応力集中係数の観点からの 2 重切欠きの問題について*

真壁 朝敏^{*1}, Md. S. FERDOUS^{*2}
才本 明秀^{*3}, 宮崎 達二郎^{*4}

A Discussion about Double Notches on View Point of Stress Concentration Factor

Chobin MAKABE^{*1}, Md. S. FERDOUS, Akihide SAIMOTO and Tatsujiro MIYAZAKI

^{*1} Univ. of the Ryukyus, Dept. of Mechanical Systems Engineering
Nishihara, Nakagami-gun, Okinawa, 903-0213, Japan

Stress concentration factor at the root of double notches was calculated in a finite width plate specimen. The second notch was located at the root of the first notch. The radius ratio of second notch to first notch was assumed to be less than 0.3. In this study, approximation method of stress concentration factor of double notch was examined. The stress distribution was calculated by the 2-dimensional program based on body force method. The calculation was performed for the specimens with center notch, double edge notches and single edge notch. Three different stress concentration factors, that is, $K_{t, \text{BFM}}$ for direct calculation of the specimens, $K_{t, \text{double}}$ for approximation by the double-notch concept, and $K_{t, \text{equi}}$ for approximation by the equivalent notch concept, were calculated. Then the values of those stress concentration factors were compared. An accuracy of approximation of $K_{t, \text{BFM}}$ by $K_{t, \text{double}}$ or $K_{t, \text{equi}}$ was examined. In all calculation cases, $K_{t, \text{BFM}}$ can be approximated within 10 % error by $K_{t, \text{double}}$. However, where the ratio of notch root radius of second notch to first notch was less than 0.1, $K_{t, \text{BFM}}$ cannot be approximated by $K_{t, \text{equi}}$ within 10% error.

Key Words : Stress Concentration Factor, Double Notch, Equivalent Notch, Body Force Method, Approximation Method

1. 緒 言

機器や構造物の構成要素には切欠き加工されることが多い。切欠先端では応力が集中し、破壊の起点となる可能性が高いために、応力集中係数の解析に関する多くの研究がなされ設計に応用されてきている⁽¹⁾。応力集中を精度良く解析することは、機器等の設計や学術的な問題解決のために重要である。それと同時に現場で適用する観点から、簡便な手法によって、ある切欠形状の既知の応力集中係数を用いて、他の切欠形状の未知の応力集中係数を近似することも有効である。そのような問題として 2 重切欠きや等価切欠きの応力集中の問題がある。最近の著書^{(2), (3)}においても、2 重切欠きや等価切欠きの応力集中係数の評価方法が記述されている。なお、図 1(a)で概略するように、先端半径 $R1$ が比較的大きな切欠きの先端に小さな半径 $R2$ の切欠き加工された場合は 2 重切欠きと呼ばれている。それに対して、図 1(b)に示すように比較的長い切欠きが他の切欠きの先端に加工された場合、等価切欠き長さ $2t$ と等価半径 $\rho (=R2)$ を用いて、等価切欠きとして取り扱いがなされている。

一方、2 重切欠きとみなすのか、あるいは等価切欠きとみなすのかによって応力集中係数の評価値が異なるが、

* 原稿受付 2011 年 1 月 14 日

^{*1} 正員, フェロー, 琉球大学 工学部機械システム工学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地)

^{*2} 学生員, 琉球大学 理工学研究科機械システム工学専攻 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地)

^{*3} 正員, 長崎大学 工学部機械システム工学科 (〒852-8521 長崎県長崎市文教町 1-14)

^{*4} 正員, 琉球大学 工学部機械システム工学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地)

E-mail: makabe@tec.u-ryukyu.ac.jp

いずれの切欠きとみなすべきかを明確に記述した報告はほとんど見当たらない^{(4), (5)}。また、有限板に関して 2 重切欠きの問題を考慮した例もほとんど見当たらない。

本研究では、2 次元の有限板の中央あるいは両縁に半径 $R1$ の穴あるいは半円切欠きが加工され、さらにそれらの切欠底に先端半径 $R2$ の切欠きが加工された場合の応力集中係数と、その切欠きを 2 重切欠きや等価切欠きとみなした場合の応力集中係数について考察した。

Fig. 1 Shape applied for the concepts of double notch and equivalent notch: (a) for the case of approximation in the double notch concept, (b) for the case of approximation in the equivalent notch concept.

