点 O_i' の座標:

$$x = \text{弧 } \widehat{F_i N_i} = s_i + ds_i, y = |\overrightarrow{N_i O_i'}| = y + dy = r + dr$$

但し歯形 Γ_i の微小の長さ $\widehat{MN_i}$ を ds_i としてある。故にピッチ円弧の線素 $\widehat{OO_i'} = d\lambda$ と歯形 Γ_i の線素 ds_i の関係は (9) 式により

$$d\lambda^2 = ds_i^2(1 - r/\rho_i)^2 + dr^2$$

$$\text{然るに } dr = d\lambda \cdot \cos \theta \quad \dots\dots\dots(10)$$

(18) Σ 上の各点より法線上等距離にとつた点の軌跡。L. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of Curves & Surfaces, (Princeton 19), p. 86. (19) (10) (11) 式より $ds_i = \kappa_i \sin \theta \cdot d\lambda / (\kappa_i + r)$ の関係が求められる。逆に $ds_i = \kappa_i \sin \theta \cdot d\lambda / (\kappa_i + r)$ より (11) 式が直接求まるが歯形曲線論に [C] 系が便利なることを紹介するため敢て上述の方法をとつた。

及び κ_i が $-\rho_i$ に等しいことに注意すれば

$$ds_i = \kappa_i \tan \theta \cdot dr / (\kappa_i + r) \quad \dots\dots\dots(11)^{(19)}$$

この式に

$$1/\kappa_i = - (R_i \cos \theta + \varepsilon_i r) / \{ R_i r \cos \theta + (R_i \sin \theta + \varepsilon_i r) r' \}$$

を代入して

$$\left. \begin{aligned} s_i &= \int_{(r)} \frac{R_i r \cos \theta + (R_i \sin \theta + \varepsilon_i r) r'}{R_i \cos \theta \cdot r'} dr \\ &= \int_{(\theta)} \frac{R_i r \cos \theta + (R_i \sin \theta + \varepsilon_i r) r'}{R_i \cos \theta} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(12)$$

但し $\varepsilon_i = \pm 1$ にして第 1 表に従ふ。ラックと小歯車の噛合ひのときは、小歯車に対しては $i=p, \varepsilon_p = -1$ とおく。ラックに対しては $i=r, R_2 \rightarrow \infty$ の極限をとる:

$$\begin{aligned} s_p &= \int_{(r)} \frac{R_p r \cos \theta + (R_p \sin \theta - r) r'}{R_p \cos \theta \cdot r'} dr \\ &= \int_{(\theta)} \frac{R_p r \cos \theta + (R_p \sin \theta - r) r'}{R_p \cos \theta} d\theta \\ s_r &= \int_{(r)} \frac{r \cos \theta + r' \sin \theta}{r' \cos \theta} dr = \int_{(\theta)} \frac{r \cos \theta + r' \sin \theta}{\cos \theta} d\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(13)$$

(10) 式より Γ 上の移動距離に対するピッチ円弧の回轉距離 $\lambda_i (i=1, 2; p)$ 及び刻み線上の移動距離 λ_r が求められる:

$$\lambda_i = \lambda_r = \int_{(r)} \frac{dr}{\cos \theta} = \int_{(\theta)} \frac{r' d\theta}{\cos \theta} \quad \dots\dots\dots(14)$$

従て O_i -車の回轉角 φ_i は

$$\varphi_i = \frac{1}{R_i} \int_{(r)} \frac{dr}{\cos \theta} = \frac{1}{R_i} \int_{(\theta)} \frac{r' d\theta}{\cos \theta}, \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(15)$$

又接触点の軌跡上の移動距離 s は

$$s = \int_{(r)} \sqrt{1 + r'^2/r^2} dr = \int_{(\theta)} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta \quad \dots\dots\dots(16)$$

第 11 図

以上の関係図は第 11 図を参照されたい。

歯形 Γ_i は接触点 M が歯車の回轉に伴ひ Γ 上を移動することにより創成されるとみれば、点 M の Γ_i 及び Γ 上の速度並にピッチ円 (ピッチ線) 上の点の速度が考へられる。その方向は各曲線の切線方向であることは勿論である。今

$$\left. \begin{aligned} &\text{接触点の軌跡 } \Gamma \text{ 上の} \\ &\text{歯形 } \Gamma_i \text{ 上の} \\ &\text{ピッチ円 (線) 上の} \end{aligned} \right\} \text{速度の大きさを } \begin{cases} v \\ v_i \\ v_{\lambda_i}, (i=1, 2; p, r) \end{cases}$$

