T 形き裂を有する圧電材料の電気熱弾性応答 *

上田 整^{*1}, 波多野 弘和^{*2}

T-Shaped Crack in a Piezoelectric Material under Thermo-Electro-Mechanical Loadings

Sei UEDA^{*1} and Hirokazu HATANO^{*1} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

The thermo-electro-mechanical fracture problem of an infinite piezoelectric material containing a T-shaped crack is considered in this study. The problem is solved for an infinite piezoelectric material that is under a uniform heat flow, uniform mechanical loads in two directions and a uniform electric load far away from the crack region. The crack faces are supposed to be completely insulated. By using the Fourier transform, the thermal and electromechanical problems are reduced to systems of singular integral equations, respectively. The singular integral equations are solved numerically. Numerical calculations are carried out, and detailed results are presented to illustrate the influence of the thermo-electro-mechanical interaction on the stress and electric displacement intensity factors.

Key Words : Stress Intensity Factor , Fracture Mechanics , Elasticity , Thermal Stress , Piezoelectric Material , T-Shaped Crack , Integral Transform

1. 緒 言

圧電材料は熱系・電気系・力学系という異種現象間でのエネルギー相互変換機能を有する機能性材料であるため、センサやアクチュエータとして幅広く用いられている。また、それらの特性を活かすことにより、温度変化に起因する熱変形を適切に制御できる知能材料システムの構築が可能となる⁽¹⁾。この知能材料システムの健全性評価および寿命予測には、熱的環境下にある圧電材料を対象とした電気熱弾性破壊力学的挙動の解明が重要であり、単一き裂を対象とした研究例は定常および非定常問題について数多く報告されている^{(2)~(10)}。

一方、圧電材料内には多数のき裂が存在し、それらの相互干渉により破壊に至ることが多く、破壊挙動に及ぼすき裂間相互干渉の影響を明らかにすることも重要である。そのため、著者らによって熱的電気的負荷を受ける二個の平行き裂問題^{(11), (12)}、熱的負荷を受ける二個の共線等長き裂問題⁽¹³⁾、熱的機械的負荷を受ける複数の貫通き裂問題⁽¹⁴⁾などが報告されている。また、Kida らの研究⁽¹⁵⁾において主き裂から垂直にき裂が発生する破壊形態も観察されている。従って、主き裂と主き裂から垂直に発生したき裂から成る T 形き裂を対象とした研究も実用上有用であると考えられる。

そこで本報では、T 形き裂を有する無限圧電材料を考え、無限遠方で一様な熱流、電束密度および機械的応力が作用する場合のき裂先端の特異場を理論解析した。き裂面の境界条件には工学上有効とされる非透過型の電気的境界条件を用いた^{(16), (17)}。解析には、Fourier 変換法を用い^{(18), (19)}、問題の解を連立特異積分方程式の解に帰着して解く方法を採用した。連立特異積分方程式の数値解析には、Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽²⁰⁾を用い、応力・電束密度拡大係数に及ぼす T 形き裂の幾何学的形状の影響を明らかにした。

* 原稿受付 2010 年 9 月 24 日

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部 (〒 535-8585 大阪府大阪市旭区大宮 5-16-1)^{*2} 学生員, 大阪工業大学工学部機械工学科

Email: ueda@med.oit.ac.jp

2. 問題の設定と基礎式

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において, $x = 0$ 面上の長さ $2a$ の縦き裂, $z = 0$ 面上の長さ $2b$ の横き裂から成る T 形き裂を有する無限圧電材料を考え, 平面ひずみを仮定する. この圧電材料に z 軸方向の無限遠方で一様な熱流 q_0 , 電束密度 D_0 および $x \cdot z$ 軸方向の無限遠方で一様な機械的垂直応力 σ_{0x} , σ_{0z} が作用する問題を設定し, き裂面は熱的, 電氣的に絶縁されているものとする^{(16), (17)}. なお, 弾性定数を c_{11} , c_{13} , c_{33} , c_{44} , 圧電定数を e_{15} , e_{31} , e_{33} , 誘電定数を ϵ_{11} , ϵ_{33} , 熱弾性定数を λ_{11} , λ_{33} , 熱伝導率を κ_x , κ_z , 焦電定数を p_z で表し, 下添字 x, y, z で座標軸方向を示し, 下添字 $i = 1, 2$ はそれぞれ $0 \leq z < \infty$, $-\infty < z \leq 0$ の領域の場を表す.

