三次元異材接合体界面角部の特異応力場の評価^{*} (応力 $\sigma_{\theta\theta}$ に関する最大強度の評価)

古口 日出男^{*1}, 齊藤 裕一^{*2}

An Evaluation of Intensity of Stress Singularity at Interface of Three-Dimensional Three-Layer Boded Joints (Evaluation of the Maximum Intensity of Singularity on Stress $\sigma_{\theta\theta}$)

Hideo KOGUCHI^{*1} and Yuichi SAITO^{*1} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology
1603-1 Kamitomioka, Nagaoka, Niigata, 940-2188 Japan

Influence of interlayer thickness on singular stress fields around vertexes in 3-layered 3D-joints is evaluated through eigen analysis and BEM using fundamental solutions for two-phase materials. A model for analysis is three-layered joints consisting of Si, resin and FR-4.5. A relationship between singular stress fields and the resin thickness is precisely investigated. All stress components are expressed as spherical coordinate systems in which their origins are located at the vertex of each interface. They are derived from the transformation of coordinate system; from x -, y - and z -coordinates to r -, θ - and ϕ -coordinates. Here, θ is the angle from z -axis, ϕ is the angle from side surface and r is the distance from the stress singularity point. Angle, $\theta_{\max}$, for the maximum of stress, $\sigma_{\theta\theta}$, near the vertex of the interface is firstly searched for various angle ϕ . A coefficient of the power-law term in the expression of stress distribution for the r -direction is determined for the stress distributions in the $\theta_{\max}$ direction. The coefficient is referred to as the intensity of singularity in the r -direction. The intensity of singularity increases with the resin thickness, and attains to an upper limit in the case where the resin thickness is larger than the width of the model. Intensity of singularity in the ϕ -direction along $\theta_{\max}$ direction is also investigated. Values of the intensity of singularity in the ϕ -direction are a constant for Si-resin and resin-FR4.5 interfaces. Three-dimensional intensity of singularity at the vertex in three-dimensional joints is defined considering the intensities of singularity for the r - and ϕ -directions. Variation of the three-dimensional intensity of singularity at the vertex with the resin thickness is similar to that of the intensity of singularity for the interface.

Key Words : Stress Singularity, Interface, Adhesive Joint, Boundary Element Method, Reliability, Intensity of Singularity

1. 緒 言

特性の異なる材料の接合体の界面端には、その材料特性の違いから特異応力場が発生する。異材接合体の強度はこの特異応力場に密接に関係しており、今までにも多くの研究が行われてきた⁽¹⁾⁻⁽¹⁰⁾。筆者らはこれまで三次元異材接合体の界面端角部近傍の応力を求め、その強度評価を行ってきた。それらの研究では、図 1(a) に示すような角部に原点 O を有する球座標系を定義して、球座標系の応力成分に対して特に剥離などの欠陥の発生に関係すると考えられる応力成分 $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\phi\theta}$ に着目して検討を行った。そして、界面端角部の特異応力場は $\sigma_{ij}=K_{ij}f_{ij}(\pi/2, \phi)r^{\lambda}+K_{2ij}f_{2ij}(\pi/2, \phi)+\dots$ のように表すことができることを示した。ここで、 K_{ij} は界面端角部の特異応力場の強さ、 $f_{ij}(\theta, \phi)$ を角度依存関数と呼ぶ。 r は界面端角部に原点を有する球座標系の原点から内点までの距離である。前報では、接合体形状および寸法に対するパラメータの特性について詳細な知見を得た⁽¹¹⁾⁻⁽¹⁶⁾。そこで、界面端角部から微小な半径の球面を想定し、その球面上に分布する応力を球座標系の θ - ϕ 面に展開して調べてみる。図 1(b) は図 1(a) の上面に引張荷重を加えた際の界面端角部近傍の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の θ - ϕ 面の展開図である。この図の結果は後述する境界要素法により求められたもので、界面上の $\phi=45^\circ$ における応力値で無次元化され

^{*} 原稿受付 2011 年 3 月 24 日^{*1} 正員, フェロー, 長岡技術科学大学工学部 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)^{*2} 長岡技術科学大学院 工学研究科機械創造工学専攻

E-mail : koguchi@mech.nagaokaut.ac.jp

ている．この図からわかるように 応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は必ずしも界面上 ($\theta=90^\circ$) で最大とはならず，界面から少し離れたところに最大値が存在している．このことは，界面が母材より強い場合には界面外にき裂が成長する可能性があることを示している．そこで，本研究では三次元三層異材接合体における接着層の厚さを変えて，界面端角部近傍の応力を調べ，特異応力場の強さの最大強度と接着層厚さの関係を明らかにする．そして，既に¹⁶⁾ 界面に対して得られている特異応力場の強さと接着層厚さの関係を比較する．