とすれば (15) 式から

$$O_i\text{-車の角速度 } \omega_i = d\varphi_i/dt = (r'/R_i \cos \theta)(d\theta/dt)$$

であるから各速度の大きさが求まる。

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega_i R_i \cos \theta \sqrt{r^2 + r'^2}/r' \\ v_i &= \omega_i \{R_i r \cos \theta + (R_i \sin \theta + \varepsilon_i r) r'\}/r' \\ v_r &= \omega_p R_p (r \cos \theta + r' \sin \theta)/r' \\ v_{\lambda i} &= R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2, \quad v_{\lambda r} = R_p \omega_p \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

4. 應 用 例 (その 2)

例 I. 接触弧 歯形 Γ_i を適当な長さに截れば 1 対の歯形が接触を継続する間のピッチ円の回轉弧の長さが定まる。この長さを接触弧と云ひ、ピッチ点に於て二分し回轉方向を考へて近寄弧及び遠退弧とする。このとき接触点の軌跡 Γ はピッチ点を通つて第 I (II) 象限から第 III (IV) 象限に連結してゐることは勿論である。

近寄(遠退)に対する接触点の軌跡 $\Gamma(\Gamma): r_i = f_i(\theta_i)$

臨界接触点 $M_i(r_i, \theta_i), (i=1, 2)$

とすれば

$$\text{近寄弧} = \left| \int_0^{r_1} \frac{dr_1}{\cos \theta_1} \right|, \quad \text{遠退弧} = \left| \int_0^{r_2} \frac{dr_2}{\cos \theta_2} \right|,$$

$$\text{接触弧} = \sum_i \left| \int_0^{r_i} \frac{dr_i}{\cos \theta_i} \right|$$

1. インボリュート歯形の接触弧⁽²⁰⁾

圧力角 α , $\Gamma: \theta = \alpha + \pi$, $\bar{\Gamma}: \theta = \alpha$, $(0 < \alpha < \pi/2)$

臨界接触点 $M_1(r_2 \leq R_2 \sin \alpha, \alpha + \pi)$, $M_2(r_1 \leq R_1 \sin \alpha, \alpha)$

$$\text{接触弧} = \sum_i \left| \int_0^{r_i} \frac{dr_i}{\cos \alpha} \right| = (r_1 + r_2)/\cos \alpha$$

2. サイクロイド歯形の接触弧⁽²¹⁾

接触点の軌跡は円 $\Gamma: r_1 = -2a_1 \sin \theta_1$,

$$\bar{\Gamma}: r_2 = 2a_2 \sin \theta_2$$

臨界接触点の圧力角を α_i とすれば

$$\text{接触弧} = \sum_i \left| \int_0^{\alpha_i} r_i' d\theta_i / \cos \theta_i \right| = 2(a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1)$$

例 II. Γ が直線のときの長さ及び速度の関係 (インボリュート歯形)

$$\Gamma: \theta = \alpha, (0 < \alpha < \pi/2, r' = \infty)$$

(イ) 歯車同志の噛合 ピッチ点よりの距離 $l_0, l_1 (\leq R_1 \times \sin \alpha)$ なる 2 点に対応して

$$s_i = \int_{l_0}^{l_1} \frac{R_i \sin \alpha + \varepsilon_i r}{R_i \cos \alpha} dr = (l_1 - l_0) \frac{2R_i \sin \alpha + \varepsilon_i (l_1 - l_0)}{2R_i \cos \alpha}$$

$$\lambda = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dr}{\cos \alpha} = \frac{l_1 - l_0}{\cos \alpha}, \quad s = \int_{l_0}^{l_1} dr = l_1 - l_0$$

ピッチ点 ($l_0 = 0$) から干渉点 ($l_1 = R_1 \sin \alpha$) までに対して

$$s_1 = R_1 \tan \alpha \cdot \sin \alpha / 2, \quad s_2 = R_1 \tan \alpha \cdot \sin \alpha (1 + \varepsilon_i / 2),$$

$$\lambda = R_1 \tan \alpha, \quad s = R_1 \sin \alpha \quad \text{但し} \quad \varepsilon = R_2 / R_1$$