Fig. 1 T-Shaped crack in a piezoelectric material

温度を $T_i(x, z)$, 静電ポテンシャルを $\phi_i(x, z)$, 変位ベクトルの成分を $u_{xi}(x, z)$, $u_{zi}(x, z)$ とすると, 応力テンソルの成分 $\sigma_{xxi}(x, z)$, $\sigma_{zzi}(x, z)$, $\sigma_{zxi}(x, z)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_{xi}(x, z)$, $D_{zi}(x, z)$ ($i = 1, 2$) は次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xxi} &= c_{11} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{11} T_i \\ \sigma_{zzi} &= c_{13} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{33} T_i \\ \sigma_{zxi} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ D_{xi} &= e_{15} \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ D_{zi} &= e_{31} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + p_z T_i \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (1)$$

また, 変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x \partial z} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z} &= \lambda_{11} \frac{\partial T_i}{\partial x} \\ c_{44} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} &= \lambda_{33} \frac{\partial T_i}{\partial z} \\ e_{15} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x \partial z} - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} &= -p_z \frac{\partial T_i}{\partial z} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (2)$$

重ね合わせの原理より, 本問題の電気弾性場に関する境界・対称条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx1}(0, z) &= -\sigma_{xx}(z) \quad (0 \leq z < 2a) \\ u_{x1}(0, z) &= 0 \quad (2a \leq z < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx2}(x, 0) &= -\sigma_{zx}(x) \quad (0 \leq x < b) \\ u_{x1}(x, 0) &= u_{x2}(x, 0) \quad (b \leq x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz2}(x, 0) &= -\sigma_{zz}(x) \quad (0 \leq x < b) \\ u_{z1}(x, 0) &= u_{z2}(x, 0) \quad (b \leq x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{z2}(x, 0) &= -D_z(x) \quad (0 \leq x < b) \\ \phi_1(x, 0) &= \phi_2(x, 0) \quad (b \leq x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx1}(0, z) &= 0 \\ D_{x1}(0, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq z < \infty) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{x2}(0, z) &= 0 \\ \sigma_{zx2}(0, z) &= 0 \\ D_{x2}(0, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (-\infty \leq z < 0) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx1}(x, 0) &= \sigma_{zx2}(x, 0) \\ \sigma_{zz1}(x, 0) &= \sigma_{zz2}(x, 0) \\ D_{z1}(x, 0) &= D_{z2}(x, 0) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x < \infty) \quad (9)$$

ここに, $\sigma_{xx}(z)$, $\sigma_{zx}(x)$, $\sigma_{zz}(x)$, $D_z(x)$ は熱的, 電氣的, 機械的負荷によって誘起される応力・電束密度成分であり, 次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(z) &= \sigma_{0X} + \sigma_{xx}^T(z) \\ \sigma_{zx}(x) &= \sigma_{zx}^T(x) \\ \sigma_{zz}(x) &= \sigma_{0Z} \\ D_z(x) &= D_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

上式中, $\sigma_{xx}^T(z)$, $\sigma_{zx}^T(x)$ は次章に示す擾乱温度場に起因する熱応力成分である.

3. 特異電気熱弾性場解析

支配方程式(2)の温度項を零とした同次方程式に Fourier 変換法⁽¹⁸⁾を適用することにより, 一般解が次のように求まる.

$$\left. \begin{aligned} u_{xi} &= \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|}{s} p_{61j} A_{ij}(s) \exp(|s|\gamma_{1j}z) \exp(-isz) ds + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} p_{62ij} B_{ij}(s) \exp(s\gamma_{2ij}z) \sin(sx) ds \\ u_{zi} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} p_{71j} A_{ij}(s) \exp(|s|\gamma_{1j}z) \exp(-isz) ds + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} p_{72ij} B_{ij}(s) \exp(s\gamma_{2ij}z) \cos(sx) ds \\ \phi_i &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} p_{81j} A_{ij}(s) \exp(|s|\gamma_{1j}z) \exp(-isz) ds + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} p_{82ij} B_{ij}(s) \exp(s\gamma_{2ij}z) \cos(sx) ds \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad (11)$$

