形状記憶合金を用いた適応トラスの有限要素解析*

都井 裕^{*1}, 塚本和典^{*2}

Finite Element Analysis of Adaptive Trusses Using Shape Memory Alloys

Yutaka TOI^{*1} and Kazunori TSUKAMOTO^{*1}Institute of Industrial Science, University of Tokyo,
4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo. 153-8505 Japan

The finite element procedure for the three-dimensional adaptive trusses using shape memory alloys is formulated in the present study, in which the extended form of Brinson's constitutive equation considering the asymmetric tensile and compressive behavior is expressed in a tangentially incremental form. The validity of the present computational modeling is demonstrated by conducting numerical studies for the superelastic, shape memory behaviors of two-bar, nine-bar and twenty eight-bar adaptive trusses subjected to load and temperature changes. The proposed computational procedure is expected to be useful for the optimum design of the adaptive trusses with shape memory alloy bars.

Key Words : Finite Element Method, Adaptive Structure, Framed Structure, Shape Memory Materials, Smart Materials

1. 緒 言

適応トラスとは、剛性、変形形状などの力学的特性が可変あるいは制御可能なトラス構造であり、パラボラアンテナ、宇宙構造物などへの適用に関心がもたれている。外力を受けて変形した適応トラスは、除荷しなくても何らかの制御メカニズムにより元の形状を回復するなどの機能を有する。制御メカニズムとしては、ワイヤアクチュエータを用いたもの、形状記憶合金（以下、SMA）を用いたものなどが検討されてきた^{(1),(2)}。これらの適応トラスの合理的かつ効率的な設計開発のためには、実用的な計算ツールの開発が不可欠である。

本研究は、SMA 部材を用いた適応トラスを対象とした計算ツールの構築と、数値例によるその有用性の検証を目的とする。SMA は、応力と温度に依存した相変態により、超弾性挙動、形状記憶効果などの形状回復挙動を呈することが知られている^{(3),(4)}。したがって、一部（または全部）の部材に SMA を用いたトラス構造は、外力を受けて変形しても温度上昇により元の形状に回復させるなどの制御が可能となる。任意の応力・温度履歴下の材料挙動を表現し得る SMA の構成方程式を、トラス構造の有限要素解析法に導入することにより、SMA 部材を用いた適応トラスの任意の荷重・温度条件下における応答をシミュレートすることができる。

SMA 部材を用いた適応トラスの有限要素解析に関する研究は少なく、著者らの知る限り、Bandeira ら⁽²⁾が Paiva ら⁽³⁾の構成式を用いて実施した例があるだけである。しかも、初期剛性形の増分形構成式に基づいていること、2 次元トラスのみを対象としていること、数値例において引張挙動と圧縮挙動の非対称性が考慮されておらず、有限変形の影響も明示されていないことなど、解析内容は限定されている。本研究の有限要素解析法においては、現象論的で簡明な Brinson の構成式⁽⁴⁾を引張挙動と圧縮挙動の非対称性を考慮するように拡張した上で、数値的安定性に優れた接線剛性形の増分形構成式を誘導し、一般的な 3 次元トラスの増分形微小変形および有限変形解析

* 原稿受付 2011 年 1 月 16 日

^{*1} 正員、フェロー、東京大学生産技術研究所 (〒153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1)^{*2} 東京大学大学院工学系研究科

E-mail: toi@iis.u.tokyo.ac.jp

に適用しており、上述の諸点の発展改良が図られている。

続く2章ではSMA部材を用いた適応トラスの有限要素解析法、3章では有限要素解析例について述べる。3章では、同様の荷重・温度条件を受ける2次元2部材、2次元9部材および3次元28部材の3種類の適応トラスに対する計算例により本解析法の有用性を実証しており、2次元2部材トラスではSMAの引張・圧縮挙動の非対称性と有限変形の影響、2次元9部材トラスではBandeiraら⁽²⁾による解析結果との比較、3次元28部材トラスでは変形の3次元性と有限変形の影響についても言及する。最後の4章は結言である。

2. 形状記憶合金部材を用いた適応トラスの有限要素解析法

2.1 形状記憶合金の構成方程式

SMAの力学的性質を図1に模式的に示す。図1(a)は応力・ひずみ曲線、図1(b)は変態臨界応力と温度の関係であり、典型的な超弾性挙動（実線矢印経路）と形状記憶効果（破線矢印経路）が示されている。