(ロ) ラックと小歯車の噛合 l_0, l_1 点に対し

$$s_r = \int_{l_0}^{l_1} \tan \alpha dr = (l_1 - l_0) \tan \alpha, \quad \lambda_r = \lambda$$

ピッチ点から干渉点までに対応して

$$s_r = R_1 \tan \alpha \cdot \sin \alpha, \quad \lambda_r = R_1 \tan \alpha$$

速度の関係は

$$v_i = (R_i \sin \alpha + \varepsilon_i r) \omega_i, \quad v_r = R_p \omega_p \sin \alpha$$

$$v = R_i \omega_i \cos \alpha, \quad v_{\lambda i} = R_i \omega_i, \quad v_{\lambda r} = R_p \omega_p$$

例 III. Γ がリマソン $r = a \sin \theta \mp b$ ($a, b > 0$)

$$s_i = \frac{1}{R_i} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \{a(2R_i + \varepsilon_i a) \sin \theta \mp b(R_i + \varepsilon_i a)\} d\theta$$

$$= \{a(2R_i + \varepsilon_i a)(\cos \theta_0 - \cos \theta_1) \mp b(R_i + \varepsilon_i a)(\theta_1 - \theta_0)\} / R_i$$

$$\text{又は} = \frac{1}{a R_i} \int_{r_0}^{r_1} \{a(2R_i + \varepsilon_i a) \tan \theta \mp b(R_i + \varepsilon_i a) \sec \theta\} dr$$

$$= (2R_i + \varepsilon_i a) \{ \sqrt{a^2 - (r_0 \pm b)^2} - \sqrt{a^2 - (r_1 \pm b)^2} \} / R_i$$

$$\mp b(R_i + \varepsilon_i a) [\sin^{-1}\{(r_1 \pm b)/a\} - \sin^{-1}\{(r_0 \pm b)/a\}] / R_i$$

$$s_r = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (2a \sin \theta \mp b) d\theta = 2a(\cos \theta_0 - \cos \theta_1) \mp b(\theta_1 - \theta_0)$$

又は

$$= 2 \int_{r_0}^{r_1} \tan \theta dr \mp \left(\frac{b}{a}\right) \int_{r_0}^{r_1} \sec \theta dr$$

$$= 2(\sqrt{a^2 - (r_0 \pm b)^2} - \sqrt{a^2 - (r_1 \pm b)^2}) \mp b$$

$$[\sin^{-1}\{(r_1 \pm b)/a\} - \sin^{-1}\{(r_0 \pm b)/a\}]$$

$$\lambda_i = \lambda_r = \int_{\theta_0}^{\theta_1} r_i d\theta / \cos \theta = a(\theta_1 - \theta_0)$$

又は

$$= \int_{r_0}^{r_1} dr / \cos \theta = a[\sin^{-1}\{(r_1 \pm b)/a\} - \sin^{-1}\{(r_0 \pm b)/a\}]$$

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{a^2 \mp 2ab \sin \theta + b^2} d\theta$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left[\theta_1 - \theta_0 \pm 2 \frac{ab}{a^2 + b^2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_0) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_0) + \theta_1 - \theta_0 \right\} + \dots \right]$$

但し $ab/(a^2 + b^2) < 1$

速度の関係は $\omega_2 = \omega_1/\varepsilon$, ($\varepsilon = R_2/R_1$)

$$v_1 = \{\sin \theta \cdot (2R_1 - 1) \mp b(1 + R_1/a)\} \omega_1,$$

$$v_2 = \{\sin \theta (2R_2 + 1) \mp b(1 + R_2/a)\} \omega_2$$

$$v_r = R_p (2 \sin \theta \mp b/a) \omega_p, \quad v = R_i \omega_i \sqrt{a^2 \pm 2ab \sin \theta + b^2}/a$$

$$v_{\lambda i} = R_i \omega_i, \quad v_{\lambda r} = R_p \omega_p$$

(i) サイクロイド歯形 上記の式に於て $a = 2a_2, b = 0$ とおけばよい。例へばピッチ点 ($\theta_0 = 0, r_0 = 0$) から点 (r_1, θ_1) までに対応して