ここに, $A_{ij}(s)$ ($j=1, 2, 3$), $B_{ij}(s)$ ($i=1, 2, j=1, 2, 3$) は境界条件より決定される未知関数, $A_{2j}(s) \equiv 0$ ($j=1, 2, 3$) である. また, p_{k1j} , p_{k2ij} ($k=1, 2, \dots, 8, i=1, 2, j=1, 2, 3$) は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} p_{11j} &= c_{11}\gamma_{1j}a_{1j} - c_{13} - e_{31}b_{1j}, & p_{12ij} &= c_{11}a_{2ij} + \gamma_{2ij}(c_{13} - e_{31}b_{2ij}) \\ p_{21j} &= e_{15}(\gamma_{1j} + a_{1j}) - \varepsilon_{11}\gamma_{1j}b_{1j}, & p_{22ij} &= e_{15}(\gamma_{2ij}a_{2ij} - 1) - \varepsilon_{11}b_{2ij} \\ p_{31j} &= c_{44}(\gamma_{1j} + a_{1j}) + e_{15}\gamma_{1j}b_{1j}, & p_{32ij} &= c_{44}(\gamma_{2ij}a_{2ij} - 1) + e_{15}b_{2ij} \\ p_{41j} &= c_{13}\gamma_{1j}a_{1j} - c_{33} - e_{33}b_{1j}, & p_{42ij} &= c_{13}a_{2ij} + \gamma_{2ij}(c_{33} - e_{33}b_{2ij}) \\ p_{51j} &= e_{31}\gamma_{1j}a_{1j} - e_{33} + \varepsilon_{33}b_{1j}, & p_{52ij} &= e_{31}a_{2ij} + \gamma_{2ij}(e_{33} + \varepsilon_{33}b_{2ij}) \\ p_{61j} &= a_{1j}, & p_{62ij} &= a_{2ij} \\ p_{71j} &= 1, & p_{72ij} &= 1 \\ p_{81j} &= b_{1j}, & p_{82ij} &= -b_{2ij} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, j=1, 2, 3) \quad (12)$$

式(11)(12)中の γ_{1j} , a_{1j} , b_{1j} および γ_{2ij} , a_{2ij} , b_{2ij} ($i=1,2, j=1,2,3$) は文献^{(21),(22)}に示す $\gamma_{1j}(s)$, $a_{1j}(s)$, $b_{1j}(s)$ および $\gamma_{ij}(s)$, $a_{ij}(s)$, $b_{ij}(s)$ ($i=1,2, j=1,2,3$) の $s \rightarrow \infty$ として得られる既知定数である．応力成分および電束密度成分は式(11)を式(1)に代入することにより求まる．

支配方程式に熱弾性変位ポテンシャル法を用いると, 式(10)の $\sigma_{xx}^T(z)$, $\sigma_{zx}^T(x)$ は次のように求まる．

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^T(z) &= \frac{q_0 b}{\kappa_z \kappa} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{p_{121j}}{r_{j1}} \sum_{l=4}^6 r_{jl} p_l - p_1 \right) \left\{ \left[\left(\frac{\kappa z}{b} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - \frac{\kappa z}{b} \right\} \\ \sigma_{zx}^T(x) &= \frac{q_0 b}{\kappa_z \kappa} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{p_{321j}}{r_{j1}} \sum_{l=4}^6 r_{jl} p_l - p_3 \right) \frac{x}{b} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式中, r_{jl} ($j=1,2,3, l=1,4,5,6$) は付録1に示す既知定数であり, p_l ($l=1,3,4,5,6$) は次のように求まる．

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= (c_{11} - c_{13} k \kappa^2) m - e_{31} \kappa n + \lambda_{11} \\ p_3 &= -[c_{44}(1+k) \kappa m + e_{15} n] \\ p_4 &= (c_{13} - c_{33} k \kappa^2) m - e_{33} \kappa n + \lambda_{33} \\ p_5 &= (e_{31} - e_{33} k \kappa^2) m + \varepsilon_{33} \kappa n - p_z \\ p_6 &= m \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに, $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z$ であり, m, k, n は文献⁽⁸⁾に示す定数である．