2. 解析手法と解析モデル

応力集中の解析には、西谷ら^{(6), (7)}によって開発・改良されている体積力法の汎用 2 次元プログラムを用いた。また、本解析では西谷ら⁽⁸⁾が公開したプログラムを改良して使用している。本解析においては、無限板ではなく実用的な観点から中央に切欠きを有する平板試験片および両縁に切欠きを有する平板試験片を解析対象とした。また、それらの試験片における応力集中係数の変化傾向を考察するために、片縁のみに切欠きを有する試験片についても解析した。図 2 に本研究で扱った試験片形状を示す。図 2(a) は中央切欠試験片であり、板幅を $2W$ 、板厚を B 、高さを $2H$ で示す。図 2(b) は両側切欠試験片であり、寸法は中央切欠きの場合と同様に定義する。図 2(c) は片側切欠試験片であり、板幅 W は中央切欠きの場合の半分である。また、基本となる切欠き (1 番目の切欠きで、以降は第 1 切欠きと称す) の切欠半径を $R1$ 、その底に位置する小さい切欠き (2 番目の切欠きで、以降は第 2 切欠きと称す) の切欠半径を $R2$ とする。

図 3 に解析した領域と切欠部の詳細を示す。解析領域は、中央切欠きと両側切欠きの場合は全体の $1/4$ の部分であり、片側切欠きの場合は全体の $1/2$ の部分である。これらは同じ形状であるが、周知のように境界条件の設定によって解析対象が区別される⁽⁹⁾。第 1 切欠きと第 2 切欠きの接合点は図 3(b) のように定め、第 2 切欠きは常に半円形状とした。

Fig.2 Geometry of calculated specimens: (a) Center notch, (b) Double edge notches, (c) Single edge notch.

Fig. 3 Basic model of the specimen: (a) Calculated part, (b) Connecting point of first notch and second notch ($xR^2 = R_1^2 - R_2^2$).

Fig. 4 Arrangement of notches in the analytical model (a quarter or a half of the total shape): (a) Pattern A ($W=10, 20, 80\text{mm}$), (b) Pattern B ($W=20\text{mm}$), (c) Pattern C ($W=20\text{mm}$).

Fig. 5 Evaluation of stress concentration for each case ($K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,eqi}$): (a) Double notch, (b) First notch, (c) Second notch, (d) U-shaped notch.

図 4 に解析した試験片の Pattern を示す。第 1 切欠きの形状に基づいて 3 つの Pattern を設定した。すなわち、第 1 切欠きの形状は Pattern A では半円形であり、Pattern B ではスリット状であり、Pattern C では部分円弧形状である。Pattern C での第 1 切欠きの中心は試験片の縁から 2mm 外側に設定している。試験片の寸法として、Pattern A の場合は、 $W=10\text{mm}, 20\text{mm}, 80\text{mm}$ とし、試験片の半高は $H=120\text{mm}$ に固定している。Pattern B, C では $W=20\text{mm}$ の場合のみを解析し、Pattern A の場合と比較している。また、第 1 切欠きの半径 $R1$ は 5mm に固定されており、

第 2 切欠きの半径 $R2$ を変化させている。切欠長さ $2t$ あるいは t は試験片の Pattern と $R2$ の寸法に基づいて変化する。

図 5 は応力集中係数の定義の説明図である。以下に定義する応力集中係数は、先に述べたようにいずれも体積力法の汎用プログラム⁽⁸⁾を用いて解析している。本研究の目的は応力集中係数の厳密値を得ることではなく、与えられた切欠きを 2 重切欠きとみなすべきか、あるいは、等価切欠きとみなすべきかを明確にすることを主眼にしている。すなわち、応力集中係数自体の精度ではなく、近似手法の精度を議論していることに注意されたい。しかしながら、体積力法の汎用プログラム^{(8), (10)}は効率的に応力解析を実施するために開発されたものであり、本研究で求めた計算値の傾向は保証されているものと考えている。付録には比較的粗い分割で求めた本研究の計算結果と、5 桁までの収束値が得られるまで細分割して（分割数を変化させ繰返し計算を行い）求めた実用上の厳密値を比較している。本論文では敢えて粗分割で得た計算結果を用いて結果を整理しているが、本研究の範囲では粗分割で得た解析値でも必要十分であることが理解される。