図中の σ は応力（第2種ピオラ・キルヒホフ応力）、 ε はひずみ（グリーン・ラグランジュのひずみ）、 T は温度、 σ_f^{cr} と σ_s^{cr} はマルテンサイト変態終了および開始臨界応力、 M_f と M_s はマルテンサイト変態終了および開始温度、 A_s と A_f はオーステナイト変態開始および終了温度である。図1(b)ではBrinsonの定式化⁽⁴⁾に従い、 $T < M_s$ において σ_f^{cr} と σ_s^{cr} は一定値であると仮定している。 C_{M_s} と C_{M_f} はマルテンサイト変態開始および終了臨界応力と温度の関係における勾配、 C_{A_s} と C_{A_f} はオーステナイト変態開始および終了臨界応力と温度の関係における勾配であり、本解析では $C_{M_s} = C_{M_f} = C_M$ および $C_{A_s} = C_{A_f} = C_A$ と仮定している。

図1(b)において A_f よりも低い一定温度（ここでは $M_f < M_s < T < A_s < A_f$ ）で応力を増加し再び除荷すると、マルテンサイト変態により発生したひずみに対する逆変態（オーステナイト変態）が完了せず、図1(a)に示すような残留ひずみ（ ε_{res} ）が発生する。ここで A_f よりも高い温度まで加熱すると、逆変態が完了し、図1(a)に示すようにひずみが零となり形状が回復する。また、応力を除荷せずに十分加熱した場合も、弾性ひずみは残留するが、マルテンサイト変態により発生したひずみは消失する。これが、SMA部材を用いた適応トラスにおいて重要な役割を果たす形状記憶効果の概略である。また $T > A_f$ の場合は、逆変態が完了するため、超弾性挙動が発現する。

Fig.1 Mechanical properties of shape memory alloys

SMAの1次元応力・ひずみ関係は一般に、次式のように書ける⁽⁴⁾。

$$\sigma - \sigma_0 = E(\xi)\varepsilon - E(\xi_0)\varepsilon_0 + \Omega(\xi)\xi_s - \Omega(\xi_0)\xi_{s0} + \theta(T - T_0) \quad (1)$$

ここに、 E ；ヤング率、 Ω ；変態係数、 ξ ；マルテンサイト相体積率、 ξ_s ；応力誘起マルテンサイト相体積率、 θ ；熱弾性係数、 T ；温度である。下添字“0”は初期値を意味する。

Ω は、次式のように表現される.

$$\Omega = -\varepsilon_{res} E \quad (2)$$

ここに、 ε_{res} は最大残留ひずみである.

ヤング率 E は、マルテンサイト相体積率 ξ の関数であり、次式で与えられる.

$$E = E_a + \xi(E_m - E_a) \quad (3)$$

ここに、 E_m および E_a はそれぞれ、マルテンサイト相およびオーステナイト相のヤング率である.

マルテンサイト相体積率 ξ は、次式のように表現される.

$$\xi = \xi_s + \xi_T \quad (4)$$

ここに、 ξ_T は温度誘起マルテンサイト相体積率である. ξ_s および ξ_T は、応力 σ と温度 T の関数である⁽⁴⁾. 温度誘起マルテンサイト相は純粋な温度変化 ($M_f \leq T \leq M_s$, $\sigma \leq \sigma_s^{cr}$) により誘起される双晶 (twinned) マルテンサイト相であり、前述の応力誘起マルテンサイト相は非双晶 (detwinned) マルテンサイト相である. 両者の力学的挙動に与える影響は厳密には異なるはずであるが、本研究では Brinson⁽⁴⁾に従って式(3), 式(4)に示すように、両者は加算的に作用すると仮定している. また、3 章の例題には温度誘起マルテンサイト変態過程は含まれないが、一般的な適応トラス設計においてはこれを考慮する必要があるため、定式化には含めている.