$$s_i = 4a_2(R_i + \varepsilon_i a_2)(1 - \cos \theta_1)/R_i$$

$$= 2(R_i + \varepsilon_i a_2)(2a_2 - \sqrt{4a_2^2 - r_1^2})/R_i$$

$$s_r = 4a_2(1 - \cos \theta_1) = 2(2a_2 - \sqrt{4a_2^2 - r_1^2})$$

$$\lambda_i = \lambda_r = 2a_2 \theta_1 = 2a_2 \sin^{-1}(r_1/2a_2)$$

この最後の式は Γ 上の弧の長さ $\widehat{OP}$ がピッチ円の弧の長さ $\widehat{OQ}$ 及び $\widehat{OQ'}$ (又はピッチ線の長さ $\widehat{OP'}$) に等しいことを示す。即ち円 Γ が滑ることなく O_1 円の内側及び O_2 円の外側を (又はピッチ線上を) 轉がることを意味する。實際サイクロイド歯形は斯様にして出来たものである (第 12 図)。

[昭和 18 年 5 月]

(20) 齒車, 186 頁。

(21) 齒車, 264 頁。

$$\begin{aligned}
& + b(1/R_1 + 1/R_2) \sin^{-1}\{(r_1 - b)/R_1\}] \\
s_r &= 2R_p(1 - \cos \theta_1) + b\theta_1 \\
&= 2\{R_p - \sqrt{R_p^2 - (r_1 - b)^2}\} + b \sin^{-1}\{(r_1 - b)/R_p\} \\
\lambda_i &= \lambda_r = R_1 \theta_1 = R_1 \sin^{-1}\{(r_1 - b)/R_1\} \\
s &= \sqrt{R_1^2 + b^2} \left\{ \theta_1 + 2 \frac{R_1 b}{R_1^2 + b^2} (1 - \cos \theta_1) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{R_1 b}{R_1^2 + b^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_1 + \theta_1 + \dots \right) + \dots \right\}
\end{aligned}$$

故に例へば $\theta_0 = 0$ から $\theta_1 = \pi/2$ までに対応しては (第 13 図 b)

$$\begin{aligned}
s_1 &= R_1, \quad s_2 = R_1(2 + R_1/R_2) + (b\pi/2)(1/R_1 + 1/R_2) \\
s_r &= 2R_p + b\pi/2, \quad \lambda_i = \lambda_r = R_1\pi/2 \\
s &= \sqrt{R_1^2 + b^2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2R_1 b}{R_1^2 + b^2} + \frac{\pi}{8} \left(\frac{R_1 b}{R_1^2 + b^2} \right)^2 + \dots \right\}
\end{aligned}$$

速度の関係は $\omega_2 = \omega_1/\varepsilon$, ($\varepsilon \equiv R_2/R_1$)

$$\begin{aligned}
v_1 &= \{\sin \theta(2R_1 - 1) + 2b\}\omega_1, \\
v_2 &= \{\sin \theta(2R_2 + 1) + b(1 + R_2/R_1)\}\omega_1 \\
v_r &= R_p\omega_p(2 \sin \theta + b/R_1), \\
v &= \omega_1 \sqrt{R_1^2 + 2R_1 b \sin \theta + b^2} \\
v_{\lambda_i} &= R_i\omega_i, \quad v_{\lambda_r} = R_p\omega_p
\end{aligned}$$