本研究においては、応力集中係数 K_t を次式に示すように切欠底の最大応力 $\sigma_{\max}$ と端面で設定した一様応力 σ_0 の比で定義している。

$$K_t = \sigma_{\max} / \sigma_0 \quad (1)$$

図 5(a)の切欠形状を忠実にモデル化して体積力法により得た応力集中係数の値 $K_{t,BFM}$ を示し、その結果と近似値との比較を行っている。図 5(a)の切欠きを 2 重切欠きとして近似する場合は、図 5(a)の第 1 切欠きのみが存在する場合の応力集中係数 $K_{t,1}$ と第 2 切欠きのみが存在する場合の $K_{t,2}$ を考慮する。無限板に 2 重切欠きが存在する場合には、その応力集中係数 $K_{t,ap}$ は次式で近似されている^{(2), (3)}。

$$K_{t,ap} = K_{t,1} \cdot K_{t,2} \quad (2)$$

この場合、 $K_{t,1}$ 、 $K_{t,2}$ はともに無限遠で一様応力 σ_0 が作用するとして算出されており、第 1 切欠きに対して第 2 切欠きが比較的大きい場合は、 $K_{t,ap}$ は厳密な値より高めの値となる。有限板の場合においては、式(2)の近似はさらに高めの値を示すことが予想される。そこで、本研究では有限板の 2 重切欠きの近似の問題を考えるという観点から式 (3) を用いた近似を行っている。

$$K_{t,double} = \sigma_{R2} \cdot K_{t,2} / \sigma_0 \quad (3)$$

ここで、 σ_{R2} は図 5(b)のように第 1 切欠きのみが存在する場合において、第 2 切欠きの先端に相当する位置 A での荷重方向の応力を数値計算で求めた値である。また、図 5(c)に示した $K_{t,2}$ は各条件で $K_{t,1}$ と同一種類の試験片（中央切欠き、両側切欠き、片側切欠き）で算出している。

図 5(a)を等価切欠きとみなした応力集中係数 $K_{t,equi}$ は、第 1 切欠きと第 2 切欠きを含めた長さ（等価長さ） t と先端の半径（等価半径） $\rho=R2$ を有する U 字切欠きとして算出している。

本研究では、切欠形状を正確にモデル化して計算した応力集中係数 $K_{t,BFM}$ と近似により求めた応力集中係数 $K_{t,double}$ あるいは $K_{t,equi}$ の比を算出し、それらの値から 2 重切欠きとしての近似の有効性の範囲や等価切欠きとしての近似の精度に関する検討を行っている。その解析結果は、2 重切欠きを有する機器の管理において、簡便に評価した応力集中係数の精度を把握しておくという観点から参考になるものと考えている。有限板に加工された形状が少しいびつな切欠きを、2 重切欠きとして近似して応力解析を行うか等価切欠きで近似して応力集中係数を解析するかの判断は工学的なセンスが必要であると考えられる。

また、本解析結果を参考にして、今後、3 次元的な切欠きの底にピット状の小さな切欠きがある 2 重切欠きの応力集中の問題についての近似的な算出手法について数値解析的に検討する予定である。 σ_{R2} が厳密解ではないため、2 次元問題を扱った本解析では、近似評価としての有用性は低くなっている。しかし、複雑な形状の切欠きの K_t を比較的単純な切欠きの K_t から簡便評価する手法は 3 次元問題に関して有用となると考えている。そのようなことも念頭に置き、本解析では、2 重切欠きと等価切欠きの観点からの K_t の評価について比較している。

3. 解析結果および考察

3・1 中央切欠試験片と両側切欠試験片における応力集中係数の比較

2 重切欠きの概念の適用範囲から検討したので、第 2 切欠きの半径と第 1 切欠きの半径の比 $R2/R1$ の値は 0.3 以下とした。一般に、 $R2/R1$ の値が十分小さい場合に 2 重切欠きとみなした近似の精度が高くなる^{(2),(3)}。

図 6 と図 7 は無限板の切欠き問題で適用される近似手法である $K_{t,ap}$ を有限板における 2 重切欠きの引張問題に適用して応力集中係数を整理したものである。図 4(a) の Pattern A の場合で板半幅 W が 20 mm ($R1/W = 0.25$) と 80 mm ($R1/W = 0.0625$) の場合の結果をまとめてみた。

Fig. 6 Stress concentration factors $K_{t,ap}$ of Pattern A ($W=20\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$ and $K_{t,ap}$, (b) Stress concentration factor ratio $K_{t,ap}/K_{t,BFM}$ of specimen with center notch, double edge notches or single edge notch.