2. 解析方法

三次元異材接合体内の任意の点の変位は，次の境界積分方程式で求めることができる．

$$u_i(q) = \int_S \{U_{ij}(q, Q)t_j(Q) - T_{ij}(q, Q)u_j(Q)\} ds(Q) \quad (1)$$

ここで， q は内点， Q は境界上の点， U_{ij} および T_{ij} は変位および表面力の基本解である．本研究では，基本解に Rongved の二相体の解¹⁷⁾ を使用しているため界面上の要素分割を必要としない．そのため，界面近傍の応力を高精度で求めることができる．また，三層接合体の解析のため領域解法を用いた．

内点の応力は，式 (1) を内点座標 q で微分した次式により内点のひずみを求め，それをフックの法則に代入して求める．

$$u_{i,k}(q) = \int_S \{U_{ij,k}(q, Q)t_j(Q) - T_{ij,k}(q, Q)u_j(Q)\} ds(Q) \quad (2)$$

ここで， $U_{ij,k}$ および $T_{ij,k}$ は変位および表面力の基本解の微分である．

特異応力場の特異性のオーダー λ は，有限要素法の定式化による固有値解析により求める．定式化において応力特異点 O に中心を有する半径 r_a の球を考え，球内を局所座標系 (α, η, ξ) で表される有限要素で分割する．その際，球は点 O を頂点とする要素からなる四角錐の集合に分割される．いま，四角錐の内点 P の座標を $(r, \theta, \phi) = (r_a((1+\alpha)/2)^{1/p}, \sum_{i=1}^8 H_i(\eta, \xi)\theta_i, \sum_{i=1}^8 H_i(\eta, \xi)\phi_i)$ のように表し，応力およびひずみを球座標で定式化する．ここで， $-1 \leq \alpha, \eta, \xi \leq 1$ ， H_i は内挿関数， θ_i ， ϕ_i は節点の値である．そして，応力およびひずみを仮想仕事の原理に適用し

(a) Three-dimensional bonded structure

(b) Normaraized stress $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$

Fig. 1 Three-dimentional model and normaraized stress $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$

Fig. 2 Three-dimensional bonded structure

Table 1 Material properties

	Si	Resin	FR-4.5
Young's modulus E , GPa	166.0	2.74	15.34
Poisson's ratio ν	0.26	0.38	0.15

て下記の p に関する固有方程式を導出する¹⁸⁾．ここで， p は特異性のオーダー λ と $\lambda = 1 - p$ の関係がある．この p は次式を解くことにより求めることができる．

$$(p^2[A] + p[B] + [C])\{u\} = 0 \quad (3)$$

ここで， $[A]$, $[B]$, $[C]$ は材料定数を含む行列， $\{u\}$ は変位ベクトルである．

3. 解析モデルおよび解析条件

三次元三層接合体の解析モデルを図 2 に示す．被着材であるシリコン (Si) および基板 (FR-4.5) の寸法はともに厚さ $H=10\text{mm}$ ，幅 $W=20\text{mm}$ である．中間層である封止樹脂 (Resin) の厚さ t は $0.002 \sim 100\text{mm}$ の 14 種類 ($t=0.002, 0.004, 0.01, 0.025, 0.1, 0.2, 0.4, 1, 2, 4, 10, 20, 40, 100\text{mm}$) とし，Si と FR-4.5 を Resin で接合した構造となっている．FR-4.5 の底面の z 方向変位を固定し，Si の上面に外力として $\sigma_0=1\text{MPa}$ の引張応力を与え，Si-resin，Resin-FR-4.5 のそれぞれの界面端角部の特異応力場を調べた．特異応力場の強さを評価するために各接合界面端部を原点とする球座標系を用いた．また，解析時間の短縮のため対称性を考慮した 1/4 モデルで解析を行った．解析に用いた各材料の物性値は表 1 に示す通りである．

Fig. 3 Finite element model for eigen analysis

Table 2 List of the order of stress singularity for vertex and line in joints

No.	Si-resin interface		Resin-FR4.5 interface	
	$\phi_{op}=90^\circ$ λ_{vertex}	$\phi_{op}=180^\circ$ λ_{line}	$\phi_{op}=90^\circ$ λ_{vertex}	$\phi_{op}=180^\circ$ λ_{line}
1	0.395	0.318	0.219	0.179
2	0.000	0.000	0.000	0.000