例 IV. 円弧歯形 第 I 型 $\Gamma: r = a_1 + R_1 \sin \theta$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}, \quad (d_1 > R_1) \\
s_1 &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{q_1 R_1 \sin \theta d\theta}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}} \\
&= a_1 \left(\sin^{-1} \frac{R_1 \cos \theta_0}{d_1} - \sin^{-1} \frac{R_1 \cos \theta_1}{d_1} \right) \\
s_2 &= \frac{a_1}{R_2} (R_1 + R_2)(\theta_1 - \theta_0) - 2 \frac{R_1}{R_2} (R_1 + R_2)(\cos \theta_1 - \cos \theta_0) \\
& \quad + \frac{a_1 R_1}{R_2} \left(\sin^{-1} \frac{R_1 \cos \theta_1}{d_1} - \sin^{-1} \frac{R_1 \cos \theta_0}{d_1} \right) \\
& \quad - \frac{R_1}{R_2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} d\theta \\
& \quad - \frac{R_1^2}{R_2} (R_1 + R_2) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}} \\
s_r &= a_1(\theta_1 - \theta_0) - 2R_1(\cos \theta_1 - \cos \theta_0) \\
& - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} d\theta - R_1^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}} \\
s_2, s_r \text{ の最後の 2 項の積分は } R_1/d_1 &= k (< 1), \cos \theta = x \text{ とお} \\
& \text{けば夫々 Jacobi 型の楕円積分となり計算が出来る}^{(22)}. \\
& -\frac{1}{d_1} \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} d\theta = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\
&= \left[x + \frac{1}{3 \cdot 2} (1 - k^2) x^3 + \frac{1}{5 \cdot 2^2} \left(\frac{1 \cdot 3}{2!} - \frac{k^2}{1!} - \frac{1}{2!} k^4 \right) x^5 \right. \\
& \quad \left. + \dots \right]_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_1} \\
& -d_1 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} dx \\
&= \left[x - \frac{1}{3 \cdot 2} (1 - k^2) x^3 - \frac{1}{5 \cdot 2^2} \left(\frac{1}{2!} - k^2 - \frac{1 \cdot 3}{2!} k^4 \right) x^5 \right. \\
& \quad \left. - \dots \right]_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_1}
\end{aligned}$$

(22) 例へば Whittaker, Watson, Modern Analysis, p. 491.

$$\begin{aligned}
\text{又 } \lambda_i &= \lambda_r = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r' d\theta}{\cos \theta} = R_1 \left(\theta_1 - \theta_0 + \sin^{-1} \frac{R_1 \cos \theta_1}{d_1} \right. \\
& \quad \left. - \sin^{-1} \frac{R_1 \cos \theta_0}{d_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{(a_1 + R_1 \sin \theta)^2 + d_1^2 - 2(a_1 + R_1 \sin \theta)}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}} + \frac{R_1^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} - \frac{2R_1^3 \sin \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}}} d\theta
\end{aligned}$$

となり s は簡単に初等函数では表はされない。

ピッチ点 $\left[\theta_0 = \sin^{-1} \frac{d_1^2 - R_1^2 - a_1^2}{2b_1 R_1} \right]$ から $\pi/2$ までに対し

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \sin^{-1} \frac{R_1 \cos \theta_0}{d_1} = a_1 \varphi \\
\lambda_i &= \lambda_r = R_1(\pi/2 - \theta_0 - \varphi)
\end{aligned}$$

第 14 図

s_2, s_r 及び s に対しては上式の θ_1 を $\pi/2$ とすればよい。茲に φ は Γ_1 がピッチ点を通過するとき、円弧の中心 C_1 より歯車の中心 O_1 及びピッチ点 O を視る角 (第 14 図)。速度の関係は

$$\omega_2 = \omega_1/\varepsilon, \quad (\varepsilon \equiv R_2/R_1)$$

$$\begin{aligned}
v_i &= \left\{ \frac{R_i}{R_1} \frac{r \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} - R_1 \sin \theta} + R_i \sin \theta + \varepsilon_i r \right\} \omega_i \\
v_r &= \left[\frac{\sqrt{d_1^2 - R_p^2 \cos^2 \theta} (a_1 + 2R_p \sin \theta) + R_p^2 \cos^2 \theta - d_1^2}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} - R_p \sin \theta} \right] \omega_p \\
v &= \omega_1 \sqrt{R_1^2 \cos^2 \theta + \sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} \left\{ 1 - \frac{a_1}{\sqrt{d_1^2 - R_1^2 \cos^2 \theta} - R_1 \sin \theta} \right\}^2} \\
v_{\lambda_i} &= R_i \omega_i, \quad v_{\lambda_r} = R_p \omega_p
\end{aligned}$$

第 II~第 IV 型円弧歯形に就ても同様に計算が出来る。

5. 結 語

以上により接触点の軌跡と歯形曲線及びピッチ円の間の量的関係を闡明した。

最後に本研究は成瀬政男教授の御指導の下に行はれたもので終始御懇切な御教示を賜はつた教授に対し深く感謝の意を表するものである。 (昭利 18 年 3 月 15 日受付)

[昭利 18 年 5 月