Fig. 7 Stress concentration factors $K_{t,ap}$ of Pattern A ($W=80\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$ and $K_{t,ap}$, (b) Stress concentration factor ratio $K_{t,ap}/K_{t,BFM}$ of specimen with center notch or double edge notches.

板半幅 W が 20 mm の場合は、中央切欠き、両側切欠きそして片側切欠きの場合の切欠半径 $R2$ に対する応力集中係数の変化を調べた。中央切欠きと両側切欠きの場合、近似した $K_{t,ap}$ と厳密に近い $K_{t,BFM}$ はそれぞれがほぼ同じように変化しているが、片側切欠きでは高めの値を示すことがわかる。しかしながら、 $K_{t,ap}$ と $K_{t,BFM}$ の比は試験片形状の違いに左右されずほぼ同じ傾向を示している。 W が 80 mm の場合は、中央切欠きと両側切欠きの場合を検討したが、 W が 20 mm の場合とほぼ同じ傾向があり、その検討範囲では板幅の影響も少ないことがわかる。そして、重要なこととして、応力集中係数の比 $K_{t,ap}/K_{t,BFM}$ は第 1 切欠きと第 2 切欠きの切欠半径の比 $R2/R1$ が小

さい範囲（図から読み取った 0.03 以下の値）で 1 に近い値を示し、 $R2/RI$ が大きくなると $K_{t,ap}/K_{t,BFM}$ は 1 より明らかに大きくなる。この傾向は他の試験片形状の場合でも同じであり、 $K_{t,ap}$ を用いた 2 重切欠きの応力集中係数の近似は大きな半径の切欠きの底に極小さな切欠きが存在する場合にのみ有効であることが理解できる。このことから、先に述べたように式(3)の $K_{t,double}$ での近似の有効性を本研究では検討している。

図 8 は図 4(a) の Pattern A の場合で板半幅 W が 10 mm ($RI/W=0.5$) の場合の解析結果である。解析結果はプロットで示してある。三角印は $K_{t,BFM}$ 、丸印は $K_{t,double}$ 、四角印は $K_{t,equi}$ に関するデータを示している。なお、これらのデータ点をスプライン補間して得た曲線を示しているが、曲線上の全ての点が計算結果を表わすわけではないことを注記する。

図 8(a) は第 2 切欠きの半径 $R2$ の変化に対する各応力集中係数の変化傾向を中央切欠試験片と両側切欠試験片について同時に示している。体積力法で計算した厳密に近い値 $K_{t,BFM}$ は中央切欠きの場合（▲）が両側切欠きの場合（△）の場合よりも明らかに高い値を示している。 $R2/RI$ の比が小さい場合は、2 重切欠きの簡便評価での値 $K_{t,double}$ は等価切欠きとして算出した値 $K_{t,equi}$ よりも $K_{t,BFM}$ に近い値となっていることがわかる。図 8(b) には、それぞれ中央切欠きの場合と両側切欠きの場合における応力集中係数比 $K_{t,double}/K_{t,BFM}$ 、 $K_{t,equi}/K_{t,BFM}$ の変化を示している。中央切欠きの場合には $R2/RI$ の比が 0.3 以下であれば $K_{t,double}$ を用いた方が明らかに $K_{t,BFM}$ が良い精度で近似できることがわかる。それに対して、両側切欠きにおいては $R2/RI$ が 0.15 より大きくなると傾向が逆になり、等価切欠きと見なして算出した $K_{t,equi}$ での $K_{t,BFM}$ の近似が良い結果を与えている。本研究では、実用上の観点から 10% までの誤差を許容範囲とみなして議論を行っている。図 8 によれば、 $K_{t,double}$ での $K_{t,BFM}$ の近似が解析した $R2/RI$ の全範囲で 10% 以内の誤差で比較的精度よく近似できる結果となっている。そして、等価切欠きとして半径 $R2$ と長さ t で算出した $K_{t,equi}$ においては、 $R2/RI$ が 0.1 以上の範囲になると $K_{t,BFM}$ がほぼ 10% 以内の誤差で近似される結果となっている。

Fig.8 Stress concentration factors of Pattern A ($W=10\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,equi}$, (b) $K_{t,double}/K_{t,BFM}$, $K_{t,equi}/K_{t,BFM}$ of specimen with center notch and double edge notches.