SMA におけるマルテンサイト変態の圧力依存性⁽⁵⁾⁽⁶⁾に起因して生ずる引張挙動と圧縮挙動の非対称性を考慮するために、Mises の相当応力 σ_{eq}^M に静水圧項を加えた、次式の Drucker-Prager の相当応力により、 ξ_s および ξ_T の発展方程式を記述する.

$$\sigma_{eq}^{DP} = \sigma_{eq}^M + 3\beta\sigma_H \quad (5)$$

ここに、 β は材料パラメータであり、 σ_H は次式で与えられる静水圧である.

$$\sigma_H = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6)$$

一次元の場合、式(5)の相当応力は、

$$\sigma_{eq}^{DP} = \beta\sigma + |\sigma| \quad (7)$$

と表現される. なお、最大残留ひずみを始めとするいくつかの材料定数が引張挙動と圧縮挙動で異なる値をとる可能性があるが、対象とする SMA 部材の引張および圧縮両挙動に関する精細な材料試験結果が与えられれば、本定式化はそのような場合にも容易に拡張適用することが可能である. ただし、3 章の例題計算では表 1 に示す同じ値を仮定している.

Brinson⁽⁴⁾により与えられた ξ_s および ξ_T の発展方程式に式(7)を代入すると、マルテンサイト相あるいはオーステナイト相への変態に対し、次式のような形の発展方程式が得られる. 具体形は複雑なため省略する.

$$\xi_s = \xi_s(\sigma_{eq}^{DP}, T) \quad (8a)$$

$$\xi_T = \xi_T(\sigma_{eq}^{DP}, T) \quad (8b)$$

式(1)において与えられた応力・ひずみ関係式は、微分形で次のように表わせる.

$$\begin{aligned} d\sigma &= dE\varepsilon + E d\varepsilon + d\Omega\xi_s + \Omega d\xi_s + d\theta T + \theta dT \\ &= \frac{dE}{d\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \xi}{\partial T} dT \right) \varepsilon + E d\varepsilon + \frac{d\Omega}{dE} \frac{dE}{d\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \xi}{\partial T} dT \right) \xi_s \\ &\quad + \Omega \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \xi_s}{\partial T} dT \right) + \frac{d\theta}{dE} \frac{dE}{d\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \xi}{\partial T} dT \right) T + \theta dT \end{aligned} \quad (9)$$

増分形の応力・ひずみ関係は、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \varepsilon - \frac{d\Omega}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \xi_s - \Omega \frac{\partial \xi_s}{\partial \sigma} - \frac{d\theta}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} T \right] d\sigma \\ & = E d\varepsilon + \left[\frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} \varepsilon + \frac{d\Omega}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} \xi_s + \Omega \frac{\partial \xi_s}{\partial T} + \frac{d\theta}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} T + \theta \right] dT \end{aligned} \quad (10)$$

よって、有限要素解析のための増分形の応力・ひずみ関係式は、次のような形に書ける。

$$\Delta \sigma = D_{SE} \{ \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_{SM}(\Delta T) \} \quad (11)$$

ここに、

$$D_{SE} = \frac{E}{1 - \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \varepsilon - \frac{d\Omega}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \xi_s - \Omega \frac{\partial \xi_s}{\partial \sigma} - \frac{d\theta}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} T} \quad (12a)$$

$$\Delta \varepsilon_{SM}(\Delta T) = - \frac{\left[\frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} \varepsilon + \frac{d\Omega}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} \xi_s + \Omega \frac{\partial \xi_s}{\partial T} + \frac{d\theta}{dE} \frac{dE}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} T + \theta \right] dT}{E} \quad (12b)$$

式(12a)の D_{SE} は接線剛性係数、式(12b)の $\Delta \varepsilon_{SM}(\Delta T)$ は温度増分に依存する初期ひずみ増分（固有ひずみ増分）である。他方、Bandeira ら⁽²⁾が適応トラスの解析に用いた SMA の構成式は、以下のような初期剛性形である。

$$\Delta \sigma = E \Delta \varepsilon + \Delta \sigma_i \quad (13)$$

式(11)と式(13)の剛性係数（ひずみ増分の係数）の違いに着目されたい。接線剛性係数を採用した式(11)の方が計算効率、精度に優れている⁽⁷⁾。

2・2 適応トラスの有限要素解析法

ラグランジュ法⁽⁷⁾に基づいて、有限変形の仮定のもとで形状記憶合金を用いた適応トラス要素の増分形有限要素解析法の定式化を行う。

図2を参照して、3次元トラス要素内の変位場を次式のように仮定する。

$$u(z) = \left(1 - \frac{z}{l} \right) u_i + \frac{z}{l} u_j \quad (14a)$$

$$v(z) = \left(1 - \frac{z}{l} \right) v_i + \frac{z}{l} v_j \quad (14b)$$

$$w(z) = \left(1 - \frac{z}{l} \right) w_i + \frac{z}{l} w_j \quad (14c)$$

ここに、 $u(z)$ と $v(z)$ は横変位、 $w(z)$ は軸方向変位、 u_i 、 v_i 、 w_i などは節点変位、 l は要素長である。増分形のひずみ・変位関係式を次式のように仮定する。

$$\Delta \varepsilon = \frac{d\Delta w}{dz} + \frac{du}{dz} \frac{d\Delta u}{dz} + \frac{dv}{dz} \frac{d\Delta v}{dz} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dz} \right)^2 \right] \quad (15)$$