4. 解析結果

4・1 固有値解析の結果

まず、式(3)を用いて固有値解析を行い、応力特異性のオーダーを求める。固有値解析に用いた有限要素モデルの要素分割図の一例を図3に示す。図3(a)は特異点を原点とする単位球表面を ϕ 方向と θ 方向に分割したもので、図3(b)は θ - ϕ 平面に展開したものである。接合界面角部および応力特異線上の応力特異性を調べるために、有限要素モデルで ϕ 方向の側面間の角度 ϕ_{op} が 90° (角部)、 180° (応力特異線上)の場合について解析を行った。なお、要素サイズは $\theta \times \phi = 9^\circ \times 9^\circ$ とした。また、界面上および応力特異線近傍では角度依存関数の分布を詳細に調べるため、要素をさらに5分割し刻み幅を 1.8° とした。表2にSi-resin界面およびResin-FR4.5界面に対する特異性のオーダー λ_{vertex} と、応力特異線上での特異性のオーダー λ_{line} をそれぞれ示す。固有値解析では特異性を示さない固有値も含めると多くの λ の値が得られる。表2には固有値 $p(=1-\lambda)$ から求められる λ の内、大きい順に2つ示した。これらの解析結果から、界面角部の特異応力場における応力は次式のように表すことができる。

$$\sigma_{ij}(\bar{r}, \theta, \phi) = \bar{K}_{1ij} f_{1ij}(\theta, \phi) \bar{r}^{-\lambda_{vertex}} + \bar{K}_{2ij} f_{2ij}(\theta, \phi) \quad (4)$$

ここで、右辺第1項目は表2の1番目、第2項目は2番目の値に対応する項である。また、 $\bar{r}=r/t$ 、 $\bar{K}_{kij}$ は特異応力場の強さ、 $f_{kij}(\theta, \phi)$ は各固有値に対応する応力場の角度依存性を表す関数である。

4・2 界面近傍の最大応力

図2に示した三次元接合体の特異応力場における応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の角度 θ に対する分布を様々な角度 ϕ について境

(a) $\sigma_{\theta\theta}$ for resin thickness of 10mm at Si-resin interface (b) $\sigma_{\theta\theta}$ for resin thickness of 10mm at Resin-FR4.5 interface

Fig. 4 Distributions of stresses $\sigma_{\theta\theta}$ against θ for various resin thickness on each interface

(a) θ_{max} at Si-resin

(b) θ_{max} at Resin-FR4.5

Fig. 5 Distributions of θ_{max} against ϕ for various resin thickness on each interface

界要素法により求める。図 4(a) および (b) は接着層厚さ 10mm の場合の応力分布である。そして、図 4(a) が Si-resin 界面、図 4(b) が Resin-FR4.5 界面に対する分布である。他の接着層厚さに対する同様な分布を比較すると以下のことが言える。界面 ($\theta=90^\circ$) 近傍に一つの極大値があり、そこから少し離れたところに最大値がある。また、Si-resin 界面と Resin-FR4.5 界面の分布を比較すると Si-resin 界面の方が Resin-FR4.5 界面よりも全体的に応力の値が高い。これは Si-resin 界面の方が Resin-FR4.5 界面に比べて物性値の違いが大きいためであると考えられる。また、示していないが接着層厚さが大きくなると、両界面共に応力が大きくなる。

ここで、ある接着層厚さの接合体について、ある角度 ϕ において応力の最大値が発生している θ を θ_{max} と呼ぶこととする。各接着層厚さの接合体について、 θ_{max} を角度 ϕ に対して求めた結果を図 5(a) および (b) に示す。図 5(a) が Si-resin 界面、図 5(b) が Resin-FR4.5 界面の結果である。図 5(a) の Si-resin 界面側では、 $0 \leq \phi \leq 20^\circ$ 、 $70^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ 、図 5(b) の Resin-FR4.5 界面側では $0 \leq \phi \leq 10^\circ$ 、 $80^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ で接着層厚さに依らず、全てのプロットが重なっ

Fig. 6 Distributions of $\sigma_{\theta\theta}$ on θ_{max} against r for various resin thickness on each interface

ている。最も薄い接着層厚さの 0.002mm の結果は、図 5(a) では $20^\circ \leq \phi \leq 70^\circ$ 、図 5(b) では $10^\circ \leq \phi \leq 80^\circ$ の範囲で 1° 程度他のプロットからずれている。すなわち、 θ_{max} は接着層厚さに大きく依存しないことがわかる。これは両界面に対して言えることである。また、 ϕ が 0° および 90° に近づくとき θ_{max} は 90° に近づくことがわかる。そして、 $30^\circ \leq \phi \leq 60^\circ$ の範囲でも若干であるが θ_{max} は 90° に近くなる。以上のことから、 θ_{max} は角度 ϕ の関数であると言える。