試験片 Pattern A において、第 1 切欠きの半径 RI に対して板半幅 W が大きくなる場合の効果について図 8～10 に示すように検討した（図 8 の結果は先述した）。図 9 は板半幅 W が 20 mm ($RI/W=0.25$) の場合における応力集中係数の値と応力集中係数比の傾向を示したものである。図 8 の $RI/W=0.5$ に対して W の値を 2 倍に設定しており、試験片のリガメントの違いが応力集中に及ぼす影響を調査した。図 8 の場合と比べると図 9 の場合には、特に中央切欠きの場合の $K_{t,BFM}$ の値が低くなっている。図 8 と異なり $K_{t,BFM}$ 等の各応力集中係数の変化が中央切欠きと両側切欠きの場合で大きな差がないという結果になっている。近似の良し悪しに関して検討すると、両方の場合とも、 $R2/RI$ の比が小さい場合は、式(3)に示した $K_{t,double}$ での近似、 $R2/RI$ の比がある程度大きくなった場合は、等価切欠きとみなした $K_{t,equi}$ での $K_{t,BFM}$ の近似が良い結果を与えている。図 9 の場合、 $K_{t,double}/K_{t,BFM}$ の値と $K_{t,equi}/K_{t,BFM}$ の値が等しくなる交点の $R2/RI$ は、中央切欠きの場合が 0.12 程度であり、両側切欠きの場合が 0.14

程度である（なお、図8の場合、その交点での $R2/R1$ は、中央切欠きの場合が 0.08 程度であり、両側切欠きの場合が 0.14 程度である）。

Fig. 9 Stress concentration factors of Pattern A ($W=20\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,equi}$, (b) $K_{t,double}/K_{t,BFM}$, $K_{t,equi}/K_{t,BFM}$ of specimen with center notch and double edge notches.

Fig. 10 Stress concentration factors of Pattern A ($W=80\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,equi}$, (b) $K_{t,double}/K_{t,BFM}$, $K_{t,equi}/K_{t,BFM}$ of specimen with center notch and double edge notches

図10はPattern Aにおける $W=80\text{mm}$ ($R1/W=0.0625$) の場合の結果である。応力集中係数の変化傾向は図9 ($W=20\text{mm}$) の場合とほぼ同様なものになっている。その結果から、ある程度リガメントが広くなると試験片境界の影響が少なくなるために、中央切欠きの場合と両側切欠きの場合の応力集中係数の変化傾向の差が少なくなるものと予想される。なお、 $K_{t,equi}$ の値が $K_{t,double}$ の値と等しくなる $R2/R1$ の値は図8と図9の場合よりも大きめの値となっていることがわかる。その $R2/R1$ の値は中央切欠きの場合が 0.13 程度であり、両側切欠きの場合が 0.15 程度である。

以上の $K_{t,double}$ や $K_{t,equi}$ での $K_{t,BFM}$ の全体的な近似度は、中央切欠試験片の場合が両側切欠試験片の場合よりも比較的良好であると思われる。ただし、実用的な観点から検討すると、両試験片におけるその近似に関しては大差がない結果が得られており、特に $K_{t,double}/K_{t,BFM}$ の値は $R2/R1$ の解析範囲でほぼ 0.9 から 1.1 に収まっている。

図11に第1切欠きがU字形である図4(b)のPattern Bの場合の結果を示す。この場合、板半幅 W は 20mm に設定した。Pattern Bでは、図9の場合と比較して同じ板幅 W に対して第1切欠きの長さが 5mm 長くなっており、半径 $R1$ の中心は切欠きの中央軸より 5mm 離れた位置にある。図9(a)に示すように、厳密に近い値 $K_{t,BFM}$ は中央

切欠きの場合 (▲) が両側切欠きの場合 (△) の場合よりも高い値を示している。このことから、試験片輪郭の影響が応力集中の値に表れることがわかる。図 11(b) は、 $K_{t,double}/K_{t,BFM}$ の比と $K_{t,eq}/K_{t,BFM}$ の比の変化を示したものである。それらの比が等しくなる $R2/R1$ の値は中央切欠きの場合、両側切欠きの場合、ともに 0.1 程度となる。そして、Pattern B の場合においても、Pattern A の場合と同様に $K_{t,eq}$ や $K_{t,double}$ での $K_{t,BFM}$ の近似において、誤差がほぼ 10% 以内に収まる範囲は同様な傾向がある。