問題の解を連立特異積分方程式の解に導くため, 新しい未知関数 $G_{11}(z)$, $G_{2j}(x)$ ($j=1,2,3$) を次のように導入する⁽¹⁹⁾．

$$G_{11}(z) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} u_{x1}(0, z) & (0 \leq z < 2a) \\ 0 & (2a \leq z < \infty) \end{cases} \quad (15)$$

$$G_{21}(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [u_{x1}(x, 0) - u_{x2}(x, 0)] & (0 \leq x < b) \\ 0 & (b \leq x < \infty) \end{cases} \quad (16)$$

$$G_{22}(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [u_{z1}(x, 0) - u_{z2}(x, 0)] & (0 \leq x < b) \\ 0 & (b \leq x < \infty) \end{cases} \quad (17)$$

$$G_{23}(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [\phi_1(x, 0) - \phi_2(x, 0)] & (0 \leq x < b) \\ 0 & (b \leq x < \infty) \end{cases} \quad (18)$$

境界条件式(7)～(9)を考慮し, 混合境界条件式(3)～(6)の第一式より, 未知関数 $G_{11}(z')$, $G_{2j}(x')$ ($j=1,2,3$) に関する連立特異積分方程式が得られる．

$$\int_0^{2a} \left[\frac{1}{z' - z} + M_{111}(z', z) \right] G_{11}(z') dz' + \int_0^b \sum_{j=1}^3 M_{12j}(x', z) G_{2j}(x') dx' = \frac{\pi}{\Re[Z_1]} \sigma_{xx}(z) \quad (0 \leq z < 2a) \quad (19)$$

$$\int_0^{2a} M_{211}(z', x) G_{11}(z') dz' + \int_0^b \left(\frac{1}{x' - x} - \frac{1}{x' + x} \right) G_{21}(x') dx' = \frac{\pi}{\Re[Z_{11}]} \sigma_{zx}(x) \quad (0 \leq x < b) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} M_{311}(z', x) G_{11}(z') dz' + \int_0^b \left(\frac{1}{x' - x} + \frac{1}{x' + x} \right) G_{22}(x') dx' \\ + \int_0^b \Re \left[\frac{Z_{23}}{Z_{22}} \right] \left(\frac{1}{x' - x} + \frac{1}{x' + x} \right) G_{23}(x') dx' = \frac{\pi}{\Re[Z_{22}]} \sigma_{zz}(x) \quad (0 \leq x < b) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} M_{411}(z', x) G_{11}(z') dz' + \int_0^b \Re \left[\frac{Z_{32}}{Z_{33}} \right] \left(\frac{1}{x' - x} + \frac{1}{x' + x} \right) G_{22}(x') dx' \\ + \int_0^b \left(\frac{1}{x' - x} + \frac{1}{x' + x} \right) G_{23}(x') dx' = \frac{\pi}{\Re[Z_{33}]} D_z(x) \quad (0 \leq x < b) \end{aligned} \quad (22)$$

上式中, $Z_1, Z_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ および $M_{111}(z', z), M_{12j}(x', z)(j = 1, 2, 3), M_{i11}(z', x)(i = 2, 3, 4)$ はそれぞれ既知定数および既知の積分核であり, 付録 2 に示す. また, 混合境界条件式 (3) ~ (6) の第二式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_0^{2a} G_{11}(z') dz' - \int_0^b G_{21}(x') dx' = 0 \quad (23)$$

連立特異積分方程式 (19) ~ (22) および補足の条件式 (23) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽²⁰⁾ を用いて数値解析するために, 解の特異性を考慮し, 未知関数 $G_{11}(z'), G_{2j}(x')(j = 1, 2, 3)$ をなめらかな関数 $\Phi_{11}(z'), \Phi_{2j}(x')(j = 1, 2, 3)$ を用いて次のように置く.

$$\left. \begin{aligned} G_{11}(z') &= \left(\frac{z'}{2a - z'} \right)^{1/2} \Phi_{11}(z') \\ G_{2j}(x') &= \left(\frac{x'}{b - x'} \right)^{1/2} \Phi_{2j}(x') \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

従って, $x = 0$ 面上のき裂先端での応力拡大係数 K_{IA} , $z = 0$ 面上のき裂先端での応力拡大係数 K_{IB}, K_{IIB} および電束密度拡大係数 K_{DB} が次のように得られる.

$$\left. \begin{aligned} K_{IA} &= (\pi a)^{1/2} Z_1 \Phi_{11}(2a) \\ K_{IIB} &= (\pi b)^{1/2} Z_{11} \Phi_{11}(b) \\ K_{IB} &= (\pi b)^{1/2} [Z_{22} \Phi_{22}(b) + Z_{23} \Phi_{23}(b)] \\ K_{DB} &= (\pi b)^{1/2} [Z_{32} \Phi_{22}(b) + Z_{33} \Phi_{23}(b)] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

4. 数値結果および考察

数値計算には, 次に示すセレン化カドミウムの電気熱弾性特性を用いた⁽²³⁾.