4・3 特異点からの距離 r に対する応力分布

つぎに、特異点からの距離 r に対する応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布について調べる。図 4 から Si-resin 界面について、 $\sigma_{\theta\theta}$ は $\phi=45^\circ$ の場合 $\theta=80^\circ$ で最大応力となることがわかる。そこで、 $\theta=\theta_{max}=80^\circ$ 、 $\phi=45^\circ$ の r 方向の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ について調べてみる。図 6(a) と図 6(b) はそれぞれ Si-resin 界面と Resin-FR4.5 界面における $\sigma_{\theta\theta}$ の r 方向の両対数プロットである。これを見ると図 6(a) と図 6(b) 共に応力は r に対して直線的に分布していることがわかる。また、接着層が厚くなるに伴い、全体的に応力が大きくなっているが、接着層厚さ t が 20mm 以上になると大きくなりえない。これは既報¹⁶⁾で示した界面上の特異応力分布と同様の傾向である。すなわち、接合体の幅 20mm により特異応力場の領域が制限されているためと考えることができる。

三次元異材接合体の r 方向の特異応力場は次式で表される。式 (5) は式 (4) において $K_{1ij}=\bar{K}_{1ij}f_{1ij}(\theta_{max}, \pi/4)t^{\lambda_{vertex}}$ 、 $K_{2ij}=\bar{K}_{2ij}f_{2ij}(\theta_{max}, \pi/4)$ とおいた式になっている。

$$\sigma_{ij}(r, \theta, \phi) = K_{1ij}r^{\lambda_{vertex}} + K_{2ij} \quad (5)$$

図 6(a), (b) に示した応力分布を式 (5) を用いて最小二乗近似し、式中の係数 K_{1ij} および K_{2ij} を求める。

図 7 に応力 $\sigma_{\theta\theta}$ に対して求められた係数 $K_{1\theta\theta}$ と接着層厚さの関係を示す。図 7 には比較のために界面上の応力分布に対して式 (5) を用いて近似して求めた $K_{1\theta\theta}$ も示す。この図から接着層厚さ t が 0.2mm 以上では Si-resin 界面の方が Resin-FR4.5 界面よりも $K_{1\theta\theta}$ が大きいことがわかる。また、接着層厚さ t が 0.1mm 付近で、Si-resin 界面と Resin-FR4.5 界面の $K_{1\theta\theta}$ の大小関係が入れ替わっている。接着層厚さ t が 20mm を超えると $K_{1\theta\theta}$ は上限に達する。これは θ_{max} に対する結果と界面上の結果の両方に言える。 θ_{max} に対する結果の方が界面上のものより全体的に大きくなっている。界面端から界面外にき裂が発生する場合も実際にはあることから、三次元異材接合体の特異応力場の評価を行う際、 θ_{max} に対する応力分布を用いて特異応力場の強さを調べる必要がある。

4・4 応力特異線からの角度 ϕ に対する応力分布

次に応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の ϕ 方向の分布について調べる． θ_{max} は前述したとおり ϕ の関数である．ここでは，応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の ϕ 方向の分布を角度 ϕ に対応する θ_{max} 方向毎に応力分布を調べる．特異点からの距離 r は 0.001mm の位置とする．図 8(a), (b) にその分布を示す．これを見ると， $\phi=0^\circ$ と 90° にある応力特異線に近づくにつれて応力は大きくなっている．また，接着層厚さが増すと応力全体は大きくなる．図 9(a), (b) に図 8 の分布に界面上の応力分布を重ねた結果を示す．ここでは接着層厚さが 0.002mm, 0.01mm, 0.1mm, 0.4mm, 1mm, 10mm の分布のみを示す．応力特異線に近づくにつれて，応力が大きくなっていく傾向は界面上の結果も同様であるが，その変化の様子

Fig. 7 A relationship of $K_{1\theta\theta}$ and resin thickness t on each interface

Fig. 8 Distributions of stresses $\sigma_{\theta\theta}$ for θ_{max} against ϕ for various resin thickness on each interface

Fig. 9 Distributions of $\sigma_{\theta\theta}$ for θ_{max} and interfaces against ϕ for various resin thickness on each interface

に違いがある。応力特異線に向かって応力が大きくなるのは特異場の特性として知られているが、 θ_{max} 上の応力の方が界面上の応力より急に大きくなっている。また、 $r=0.001\text{mm}$ における界面端角部近傍の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布は、式 (4) を用いると $\sigma_{\theta\theta}(10^{-4}, \theta, \phi) = \bar{K}_{1\theta\theta} f_{1\theta\theta}(\theta, \phi) 10^{-4\lambda_{\text{vertex}}} + \bar{K}_{2\theta\theta} f_{2\theta\theta}(\theta, \phi)$ のように書くことができるが、 $\bar{r}$ が 10^{-4} と非常に小さいので、第 1 項目に対して第 2 項目は無視できる。