式(15)においては、横変位に関する非線形項のみを考慮し、それらの項と比べ一般に絶対値の小さい軸方向変位に関する非線形項は無視している。

よって、ひずみ増分の線形成分と節点変位増分の関係式は、マトリックス形で以下のように表現される。

$$\Delta \varepsilon = [\bar{B}] \{\Delta d\} = ([B_0] + [B_L]) \{\Delta d\} \quad (16)$$

ここで次のような記号を用いている． $[\bar{B}]$ ；ひずみ・節点変位マトリックス， $[B_0]$ ；初期変位の影響を除いたひずみ・節点変位マトリックス， $[B_L]$ ；初期変位の影響を含むひずみ・節点変位マトリックス， $\{\Delta d\}$ ；節点変位増分ベクトル ($[d] = [u_i \ v_i \ w_i \ u_j \ v_j \ w_j]$)．

2.1 節で誘導した SMA の増分形構成式 (式(11)) に基づいて，仮想仕事の原理による有限要素定式化を行うと，次式のような SMA 部材の増分形要素剛性方程式を得る．

$$([k_0] + [k_L] + [k_G]) \{\Delta d\} = \{\Delta f\} + \{\Delta f_{SM}\} + \{f_R\} \quad (17)$$

ここに，

$$[k_0] = \int_{V^e} [B_0]^T D_{SE} [B_0] dV^{(0)} \quad (18)$$

$$[k_L] = \int_{V^e} ([B_0]^T D_{SE} [B_L] + [B_L]^T D_{SE} [B_0] + [B_L]^T D_{SE} [B_L]) dV^{(0)} \quad (19)$$

$$[k_G] = \int_{V^e} [G]^T [S][G] dV^{(0)} \quad (20)$$

$$\{\Delta f_{SM}\} = \int_{V^e} [\bar{B}]^T D_{SE} \Delta \varepsilon_{SM} (\Delta T) dV^{(0)} \quad (21)$$

式中，以下の記号を用いている． $[k_0]$ ；増分剛性マトリックス， $[k_L]$ ；初期変位マトリックス， $[k_G]$ ；初期応力マトリックス， $\{\Delta f\}$ ；外力増分ベクトル， $\{\Delta f_{SM}\}$ ； $\Delta \varepsilon_{SM}(\Delta T)$ に依存する見かけの外力増分， $\{f_R\}$ ；不平衡力ベクトル， D_{SE} ；式(11)の接線剛性係数， $\Delta \varepsilon_{SM}(\Delta T)$ ；式(11)の温度増分に依存する初期ひずみ， $[G]$ ；勾配マトリックス， $[S]$ ；応力マトリックス， V^e ；要素体積．なお，SMA 部材以外の鋼製部材に対する増分形要素剛性方程式は自明であるので省略する．

以上の定式化により，SMA 部材を用いた一般的な 3 次元適応トラスに対し，任意の荷重・温度条件下の超弾性挙動，形状記憶効果をシミュレートすることが可能である．たとえば，3 章の数値例においては，以下のような計算が行われている．まず一定温度条件下で，SMA 部材を用いたトラス構造に外力を負荷する．この際のマルテンサイト変態・変形解析においては，式(17)の $\{\Delta f_{SM}\} = \{0\}$ であり，外力増分 $\{\Delta f\}$ のみが負荷される．続いて一定外力を载荷したまま，変形したトラス構造に温度上昇および温度下降を負荷する．この際のオーステナイト変態・変形回復，マルテンサイト変態・再変形解析においては，式(17)の $\{\Delta f\} = \{0\}$ であり，温度変化に依存する見かけの外力増分 $\{\Delta f_{SM}\}$ のみが負荷される．このように SMA 部材に対する式(11)の増分形構成式と式(17)の増分形要素剛性方程式を利用することにより，SMA 部材を用いた適応トラスの任意の荷重・温度条件下における応答計算を行うことができるため，SMA 部材の寸法，配置，材料特性などに関する設計の最適化が可能となる．