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= 7.41 \times 10^{10} [\text{N/m}^2], & c_{13} &= 3.93 \times 10^{10} [\text{N/m}^2] \\ c_{33} &= 8.36 \times 10^{10} [\text{N/m}^2], & c_{44} &= 1.32 \times 10^{10} [\text{N/m}^2] \\ e_{15} &= -0.138 [\text{C/m}^2] \\ e_{31} &= -0.16 [\text{C/m}^2], & e_{33} &= 0.347 [\text{C/m}^2] \\ \varepsilon_{11} &= 0.825 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}], & \varepsilon_{33} &= 0.903 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \lambda_{11} &= 0.621 \times 10^6 [\text{N/Km}^2], & \lambda_{33} &= 0.551 \times 10^6 [\text{N/Km}^2] \\ p_z &= -2.94 \times 10^{-6} [\text{C/Km}^2] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

また, 熱伝導率に関しては $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z = 1/1.5$ と仮定した. 応力・電束密度拡大係数を標準化するために, 次式の応力・電束密度成分を用いた.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{0E} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}} D_0 \\ D_{0X} &= \frac{\varepsilon_{33}}{e_{33}} \sigma_{0X} \\ D_{0Z} &= \frac{\varepsilon_{33}}{e_{33}} \sigma_{0Z} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

まず, x 方向の機械的負荷が作用する場合について検討する. 図 2 は標準化された応力・電束密度拡大係数 $K_{IA}/\sigma_{0X}(\pi a)^{1/2}, (K_{IB}, K_{IIB})/\sigma_{0X}(\pi b)^{1/2}, K_{DB}/D_{0X}(\pi b)^{1/2}$ に及ぼすき裂長さ比 a/b の影響を示したグラフである. 実線は K_{IA}, K_{IB}, K_{IIB} , 破線は K_{DB} を示す. また, $\cdot$ は均質等方性弾性体中の T 形き裂の解である⁽²⁴⁾. 本報では数値例として直交異方性および圧電性が比較的低い物性値のセレン化カドミウムを用いており, $K_{IA}/\sigma_{0X}(\pi a)^{1/2}$ の値がわずかに低い値を示しているが, 均質等方性弾性体と同様な傾向が見られる. $(K_{IB}, K_{IIB})/\sigma_{0X}(\pi b)^{1/2}, K_{DB}/D_{0X}(\pi b)^{1/2}$ は $a/b < 0.01$ ではき裂の上下領域の対称性により, ほぼ零となる. また, $a/b \rightarrow 0$ で $K_{IA}/\sigma_{0X}(\pi a)^{1/2}$ は縁き裂の値に

漸近する。 a/b の増大に伴い対称性が崩れ、 $K_{IA}/\sigma_{0X}(\pi a)^{1/2}$ は減少するが、 $(K_{IB}, K_{IIB})/\sigma_{0X}(\pi b)^{1/2}$ 、 $K_{DB}/D_{0X}(\pi b)^{1/2}$ が非零の値となり、混合モードの破壊形態となる。

次に、 z 方向の機械的・電気的負荷が作用する場合について検討する。図3は機械的負荷が作用する場合の $K_{IA}/\sigma_{0Z}(\pi a)^{1/2}$ 、 $(K_{IB}, K_{IIB})/\sigma_{0Z}(\pi b)^{1/2}$ 、 $K_{DB}/D_{0Z}(\pi b)^{1/2}$ に及ぼすき裂長さ比 a/b の影響を示したグラフである。 $z=0$ 面上での $(K_{IB}, K_{IIB})/\sigma_{0Z}(\pi b)^{1/2}$ 、 $K_{DB}/D_{0Z}(\pi b)^{1/2}$ の変化は比較的小さい。これに対して、 $x=0$ 面上での $K_{IA}/\sigma_{0Z}(\pi a)^{1/2}$ は a/b に大きく依存し、 a/b の増大に伴い増大し、極大値をとった後は零に漸近する。図4は電気的負荷が作用する場合の $K_{IA}/\sigma_{0E}(\pi a)^{1/2}$ 、 $(K_{IB}, K_{IIB})/\sigma_{0E}(\pi b)^{1/2}$ 、 $K_{DB}/D_0(\pi b)^{1/2}$ に及ぼすき裂長さ比 a/b の影響を示したグラフである。応力・電束密度拡大係数に及ぼす a/b の影響は図3とほぼ同様である。