つぎに $\sigma_{\theta\theta}$ を角度 ϕ の関数で表すことを考える。その関係を導出するために図 10 に示すように応力特異線近傍の特異応力場を用いる。応力特異線近傍の応力は円柱座標系 (R, θ, x) で表すことができる。付録に円柱座標系の応力を球座標系のそれに変換する公式を示す。その結果、球座標系における応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は円柱座標系の応力成分で次式のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \sigma_{\theta\theta}(\sin^2\theta\cos^2\theta + 1/2\sin 2\theta\sin\phi\sin 2\theta + \cos^2\theta\sin^2\phi\sin^2\theta) + \sigma_{xx}\cos^2\theta\cos^2\phi \\ & + \sigma_{xr}(\cos^2\theta\sin 2\phi\cos\theta - \sin 2\theta\cos\phi\sin\theta) - \sigma_{x\theta}(\sin 2\theta\cos\phi\cos\theta + \cos^2\theta\sin 2\phi\sin\theta) \\ & + \sigma_{RR}(\cos^2\theta\sin^2\phi\cos^2\theta - 1/2\sin 2\theta\sin\phi\sin 2\theta + \sin^2\theta\sin^2\phi) + \sigma_{R\theta}\{-\sin 2\theta\sin\phi\cos 2\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin^2\phi)\sin 2\theta\} \end{aligned} \quad (6)$$

この式で $\theta=90^\circ$, $\theta=0^\circ$ とおくと $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\theta\theta}$ となる。ここで、簡単のため $\sigma_{\theta\theta}$ に最も関係のある $\sigma_{\theta\theta}$ のみを残して、残りの項の影響は小さいと判断して残りの項を省略する。その結果、式 (6) は式 (7) のように書くことができる。

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(\sin^2\theta\cos^2\theta + 1/2\sin 2\theta\sin\phi\sin 2\theta + \cos^2\theta\sin^2\phi\sin^2\theta) \quad (7)$$

ここで、式 (7) における $\sigma_{\theta\theta}$ は式 (8) により与えられるものとする。

$$\sigma_{\theta\theta}(R, \theta) = K_{1\theta\theta} f_{1\theta\theta}(\theta) R^{-\lambda_{\text{line}}} \quad (8)$$

ここで、 $R^2=r_0^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\phi)$ を式 (8) に代入し、その式を式 (7) に代入すると式 (9) が得られる。

$$\sigma_{\theta\theta} = K_{1\theta\theta} f_{1\theta\theta}(\sin^2\theta\cos^2\theta + 1/2\sin 2\theta\sin\phi\sin 2\theta + \cos^2\theta\sin^2\phi\sin^2\theta) r_0^{-\lambda_{\text{line}}} (\sin^2\theta + \cos^2\theta\sin^2\phi)^{-\lambda_{\text{line}}/2} \quad (9)$$

さらに上式を $\sin^{-\lambda_{\text{line}}}\phi$ でまとめると式 (10) のように書くことができる。

Fig.10 Cylindrical coordinate system along stress singular line and spherical coordinate system at the vertex of the interface

$$\sigma_{\theta\theta} = K_{1\theta\theta} f_{1\theta\theta} \sin^{-\lambda_{\text{line}}} \phi \cos^{-\lambda_{\text{line}}} \theta (\tan^2 \theta + 1)^{\lambda_{\text{line}}/2} (\sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1/2 \sin 2\theta \sin \phi \sin 2\theta + \cos^2 \theta \sin^2 \phi \sin^2 \theta) r_0^{-\lambda_{\text{line}}} \quad (10)$$

式(10)の内, r_0 を除いた ϕ 方向に関する部分のみを抜き出し, $K_{1\theta\theta} f_{1\theta\theta}$ を $L_{1\theta\theta}$ とおく. さらに $\theta = \theta_{\max}$, $\theta = \theta_{\max}$ として, その式を $f_{\theta\theta}^{\theta_{\max}}$ と書く.

$$f_{\theta\theta}^{\theta_{\max}} = L_{1\theta\theta} \sin^{-\lambda_{\text{line}}} \phi \cos^{-\lambda_{\text{line}}} \theta_{\max} (\tan^2 \theta_{\max} + 1)^{\lambda_{\text{line}}/2} (\sin^2 \theta_{\max} \cos^2 \theta_{\max} + 1/2 \sin 2\theta_{\max} \sin \phi \sin 2\theta_{\max} + \cos^2 \theta_{\max} \sin^2 \phi \sin^2 \theta_{\max}) \quad (11)$$