Fig.2 Three-dimensional truss element, local coordinates and nodal displacements

3. 形状記憶合金部材を用いた適応トラスの有限要素解析例

1 章, 2 章で述べたように, 本研究で提案した適応トラスの有限要素解析法の特長, すなわち既存の手法に対する卓越点は, ①実験的に存在が確認されている SMA の引張挙動と圧縮挙動の非対称性⁽⁵⁾を考慮していること, ②計算精度, 効率に優れる接線剛性形の増分形構成式を誘導していること, ③一般的な 3 次元トラスの増分形微小変形および有限変形解析に適用可能であること, の 3 点である. これらはいずれも SMA 部材を用いた適応トラスの汎用計算ツールとして求められる機能であることは明らかである. 本章では, 本解析法の妥当性と有用性を実証するために, SMA 部材を用いた数例の適応トラスに対する数値計算を行う. ただし, SMA 部材を用いた適応トラスは構想段階の構造物であることから, 比較対象とすることが可能な実験結果は皆無であり, 計算結果としても引張・圧縮挙動の非対称性を含めない Bandeira の解析結果⁽²⁾があるのみである. したがって, 主として本解析結果自体の定性的考察により本解析手法が妥当な適応トラス解を与えることを確認しており, Bandeira の解析結果との比較も $\beta = 0$ の条件下で行われていることを付言しておく.

3・1 形状記憶合金の材料定数の同定

Ni-Ti SMA に対する Tobushi ら⁽⁸⁾の実験結果を参照して, 2.1 節に示した SMA の材料定数を, 表 1 のように決定した. 式(7)の β については, 解析例により $\beta = 0.15$ または $\beta = 0$ を用いている. $\beta = 0.15$ は, Ni-Ti-10%Cu SMA に対する実験結果から同定された値である⁽⁶⁾. 熱弾性項の影響は小さいため, $\theta = 0$ と仮定する. 80℃おける応力・ひずみ曲線の同定結果を Tobushi ら⁽⁸⁾の実験結果と比較して図 3 に示す. 両者は良好に対応している. なお表中, E_s は鋼材のヤング率であり, 鋼製部材は線形弾性体と仮定している.

Table 1. Material constants identified for SMA test result by Tobushi et al.⁽⁸⁾

Elastic modulus	$E_a = 54 \text{ GPa}$
	$E_m = 42 \text{ GPa}$
	$E_s = 200 \text{ GPa}$
Transformation temperatures	$M_f = 10 \text{ }^\circ\text{C}$
	$M_s = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
	$A_s = 46.25 \text{ }^\circ\text{C}$
	$A_f = 56.25 \text{ }^\circ\text{C}$
Transformation constants	$C_M = 9.25 \text{ MPa/ }^\circ\text{C}$
	$C_A = 8.0 \text{ MPa/ }^\circ\text{C}$
	$\sigma_s^{cr} = 50 \text{ MPa}$
	$\sigma_f^{cr} = 150 \text{ MPa}$
Maximum residual strain	$\varepsilon_{res} = 0.055$

Fig.3 Experimental and identified stress-strain curves for SMA at 80℃

3・2 2次元2部材適応トラス

3.1 節で同定した材料定数を用いて、図4に示す2次元2部材の適応トラスを図中の荷重・温度条件の下で解析した。部材①および②はともに SMA であり、断面積は 1cm^2 である。荷重 $F(t)$ は $t=0\sim1.0$ で増加し、 $t=1.0\sim3.0$ で一定値を保つ。温度は $t=0\sim1.0$ で M_f 以下の一定値を保ち、 $t=1.0\sim2.0$ で A_f 以上に上昇し、 $t=2.0\sim3.0$ で元に戻る。なお本解析例では、式(7)において $\beta=0.15$ と仮定し、SMA の引張挙動と圧縮挙動の非対称性を考慮するとともに、微小変形解析結果と有限変形解析結果を比較する。

図5は、荷重点における鉛直下方変位の時刻歴である。 $t=0\sim1.0$ では荷重増加に伴い、SMA 部材のマルテンサイト変態による 30mm 程度の変位が発生している。 $t=1.0\sim2.0$ では、温度上昇に伴うオーステナイト変態により、マルテンサイト変態による変位が消失し、弾性変形分のみが残留している。 $t=2.0\sim3.0$ では温度下降に伴い、再びマルテンサイト変態が起これ、 30mm 程度の変位が発生している。なお、変位の絶対値が部材長の 10% 程度とあまり大きくないため、図5においては微小変形解析結果と有限変形解析結果に大きな相違は見られない。