Fig. 2 The effect of the crack length ratio on the intensity factors under the pure mechanical load in the x-direction.

Fig. 3 The effect of the crack length ratio on the intensity factors under the pure mechanical load in the z-direction.

最後に、 z 軸方向の熱的負荷が作用する場合について検討する。図5は $K_{IA}/\lambda_{33}T_0(\pi a)^{1/2}$ 、 $(K_{IB}, K_{IIB})/\lambda_{33}T_0(\pi b)^{1/2}$ 、 $K_{DB}/p_zT_0(\pi b)^{1/2}$ に及ぼすき裂長さ比 a/b の影響を示したグラフであり、 $T_0 = q_0b/\kappa_z$ である。 $a/b < 0.01$ の場合、 $K_{IB}/\lambda_{33}T_0(\pi b)^{1/2}$ 、 $K_{DB}/p_zT_0(\pi b)^{1/2}$ の値はほぼ零であり、 $a/b \rightarrow 0$ での K_{IIB} は文献⁽¹⁴⁾に示されているき裂数一個の場合の値に漸近する。 $a/b > 0.1$ の場合、 $K_{IA}/\lambda_{33}T_0(\pi a)^{1/2}$ 、 $K_{DB}/p_zT_0(\pi b)^{1/2}$ の値は a/b に依存し、大きく変化する。すなわち、 a/b の増大に伴い応力・電束密度拡大係数に及ぼす T 形き裂の幾何学的形状の影響はより複雑となる。

Fig. 4 The effect of the crack length ratio on the intensity factors under the pure electric load.

Fig. 5 The effect of the crack length ratio on the intensity factors under the pure thermal load.

5. 結 言

本報は、T形き裂を有する無限圧電材料に熱的・電氣的・機械的負荷が作用する場合の応力・電束密度拡大係数を理論解析し、応力・電束密度拡大係数に及ぼすき裂長さ比の影響を明らかにしたものである。数値結果より以下の点を定量的に明らかにした。

- (1) x 軸方向の機械的負荷が作用する場合、応力・電束密度拡大係数は a/b に依存し、大きな影響を受けること。
- (2) z 軸方向の機械的・電氣的負荷が作用する場合、横き裂の応力・電束密度拡大係数は a/b に、ほとんど影響を受けない。一方、縦き裂のモード I 型応力拡大係数は a/b に大きく依存し、 a/b の増大に伴い増大し、極大値をとった後は零に漸近すること。
- (3) z 軸方向の熱流が作用する場合、縦き裂のモード I 型応力拡大係数は a/b の増大に伴い増大し、極大値をとった後は単調に減少すること。

付 録 1

定数 $r_{jl}(j=1,2,3, l=1,4,5,6)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} \\ r_{14} &= \rho_{22}p_{5213} - \rho_{12}p_{6213} \\ r_{15} &= -\rho_{22}p_{4213}, \quad r_{16} = \rho_{12}p_{4213} \\ r_{21} &= \rho_{12}\rho_{21} - \rho_{11}\rho_{22} \\ r_{24} &= \rho_{21}p_{5213} - \rho_{11}p_{6213} \\ r_{25} &= -\rho_{21}p_{4213}, \quad r_{26} = \rho_{11}p_{4213} \\ r_{31} &= p_{4213} \\ r_{34} &= 1 - \sum_{j=1}^2 p_{421j} \frac{r_{j4}}{r_{j1}} \\ r_{35} &= -\sum_{j=1}^2 p_{421j} \frac{r_{j5}}{r_{j1}} \\ r_{36} &= -\sum_{j=1}^2 p_{421j} \frac{r_{j6}}{r_{j1}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、 $\rho_{1j}, \rho_{2j}(j=1,2)$ は

$$\left. \begin{aligned} \rho_{1j} &= p_{5213}p_{421j} - p_{4213}p_{521j} \\ \rho_{2j} &= p_{6213}p_{421j} - p_{4213}p_{621j} \end{aligned} \right\} (j=1,2) \quad (29)$$