ここで, $\theta_{\max}$ は応力特異線上の固有解析により求められた $\sigma_{\theta\theta}$ の角度依存性関数の最大値を生じる角度 θ の角度である. この $\theta_{\max}$ は各界面について一定で, Si-resin 界面については $\theta_{\max} = 25.75^\circ$ と, Resin-FR4.5 界面については $\theta_{\max} = 17.5^\circ$ であった. 特異性オーダー λ_{line} は表2に示した応力特異線上の値を用い, Si-resin 界面で0.318, Resin-FR4.5で0.179である. $L_{1\theta\theta}$ を求めるにあたり, 図9(a), (b)で示した応力をそれぞれの $\phi = 45^\circ$ の応力値 $\sigma_{\theta\theta}$ で割って正規化した. 図11にその結果を示す. この図から $\phi = 45^\circ$ の値で正規化するとすべてのプロットが重なり, 正規化した応力分布は接着層厚さに依存しないことがわかる. 図中の実線は正規化した応力分布に対して式(11)を用いて最小二乗法近似して得られたもので, 式(11)で正規化した応力を角度 ϕ に対して近似できていると考える. 式(11)は式(6)において $\sigma_{\theta\theta}$ の項のみを残して得られた式(7)から導かれた式である. このことから, 本解析で用いた三次元接合体モデルの場合, 式(6)において $\sigma_{\theta\theta}$ 以外の応力の $\sigma_{\theta\theta}$ に対する影響は $\sigma_{\theta\theta}$ に比べ小さいものと考えられる. 最小二乗法で求めた $L_{1\theta\theta}$ を接着層厚さ t に対してプロットしたものを図12に示す. $L_{1\theta\theta}$ はSi-resin 界面と Resin-FR4.5 界面共にほぼ一定であり, Si-resin 界面と Resin-FR4.5 界面に対する $L_{1\theta\theta}$ の値はほぼ同じ値となった. また, 界面上の $L_{1\theta\theta}$ と接着層厚さ t との関係については既報で報告した¹⁶⁾. それによると前述した $L_{1\theta\theta}$ の特性は界面上の結果と同様であることがわかる. 界面上から得られた値 $L_{1\theta\theta}$ の平均値は0.61であり, 今回求めた $\theta_{\max}$ 上の応力分布から得られた $L_{1\theta\theta}$ の平均値は1.09であり, $\theta_{\max}$ 上の応力の方が1.79倍大きい値となっている.

Fig.11 Distributions of stresses $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{\theta\theta}|_{\phi=45^\circ}$ for θ_{max} and fitting lines against ϕ Fig.12 Intensities of singularity $L_{1\theta\theta}$ for θ_{max} and at $\theta=90^\circ$ against resin thickness t for each interface

4・5 三次元特異応力場の強さ

つぎに三次元接合体界面端の特異応力場の強さについて考えてみる．三次元界面端の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の特異応力場は， $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \phi) = K_{1\theta\theta} f_{1\theta\theta}(\theta, \phi) r^{-\lambda_{vertex}} + K_{2\theta\theta} f_{2\theta\theta}(\theta, \phi)$ と書くことができる．ここで， $f_{1\theta\theta}$ については上述の式 (11) を用いることにより $\sigma_{\theta\theta}$ の最大値に対する特異応力場の強さを求めることができる．すなわち，

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \phi) = & K_{1\theta\theta} L_{1\theta\theta} \sin^{-\lambda_{line}} \phi \cos^{-\lambda_{line}} \theta_{max} (\tan^2 \theta_{max} + 1)^{-\lambda_{line}/2} (\sin^2 \theta_{max} \cos^2 \theta_{max} + 1/2 \sin 2\theta_{max} \sin \phi \sin 2\theta_{max} \\ & + \cos^2 \theta_{max} \sin^2 \phi \sin^2 \theta_{max}) r^{-\lambda_{vertex}} + K_{2\theta\theta} f_{2\theta\theta}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる．この式で係数 $K_{1\theta\theta} L_{1\theta\theta}$ を $K_{\theta\theta}^{3Dmax}$ とおくことにする．図 13 は，本研究で調べた接合体のそれぞれの界面における三次元特異応力場の強さ $K_{\theta\theta}^{3Dmax}$ および $K_{\theta\theta}^{3D}(\theta=90^\circ)$ と接着層厚さ t との関係を示したものである．二つの $K_{\theta\theta}^{3D}$ の接着層厚さ t に対する傾向は，お互いに非常に似ており， $K_{1\theta\theta}$ の場合と同じである．すなわち，

Fig.13 Intensity of singularity $K_{\theta\theta}^{3Dmax}$, $K_{\theta\theta}^{3D}$ at a vertex of each interfaces against resin thickness t