Fig. 11 Stress concentration factors of Pattern B ($W=20\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,eq}$, (b) $K_{t,double}/K_{t,BFM}$, $K_{t,eq}/K_{t,BFM}$ of specimen with center notch and double edge notches

Fig. 12 Stress concentration factors of Pattern C ($W=20\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,eq}$, (b) $K_{t,double}/K_{t,BFM}$, $K_{t,eq}/K_{t,BFM}$ of specimen with center notch and double edge notches

図 12 は第 1 切欠きが部分円弧状の Pattern C の場合の結果である。この場合も板半幅 W は 20mm に設定した。Pattern C では、図 9 の場合と比較して同じ板幅 W に対して第 1 切欠きの長さが 2mm 短くなっており、切欠底の半径を描く円の中心は切欠中心軸より 2mm 離れた位置にある。図 12(a) に示すように厳密に近い $K_{t,BFM}$ の値の差に比べて、等価切欠きとして算出した $K_{t,eq}$ の値において、中央切欠きの場合と両側切欠きの場合の傾向の差が明瞭に表れている。その結果は図 12(b) に示す応力集中係数比の傾向に反映している。そして、応力集中係数の近似の精度の傾向は、中央切欠き試験片の場合、Pattern A, B の場合と差がほとんどないことがわかる。しかし、両側切欠き試験片の場合には、 $K_{t,eq}$ の値を用いた $K_{t,BFM}$ の近似は好ましくないことがわかる。

以上の解析結果から、第 1 切欠きの半径 $R1$ に対して板半幅 W の大きさがある程度以上ならば、第 2 切欠きの大きさ $R2$ に対する応力集中係数の変化傾向は中央切欠試験片の場合も両側切欠試験片の場合もほぼ同じである。ただし、本解析結果の範囲では、リガメントが狭まると、図 8、図 11 に示されるように両側切欠の場合よりも中央切欠の場合の応力集中係数 $K_{t,BFM}$ が高くなる傾向が示されている。境界条件の違いにより生じる曲げ応力が応力集中に影響していると考えられる。

対象とした切欠きの応力集中係数 $K_{t,BFM}$ を、簡便評価による $K_{t,double}$ で近似した場合は解析範囲のすべての結果においてほぼ 10% 以内の誤差で近似できていることがわかる。また、等価切欠きとして算出した応力集中係数 $K_{t,eqi}$ は 2 番目の切欠きの長さが短い場合は、厳密な値よりも大きくなり近似度が悪い。しかしながら、その長さがある程度長くなると、等価切欠きの算出手法を用い算出した場合が、2 重切欠きの簡便式で計算した場合よりも厳密な応力集中係数に近い値となる場合があることがわかった。また、 $K_{t,eqi}$ では、Pattern C の両側切欠試験片の場合を除けば、 $R2/R1$ が 0.1 以上になるとほぼ 10% 以内の誤差で $K_{t,BFM}$ が近似できることがわかった。

3・2 片側切欠試験片による応力集中への境界条件の影響の検討

前節の結果から、応力集中係数の値に試験片の境界条件が影響することは明らかであり、特に、リガメントが狭い場合に両側切欠試験片の場合に対して中央切欠試験片の応力集中係数が高くなる。そこで、両者の板幅 $2W$ の半分の板幅 W を有する片側切欠きの応力集中の傾向を調べて応力の干渉効果等についての検討を付け加える。

図 13 と図 14 に 2 重切欠きが試験片の片縁に加工された場合の応力集中係数の変化傾向を示す。Pattern A における $W=10\text{mm}$ および 20mm 、 $H=120\text{mm}$ の場合の結果を図 13 に示す。 $W=10\text{mm}$ の場合の応力集中係数比 $K_{t,double}/K_{t,BFM}$ 、 $K_{t,eqi}/K_{t,BFM}$ の変化傾向は両側切欠試験片や中央切欠試験片の場合と若干異なる傾向が得られている（それらの応力集中係数比の傾向を示す線図に交差点が見られない）。 $R2/R1$ の比が 0.14 より小さい場合は式 (3) を用いた $K_{t,double}$ で近似、 $R2/R1$ の比が 0.14 より大きくなった場合は等価切欠きとして算出した $K_{t,eqi}$ での $K_{t,BFM}$ の近似が良い結果を与えており、その傾向は明瞭である。そして、 $W=20\text{mm}$ の板幅の場合は応力集中係数比の変化傾向は図 9 で示した中央切欠試験片と両側切欠試験片の板半幅 $W=20\text{mm}$ の場合と同様な傾向を示している（応力集中係数の値は、曲げ等の影響があり片側切欠試験片の場合が高くなっている）。