付 録 2

定数 $Z_1, Z_{ij}(i,j=1,2,3)$ と積分核 $M_{111}(z',z), M_{12j}(x',z)(j=1,2,3), M_{i11}(z',x)(i=2,3,4)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \sum_{l=1}^3 p_{11}\delta_l \\ Z_{ij} &= \sum_{l=1}^3 p_{i+2,22l}\Gamma_{2lj2} \quad (i,j=1,2,3) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$M_{111}(z',z) = \frac{1}{Z_1} \sum_{l=1}^3 p_{121l} \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{n=4}^6 \Gamma_{1ln1} \frac{p_{n-1,1m}}{\gamma_{1m}} + \sum_{n=7}^9 \Gamma_{1ln1} p_{n-1,1m} \right) \frac{\delta_m}{(-z'/\gamma_{1m}) + (-\gamma_{21l}z)} \quad (31)$$

$$M_{121}(x',z) = \frac{2}{Z_1} \sum_{l=1}^3 p_{121l} \Gamma_{1l12} \frac{\gamma_{21l}z}{x'^2 + (-\gamma_{21l}z)^2} \quad (32)$$

$$M_{12j}(x', z) = \frac{2}{Z_1} \sum_{l=1}^3 p_{121l} \Gamma_{1lj2} \frac{x'}{x'^2 + (-\gamma_{21l}z)^2} \quad (j = 2, 3) \quad (33)$$

$$M_{211}(z', x) = \frac{1}{Z_{11}} \sum_{l=1}^3 p_{322l} \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{n=4}^6 \Gamma_{2ln1} \frac{p_{n-1,1m}}{\gamma_{1m}} + \sum_{n=7}^9 \Gamma_{2ln1} p_{n-1,1m} \right) \frac{\delta_m x}{(-z'/\gamma_{1m})^2 + x^2} \quad (34)$$

$$M_{311}(z', x) = -\frac{1}{Z_{22}} \sum_{l=1}^3 p_{422l} \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{n=4}^6 \Gamma_{2ln1} \frac{p_{n-1,1m}}{\gamma_{1m}} + \sum_{n=7}^9 \Gamma_{2ln1} p_{n-1,1m} \right) \frac{\delta_m z'/\gamma_{1m}}{(-z'/\gamma_{1m})^2 + x^2} \quad (35)$$

$$M_{411}(z', x) = -\frac{1}{Z_{33}} \sum_{l=1}^3 p_{522l} \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{n=4}^6 \Gamma_{2ln1} \frac{p_{n-1,1m}}{\gamma_{1m}} + \sum_{n=7}^9 \Gamma_{2ln1} p_{n-1,1m} \right) \frac{\delta_m z'/\gamma_{1m}}{(-z'/\gamma_{1m})^2 + x^2} \quad (36)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\rho_{22}\rho_{33}}{p_{611}\rho_{22}\rho_{33} - p_{612}\rho_{21}\rho_{33} - p_{613}\rho_{22}\rho_{31}} \\ \delta_l &= -\frac{\rho_{l1}}{\rho_{ll}} \delta_1 \quad (l = 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{2l} &= p_{313}p_{21l} - p_{213}p_{31l} \\ \rho_{3l} &= p_{312}p_{21l} - p_{212}p_{31l} \end{aligned} \right\} (l = 1, 2, 3) \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{1ij1} &= f_{i,j-3} \\ \Gamma_{2ij1} &= f_{i+3,j-3} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, j = 4, 5, \dots, 9) \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{1ij2} &= f_{i,j+3} \\ \Gamma_{2ij2} &= f_{i+3,j+3} \end{aligned} \right\} (i, j = 1, 2, 3) \quad (40)$$

さらに, 定数 $f_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ は正方マトリクス $\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}$ の要素である. 正方マトリクス $\mathbf{R}$ の要素 $R_{i,j}(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} R_{i,j} &= p_{i+2,21j} \\ R_{i,j+3} &= -p_{i+2,22j} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, 6, j = 1, 2, 3) \quad (41)$$