三次元特異応力場の強さ $K_{\theta\theta}^{3Dmax}$, $K_{\theta\theta}^{3D}$ は $K_{1\theta\theta}$ 同様に接着層厚さ t の増加に伴い $t=1, 2\text{mm}$ 付近で変曲点を持ち、両対数で次のように二直線近似できる。

1) For Si-resin interface side

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^{3Dmax} &= 0.552t^{0.23} \quad (t < 1\text{mm}) \\ &= 0.497t^{0.41} \quad (1\text{mm} < t < 10\text{mm}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^{3D} &= 0.296t^{0.23} \quad (t < 1\text{mm}) \\ &= 0.266t^{0.41} \quad (1\text{mm} < t < 10\text{mm}) \end{aligned} \quad (14)$$

2) For Resin-FR4.5 interface side

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^{3Dmax} &= 0.383t^{0.06} \quad (t < 0.2\text{mm}) \\ &= 0.414t^{0.45} \quad (0.2\text{mm} < t < 10\text{mm}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}^{3D} &= 0.211t^{0.06} \quad (t < 1\text{mm}) \\ &= 0.218t^{0.45} \quad (0.2\text{mm} < t < 10\text{mm}) \end{aligned} \quad (16)$$

以上の関係から $K_{\theta\theta}^{3Dmax}/K_{\theta\theta}^{3D}$ の値は、Si-resin 界面側では 1.86, Resin-FR4.5 界面側では 1.81-1.90 であった。したがって、 $\sigma_{\theta\theta}$ の θ_{max} 上の特異応力場の強さは界面のその 1.8-1.9 倍大きいと言える。また、図 13 より接着層厚さがモデルの横幅以上になると、接着層厚さは三次元特異応力場に影響を及ぼさなくなる。このように、三次元異材接合体の角部における外力に対する特異応力場の強さ $K_{\theta\theta}^{3Dmax}$, $K_{\theta\theta}^{3D}$ の接着層厚さに対する関係は、応力特異線からの角度 ϕ に対する特異応力場の強さの影響より角部の応力特異点からの距離に対する特異応力場の強さが支配的となっている。本研究では電子デバイスの CSP(Chip Size Packaging) の信頼性を評価するために CSP の構成材料からなる最も簡単な積層構造の接合体を想定し、解析を行った。異なる材料の組み合わせおよび異なる接合体寸法に対する検討は今後の研究課題である。

5. 結 論

本論文では、シリコン (Si), 接着層 (resin:Re), 基板 (FR4.5) からなる三層三次元異材接合体の界面端角部の

特異応力場を中間層である接着層厚さを様々に変えて詳細に調べた。ここでは、応力特異点を原点とする球座標系を考え、応力成分 $\sigma_{\theta\theta}$ に着目し、特異点から距離 r に対する分布、さらに $r=10^{-3}\text{mm}$ における最大値を球座標の角度 θ, ϕ に対して調べた。得られた結果を以下にまとめて示す。

(1) 本論文で扱った接合体では、界面以外で応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の最大値が発生した。その θ 座標を θ_{max} とすると、 θ_{max} は ϕ の関数であった。

(2) θ_{max} 方向の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ を r 方向にプロットして得られた特異性の強さ $K_{1\theta\theta}$ は、接着層厚み t が厚くなるにともない大きくなり、 $t=20\text{mm}$ で上限値に達する。これは界面上の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ に対して得られた $K_{1\theta\theta}$ と同様であった。この $K_{1\theta\theta}$ について θ_{max} 方向のものと界面上のものを比較すると、 θ_{max} 方向のものの方が全体的に大きな値を示した。

(3) θ_{max} 上の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ から得られた角度 ϕ 方向の特異性の強さ $L_{1\theta\theta}$ は接着層厚さに対してほぼ一定となった。これは界面上の ϕ 方向応力分布の特異性の強さを表すパラメータ $L_{1\theta\theta}$ と同様の傾向であった。 θ_{max} 上の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ から得られた $L_{1\theta\theta}$ は、界面上の $L_{1\theta\theta}$ の 1.79 倍大きかった。

(4) 本論文の接合体界面端角部の特異応力場は、接着層厚さ t のべき乗式で表すことができ、 θ_{max} 方向の応力分布から得られた特異応力場の方が、界面上のそれに較べて 1.8-1.9 倍大きいことがわかった。