Fig. 13 Stress concentration factors of Pattern A ($W=10\text{mm}$, 20mm , $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,eqi}$ (b) $K_{t,double}/K_{t,BFM}$, $K_{t,eqi}/K_{t,BFM}$ of specimen with single edge notch.

板幅 $W=20\text{mm}$ について、Pattern B と Pattern C の場合の応力集中の変化傾向を図 14 に示す。応力集中係数の厳密に近い計算値 $K_{t,BFM}$ は片側切欠試験片の場合が両側切欠試験片や中央切欠試験片の場合より高い値を示す傾向があることがわかる。ただし、Pattern C の場合は試験片形状による応力集中係数の値の差が他の Pattern の場合の差よりも小さくなっている。そして、応力集中係数比 $K_{t,double}/K_{t,BFM}$ 、 $K_{t,eqi}/K_{t,BFM}$ を比較すると、解析範囲 $R2/R1 < 0.3$ において、Pattern B と Pattern C いずれの場合も、式 (3) を用いた $K_{t,double}$ で $K_{t,BFM}$ を比較的精度よく近似でき

る結果となっている。そして、等価切欠きとして半径 $R2$ と長さ t で算出した $K_{t,eq}$ においては、Pattern B と C の場合で $R2/R1$ が 0.1 以上の範囲になると $K_{t,BFM}$ を誤差 10% 以内で近似できる結果となっている。このような $K_{t,double}$ と $K_{t,eq}$ による $K_{t,BFM}$ の近似の誤差傾向は本解析のほとんどの結果に共通するものである。

Fig. 14 Stress concentration factors of Patterns B and C ($W=20\text{mm}$, $H=120\text{mm}$): (a) $K_{t,BFM}$, $K_{t,double}$, $K_{t,eq}$ (b) $K_{t,double}/K_{t,BFM}$, $K_{t,eq}/K_{t,BFM}$ of specimen with single edge notch.

以上の結果から試験片形状の違いによらず2重切欠きの簡便評価式が適用できる範囲があることがわかった。機械要素の切欠きの底に他の切欠きが存在する場合は、2重切欠きとして簡便に評価するのか、等価切欠きとして応力集中を近似した方がよいのかは試験片形状（すなわち、境界条件）によって異なることが予想される。詳細な応力集中の変化傾向は試験片形状によって異なっており、近似の精度に関しても微妙な違いがある。しかしながら、本解析範囲では有限板に $R2/R1 < 0.3$ の2重切欠きがある場合、許容誤差がほぼ 10% 以内ならば、2重切欠きの簡便式が適用できる範囲が広いことがわかった。3次元の2重切欠きにおいても簡便な評価式を用いて有効に近似できる場合があると思われるが、その誤差がどの程度なのかを把握しておくことは重要であり、本研究結果の傾向も参考になるものと思われる。今後、3次元的な2重切欠きの応力集中の近似について本報告の結果が参考になると考えており、基本的な切欠きの応力集中係数と応力こう配を利用した近似法について検討する予定である。

4. 結 語

板幅 $2W$ の中央切欠試験片、両側切欠試験片および板幅 W の片側切欠試験片において2重切欠きとみなした切欠きの応力集中係数について数値解析的に検討した。解析に用いた主な W の寸法は 20mm である。一般に2重切欠きは寸法の大きい切欠き（第1切欠き）の底に他の小さい切欠き（第2切欠き）が加工された状態のことをいう。そこで、本解析では、第1切欠きの半径を $R1=5\text{mm}$ に固定して、第2切欠きの半径を変化させて応力集中の傾向を調べた。2重切欠きのPatternとして、第1切欠きの形状が円形または半円形のPattern A、U字切欠きのPattern B、部分円弧状のPattern Cの3種類を設定した。そして、応力集中係数 K_t を体積力法の汎用2次元解析プログラムを用いて解析した。