図6は各部材の応力・ひずみ曲線である。部材①には引張応力が発生し、部材②には圧縮応力が発生する。両部材とも、 $t=0\sim1.0$ における荷重増加によりマルテンサイト変態が終了して応力ピーク値に到達、 $t=1.0\sim2.0$ の温度上昇に伴うオーステナイト変態によりひずみがほぼ消失、 $t=2.0\sim3.0$ の温度下降に伴う再マルテンサイト変態により再びひずみが発生という経過をたどる。微小変形解析においては、部材①（引張側）と部材②（圧縮側）のピーク応力は完全に対称的であるが、有限変形影響は正の応力変動をもたらすため、有限変形解析においては、部材①と部材②のピーク応力は非対称的となっている。また、 $\beta=0.15$ を仮定したため、マルテンサイト変態開始および終了限界応力の絶対値は、部材②（圧縮側）の方が部材①（引張側）よりも 30% 程度高くなっている。以上の解析結果より、2次元適応トラスに対し本解析法は合理的な解を与えていると判断される。

Fig.4 Two-bar truss and load/temperature condition

Fig. 5 Time-history of displacement at loaded point of two-bar truss Fig. 6 Stress-strain curve for SMA members of two-bar truss

3・3 2次元9部材適応トラス

3.1節で同定した材料定数を用いて、図7に示す2次元9部材の適応トラスを解析した。ブレース部材③と⑤はSMA、他の部材は鋼であり、断面積はいずれも 1cm^2 である。荷重条件、温度条件は図4と同様である。すなわち、荷重 $F(t)$ は $t=0\sim1.0$ で増加し、 $t=1.0\sim3.0$ で一定値を保つ。温度は $t=0\sim1.0$ で M_f 以下の一定値を保ち、 $t=1.0\sim2.0$ で A_f 以上に上昇し、 $t=2.0\sim3.0$ で元に戻る。なお本解析例では、Bandeiraら⁽²⁾の解析結果と比較するため、式(7)において $\beta=0$ とし、SMAの引張挙動と圧縮挙動の対称性を仮定する。

図8は、荷重点における鉛直下方変位の時刻歴である。2部材トラスに対する図5の解析結果と同様に、変形・回復・再変形過程が良好にシミュレートされている。すなわち、 $t=0\sim1.0$ では荷重増加に伴い、SMA部材のマルテンサイト変態による25mm程度の変位が発生している。 $t=1.0\sim2.0$ では、温度上昇に伴うオーステナイト変態により、マルテンサイト変態による変位が消失し、弾性変形分のみが残留している。 $t=2.0\sim3.0$ では温度下降に伴い、再びマルテンサイト変態が起こり、25mm程度の変位が発生している。Paivaら⁽³⁾の構成式を用いたBandeiraら⁽²⁾の解析結果と比較すると、SMA構成式の違いにより変形の進行・回復過程における勾配には若干の相違があるが、変位の極大値と極小値は数%以内の差で一致しており、本解析法の定量的妥当性が確認される。

Fig. 7 Nine-bar truss

Fig. 8 Time-history of displacement at loaded point of nine-bar truss

3・4 3次元28部材適応トラス

3.1節で同定した材料定数を用いて、図9に示す3次元28部材の適応トラスを解析した。本トラスの左右の側面は、図7の2次元9部材トラスと同様であり、上下面の部材でそれらを結合している。左側面のブレース部材②、④、右側面のブレース部材⑩、⑫はSMA、他の部材は鋼であり、断面積はいずれも 1cm^2 である。荷重条件、

温度条件は図4と同様である．なお本解析例でも，式(7)において $\beta = 0$ とし，変形の3次元性および有限変形の影響に着目する．

図9の荷重点Aおよび隣接点Bにおける鉛直下方変位の時刻歴を図10に示す．荷重点Aにおける変位(WA)の時刻歴は，図5の2次元2部材トラス，図8の2次元9部材トラスの解析結果と定性的に同様であり，適応トラスとしての特性が理解される．微小変形解析では点Bにおける変位(WB)は発生しないが，有限変形解析では上下面の部材に軸力が発生することにより，点Bにおいても若干の変位が発生している．