文 献

- (1) Bogy, D.B., "On the Problem of Edge-Bonded Elastic Quarter-Planes Loaded at the Boundary", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.6, (1970), pp.1287-1313.
- (2) Bogy, D.B., "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.38, (1971), pp.377-386.
- (3) Bogy, D.B. and Wang, K.C., "Stress Singularities at Interface Corners in Bonded Dissimilar Isotropic Elastic Materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.7, (1971), pp.993-1005.
- (4) Dempsey, J.P. and Sinclair, G.B., "On the Stress Singularities in the Plane Elasticity of the Composite Wedge", *Journal of Elasticity*, Vol.9, (1979), pp.373-391.
- (5) 三浦英生, 西村朝雄, 河合末男, 西邦彦, "IC プラスチックパッケージ内シリコンチップ残留応力の検討", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.55, No.516(1989), pp.1763-1769.
- (6) 瀬尾健二, 日下正広, 野方文雄, 寺崎俊夫, 中尾嘉邦, 才田一幸, "セラミックス-金属接合部の熱応力に関する研究", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.55, No.510(1989), pp.312-317.
- (7) 小林英男, 荒居善雄, 中村春夫, 中村実, "セラミックス / 金属接合強度の力学的評価", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.55, No.512 (1989), pp.750-754.
- (8) 結城良治, 許金泉, "異材界面端の熱応力・残留応力の対数型応力特異性", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.58, No.556(1992), pp.2394-2400.
- (9) Munz, D. and Yang, Y.Y., "Stress Singularity at the Interface in Bonded Dissimilar Materials Under Mechanical and Thermal Loading", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.59, (1992), pp.857-861.
- (10) Munz, D., Matthias, A., and Yang, Y.Y., "Thermal Stresses in Ceramic-Metal Joints with an Interlayer", *Journal of the American Ceramic Society*, Vol.78, No.2(1995), pp.285-290.
- (11) 古口日出男, 山口昌朗, 皆木健一, Prukvilailert, M., "二相横等方性弾性体の基本解を用いた三次元境界要素法による三次元接合体角部の特異応力場の解析", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.69, No.679(2003), pp.585-593.
- (13) 井上忠信, 古口日出男, 矢田敏夫, "異材接合体の接合端部における熱応力の理論解", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.61, No.581(1995), pp.73-79.
- (14) 古口日出男, 谷口昂, "三次元異材接合体の角部における熱残留応力の特異場の特性", 日本機械学会論文集 A 編,

Vol.74, No.742(2008), pp.864-872.

- (15) 古口日出男, 近野直樹, “三層三次元異材接合体角部の熱残留応力の強さ: 接着層厚さの影響”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.75, No.757(2009), pp.1148-1155.
- (16) 古口日出男, 中島正人, “三層三次元異材接合体角部の特異応力場に対する接着層厚さの影響: 外力が作用する場合”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.76, No.768(2010), pp.1110-1118.
- (17) Rongved, L., 1945, “Force Interior to One of Two Jointed Semi-Infinite Solid”, *Proceedings Second Midwestern Conference on Solid Mechanics*, pp.1-13.
- (18) Pageau, S.S. and Bigger, Jr S.B., “Finite Element Evaluation of Free-Edge Singular Stress Fields in Anisotropic Material”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, (1995), pp.2225-2239.

付 録

応力成分を円柱座標系から球座標系に変換する式を以下に示す. 図 10 に対する球座標系および円柱座標系の応力テンソルをそれぞれ $\mathbf{S}_s$ および $\mathbf{S}_c$ とおく. すなわち,

$$\mathbf{S}_s = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\phi} & \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{\phi\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xR} & \sigma_{x\Theta} \\ \sigma_{xR} & \sigma_{RR} & \sigma_{R\Theta} \\ \sigma_{x\Theta} & \sigma_{R\Theta} & \sigma_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

球座標系から直交座標系, 円柱座標系から直交座標系に変換する行列を以下に示す.

$$\mathbf{\Omega}_s = \begin{bmatrix} \cos\phi \sin\theta & \sin\phi \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi \cos\theta & \sin\phi \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

直交座標系の応力テンソルを $\mathbf{S}_{\text{rec}}$ で表すと, $\mathbf{S}_{\text{rec}}$ は $\mathbf{S}_s$ および $\mathbf{S}_c$ を座標変換することにより得られる.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\text{rec}} &= \mathbf{\Omega}_s^{-1} \mathbf{s}_s (\mathbf{\Omega}_s^T)^{-1} \\ &= \mathbf{\Omega}_c^{-1} \mathbf{s}_c (\mathbf{\Omega}_c^T)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

これらの関係から

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_s &= \mathbf{\Omega}_s \cdot \mathbf{s}_{\text{rec}} \cdot \mathbf{\Omega}_s^T \\ &= \mathbf{\Omega}_s \cdot \mathbf{\Omega}_c^{-1} \mathbf{s}_c (\mathbf{\Omega}_c^T)^{-1} \cdot \mathbf{\Omega}_s^T \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

が得られる. 以上の式より, 本論文で検討している球座標系の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ を円柱座標系の応力成分で表すことができる.