厳密に近い値として算出される応力集中係数 $K_{t,BFM}$ 、第1切欠きと第2切欠きの応力集中を考慮して簡便に近似した $K_{t,double}$ 、第2切欠きの切欠底半径 $R2$ と切欠長さ t で等価切欠きとして算出した $K_{t,eq}$ の3種類を比較した。そして、 $K_{t,BFM}$ を基準としたそれらの応力集中係数の比を検討することによって、2重切欠きとしての近似の問題を基礎的な観点から考察した。

その結果、本解析範囲の $R2/R1 < 0.3$ においては、Pattern A～C において誤差がほぼ 10% 程度以内で $K_{t,double}$ に

よって $K_{t,BFM}$ が近似できることがわかった。また, Pattern C の両側切欠試験片の場合を除けば, $R2/R1$ が 0.1 以上の値になったときに $K_{t,eqi}$ での $K_{t,BFM}$ の近似が $K_{t,double}$ での近似よりも良い結果を示す場合があることがわかった。

付 録

解析した応力集中係数 $K_{t,BFM}$ の精度に関して検討した例を表 1, 2 に示す。それらの値は中央切欠試験片の場合のものであり, $K_{t,BFM}$ の本論文の結果 (Present) と分割数を細かくしていき収束するまで計算した高精度の値 (Exact) との誤差を示した。その誤差は小さく, 実用的な観点から検討している本目的範囲では十分な精度の検討ができていると考えている。

Table 1 Accuracy of calculating value of $K_{t,BFM}$.
(Pattern A of center notch with $W=10\text{mm}$)

$R2[\text{mm}]$	<i>Present</i>	<i>Exact</i>	Error (%)
0.1	12.841	12.475	2.93
0.3	11.235	11.261	0.23
0.4	10.823	10.811	0.11
0.5	10.418	10.439	0.20
0.7	9.760	9.878	1.19
0.8	9.522	9.670	1.53
1.0	9.158	9.368	2.24
1.4	8.041	8.106	0.80

Table 2 Accuracy of calculating value of $K_{t,BFM}$.
(Pattern A of center notch with $W=20\text{mm}$)

$R2[\text{mm}]$	<i>Present</i>	<i>Exact</i>	Error (%)
0.1	9.672	9.370	3.22
0.3	8.445	8.435	0.12
0.4	8.069	8.056	0.16
0.5	7.745	7.723	0.28
0.7	7.140	7.171	0.43
0.8	6.901	6.941	0.58
1.0	6.501	6.552	0.79
1.4	5.888	5.986	1.64

文 献

- (1) 例えば, Peterson R. E., "Stress Concentration Design Factors", (1953), John Wiley & Sons, INC. 西田正孝, "応力集中", 増補版 (2000), 森北出版.
- (2) 村上敬宜, "応力集中の考え方", 第 1 版 (2005), pp. 1-25, 養賢堂.
- (3) 野田尚昭, "設計者のためのすぐ役立つ弾性力学", 第 1 版 (2008), pp. 65-92, 日刊工業新聞社.
- (4) 宮崎達二郎, Ferdous Md. S., 真壁朝敏, 藤川正毅, "有限板中の中央 2 重 U 字切欠きから発生したき裂の引張りにおける応力拡大係数について", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 76, No. 772 (2010), pp. 1618-1625.
- (5) Ferdous Md. S., Fujikawa M., Miyazaki T., Makabe C., Evaluation of Stress Concentration Factor for a Double Notched Plate, Journal of High Pressure Institute of Japan, In contribution.
- (6) 西谷弘信, 才本明秀, 野口博司, "体積力法による二次元弾性問題の汎用解析法(第 1 報, 基礎理論)", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 56, No. 530 (1990), pp. 2123-2129.
- (7) 西谷弘信, 才本明秀, 野口博司, "体積力法による二次元弾性問題の汎用解析法(第 2 報, 数値解析例)", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 57, No. 534 (1991), pp. 328-334.
- (8) 西谷弘信, 陳代行, 才本明秀, "体積力法による二次元応力解析汎用プログラム", 培風館, (1994).
- (9) 例えば, 川井忠彦監訳, "ギャラガー有限要素法の基礎", 第 1 版 (1976), p. 265, 丸善
- (10) 西谷弘信, "電子計算機による二次元応力問題の解法", 日本機械学会誌, Vol. 70, No. 580 (1967), pp. 627-635.