図11は，有限変形解析によるSMA部材②，④，⑩および⑫の応力の時刻歴である，SMA部材②，④の応力絶対値に着目すると， $t = 0 \sim 1.0$ では荷重負荷により増大し， $t = 1.0 \sim 2.0$ では変形回復時の有限変形影響により若干増大， $t = 2.0 \sim 3.0$ では再変形時の有限変形影響により若干減少している．部材⑩および⑫には有限変形の

Fig.9 Twenty eight-bar truss

Fig.10 Time-history of displacement at A and B of twenty eight-bar truss

Fig.11 Time-history of stress for SMA members of twenty eight-bar truss

Fig.12 Stress-strain curve for SMA members of twenty eight-bar truss

影響による小さい応力が発生している．図12は同じくSMA部材②，④，⑩および⑫の応力・ひずみ曲線である．SMA部材②，④の応力・ひずみ曲線は，図11の応力時刻歴と対応している．部材⑩と⑫の応力・ひずみ曲線は最大応力値が50MPa程度であり，それぞれ部材②と④の応力・ひずみ曲線の弾性変形部と重なっている．以上の解析結果より，3次元適応トラスに対し本解析法は妥当な解を与えていると判断される．

4. 結 語

本研究では，形状記憶合金に対するBrinsonの構成式において引張挙動と圧縮挙動の非対称性を考慮した上で，接線剛性形の増分形構成式を誘導し，一部に形状記憶合金部材を用いた3次元適応トラスを対象とする有限変形下の増分形有限要素解析法を定式化した．

その定式化を、形状記憶合金部材を用いた 2 次元 2 部材, 2 次元 9 部材および 3 次元 28 部材の適応トラスが荷重を受けてマルテンサイト変態により変形し, 続く温度上昇・下降時のオーステナイト・マルテンサイト変態により変形回復・再変形する過程の解析に適用し, 他の数値解との比較および引張・圧縮非対称性, 有限変形などの影響に関する定性的考察により, 計算アルゴリズムの妥当性と有用性を確認した。

本有限要素解析は, 形状記憶合金部材を用いた一般的な 3 次元適応トラスに対する解析として初めての試みである。本計算手法を用いることにより, 任意の荷重・温度条件下の超弾性挙動, 形状記憶効果をシミュレートすることが可能であり, 形状記憶合金部材を用いた適応トラスの合理的かつ効率的な設計開発に貢献することが期待される。

文 献

- (1) 花原和之, 多田幸生, "ワイヤをアクチュエータとする不静定適応トラス (動特性を考慮した構造設計)", 日本機械学会 (No.03-7) Dynamics and Design Conference CD-ROM 論文集, (2003).
- (2) Bandeira, E. L., Savi, M. A., Camara Monteiro Jr., P. C. and Netto, T. A., "Finite Element Analysis of Shape Memory Alloy Adaptive Trusses with Geometrical Nonlinearities", *Archive of Applied Mechanics*, Vol.76 (2006), pp.133-144.
- (3) Paiva, A., Savi, M. A., Braga, A. M. B. and Pacheco, P. M. C. L., "A Constitutive Model for Shape Memory Alloys Considering Tensile-Compressive Asymmetry and Plasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.42, No.11-12 (2005), pp.3439-3457.
- (4) Brinson, L. C., "One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol 4, No.2 (1993), pp.229-242.
- (5) Kakeshita, T., Shimizu, K., Nakamichi, S., Tanaka, R., Endo, S. and Ono, F., "Effect of Hydrostatic Pressures on Thermoelasticmartensitic Transformations in Aged Ti-Ni and Ausaged Fe-Ni-Co-Ti Shape Memory Alloys", *Materials Transactions (The Japan Institute of Metals)*, 33 (1992), pp.1-6.
- (6) Auricchio, F. and Taylor, R. L., "Shape Memory Alloy: Modeling and Numerical Simulations of the Finite-Strain Superelastic Behavior", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143(1997); pp.175-194.
- (7) 都井裕, 計算固体力学入門 (材料と構造のモデリングとシミュレーション), (2008), pp.56-83, コロナ社.
- (8) Tobushi, H., Iwanaga, N., Tanaka, K., Hori, T. and Sawada, T., "Deformation Behavior of Ni-Ti Shape Memory Alloy Subjected to Variable Stress and Temperature", *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 3 (1991), pp.79-93.