文 献

- (1) Rao, S.S., Sunar, M., " Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey", *Applied Mechanics Review*, Vol. 47, (1994), pp. 113-123 .
- (2) Wang, B.L., Noda, N., " Thermally Induce Fracture of a Smart Functionally Graded Composite Structure", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 35, (2001), pp. 93-109 .
- (3) Wang, B.L., Mai, Y.-W., " A Cracked Piezoelectric Material Strip under Transient Thermal Loading", *Transactions of the ASME , Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, (2002), pp. 539-546 .
- (4) Niraula, O.P., Noda, N., " Thermal Stress Analysis in Thermopiezoelectric Strip with an Edge Crack", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 25, (2002), pp. 389-405 .
- (5) Ueda, S., " Thermally Induced Fracture of a Piezoelectric Laminate with a Crack Normal to Interfaces", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26, (2003), pp. 311-331 .

- (6) Wang, B.L., Noda, N., " Exact Thermoelectroelasticity Solution for a Penny-Shaped Crack in Piezoelectric Materials", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 27, (2004), pp. 241-251 .
- (7) Ueda, S., " Thermally Induced Fracture of a Functionally Graded Piezoelectric Layer", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 27, (2004), pp. 291-309 .
- (8) 上田整, 井川健, " 平行き裂を有する圧電厚板の電気熱弾性相互干渉", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 72, No. 715, (2006), pp. 309-316 .
- (9) 上田整, 井川健, " 平行き裂を有する圧電厚板の非定常電気熱弾性応答", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 72, No. 720, (2006), pp. 1169-1176 .
- (10) Ueda, S., " Thermal Stress Intensity Factors for a Normal Crack in a Piezoelectric Material Strip", *Journal of Stresses*, Vol. 29, (2006), pp. 1107-1126 .
- (11) 上田整, 井川健, " 二個の平行き裂を有する圧電厚板の電気熱弾性応答", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 74, No. 738, (2008), pp. 216-223 .
- (12) 上田整, 石井彰人, 近藤宏憲, 井川健, " 長さの異なる二個の平行き裂を有する圧電厚板の電気熱弾性応答", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 74, No. 744, (2008), pp. 1134-1141 .
- (13) 上田整, 谷吉郎, " 二個の共線等長き裂を有する圧電厚板の電気熱弾性応答", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 73, No. 736, (2007), pp. 1410-1416 .
- (14) 上田整, 植村純幸, 西村直樹, 池田裕介, " 複数の貫通き裂を有する圧電材料の電気熱弾性相互干渉", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 75, No. 753, (2009), pp. 625-632 .
- (15) Kida, K., Saito, M., Kitamura, K., " Flaking Failure Originating from a Single Surface Crack in Silicon Nitride under Rolling Contact Fatigue", *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 28, (2005), pp. 1087-1097 .
- (16) Wang, B.L., Mai, Y.M., " Impermeable Crack and Permeable Crack Assumptions, Which One is More Realistic?", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 71, (2004), pp. 575-578 .
- (17) 上田整, 西村直樹, 近藤宏憲, " 熱的負荷を受ける傾斜機能圧電材料の応力・電束密度拡大係数に及ぼすき裂面伝導性の影響", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 72, No. 724, (2006), pp. 2066-2073 .
- (18) Sneddon, I.N., Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity* (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York .
- (19) Erdogan, F., Wu, B.H., " Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 19, (1996), pp. 237-265 .
- (20) Erdogan, F., Gupta, G.D., and Cook, T.S., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems* (Edited by G.C. Sih) (1972), p. 368, Noordhoff, Leyden .
- (21) Ueda, S., " A Cracked Functionally Graded Piezoelectric Material Strip under Transient Thermal Loading", *Acta Mechanica*, Vol. 199, (2008), pp. 53-70 .
- (22) Ueda, S., " Thermal Intensity Factors for a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 30, (2007), pp. 321-342 .
- (23) Ashida, F., Tauchert, T.R., " Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk under Axisymmetric Heating", *Acta Mechanica*, Vol. 128, (1998), pp. 1-14 .
- (24) Murakami, Y ed., " Stress Intensity Factors Handbook", Vol. 1, (1987), pp. 269-273, Pergamon Press .