ベイズ統計を用いた回帰係数分布の更新による損傷同定モデルの高精度化*

岩崎 篤^{*1}, 吉永 博行^{*2}

Improvement of the Damage Identification Modeling by Implementation of the Update of the Regression Coefficient Distribution Using Bayesian Statistics

Atsushi IWASAKI ^{*1} and Hiroyuki YOSHINAGA^{*1} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University
Tenjincho 1-5-1, Kiryu-city, Gunma, 376-8515 Japan

This study is about improvement of the accuracy of damage identification with simple multiple regression model using bayesian update. In this study, regression coefficients for multiple regression model are estimated as not fixed value but the distribution parameter using MCMC. Goodness of fit of the regression model is evaluated by a likelihood estimate of the regression coefficients. By estimating the regression coefficients as distribution, probabilistic assessment of the diagnostic result is become possible. Moreover, from the hierarchical bayesian model, estimation of highly presumed model from small sampling by using the estimated regression coefficients as the primal distribution of other individual is become possible. From the bayesian theorem, distribution of the individual of a small sample(= posterior distribution) is presumed from an update of distribution of the information on other individuals(= prior distribution). For example, for the damage diagnosis of the machine structure, diagnostic model for an FEM model or a structure before modification corresponds to prior distribution. By using prior information effectively, construction of the better diagnostic model for arbitral structure from small sampling become possible. In this paper, verification of the method by adoption of the method to the delamination identification of CFRP structure via the electric potential method was conducted.

Key Words : Bayes Statistics, Damage Evaluation, Damage Identification, Composite Material, Delamination, Electrical Potential Method, Maximum Likelihood Method, Inverse Problem

1. 緒 言

本研究は回帰分析を用いた損傷同定において、回帰係数を固定のパラメータではなく分布として推定することで、その損傷パラメータの発生率の分布を導出する手法に関するものである。またベイズの定理⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾を用いてその回帰係数分布を更新することにより、回帰モデルを個体毎に適合させ、小サンプルでの損傷同定の高精度化を行う手法の提案を目的とし、複合材料積層板の損傷同定問題への適用した場合の、本手法の適用による効果の検討を実施した。

逆問題解析^{(7),(8)}による損傷同定に多用される分析手法として回帰分析⁽⁹⁾⁻⁽¹²⁾がある。回帰分析では、損傷のパラメータと各種の計測パラメータの関係を単回帰・重回帰する事で損傷の同定を行う。そのため、正確な同定には外挿を含め様、計測量空間内の広い範囲の計測データが必要であり、診断を行うには多量の計測データを学習データとして必要とする。しかしながら多くの機器の場合、個体毎の微小な構造形状・運転環境の差により、その関係は変動し、精度の向上のためにはこの回帰を個体毎に実施する、すなわち個体毎に学習データを準備する必要があると考えられる。しかし、個体毎の差が大きい場合、他の個体での計測データも多くの場合有意な

* 原稿受付 2011 年 6 月 10 日

^{*1} 正員, 群馬大学 大学院 工学研究科 (〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1)^{*2} 学生員, 群馬大学 大学院 工学研究科

E-mail: aiwasaki@gunma-u.ac.jp

情報であり、他の個体あるいは解析の結果等も用い評価することで、個体毎に必要なデータを削減し、低コスト化が可能であると考えられる。つまり、損傷同定において、ベイズ推定の適用により、現場で小サンプルのデータしか得られない場合に、FEM データや他の個体の計測データを事前情報として用いることにより、小サンプルでの高精度化が可能となると考えられる。

そこで本研究では、他の個体や FEM 等の解析データにより得られた学習データにより、回帰係数分布を推定し、これを事前分布とする。そして、評価対象の個体より得られた学習データを用いた事後分布のベイズ推定から、小サンプルでの損傷診断の高精度化を行う。本稿では、電気ポテンシャル法による層間はく離問題への適用から本手法の有効性の検討を行った。

2. ベイズ統計を用いた回帰係数分布の更新による個体評価の高精度化

2・1 概要

一般的な損傷評価に用いる回帰モデルを次式に示す。

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n \quad (1)$$

ここで、 x_i は評価に用いる計測パラメータ、 y は損傷寸法等の損傷パラメータ、 n は用いる x の数、 β は回帰係数である。

従来、上式に示すような回帰分析による損傷評価では回帰係数を最小二乗法により導出する。計算が容易な反面、各係数は固定のパラメータであり、任意の計測量に対し、損傷パラメータを確定値として算出する。しかしながら、回帰モデルは作成するデータが 1) すべての計測量空間を網羅していない 2) 計測によるノイズを有する 3) 解析に基づく場合、計測時に発生するはずのノイズを含有しない、等の要因により、ほとんどの場合完全とは言えず、理想的な場合でもこの確定値はほぼ平均値を示す。しかし、その結果に基づき信頼性評価を行う場合、確定値として導出するのみではなく、その確定値の真値に対する大小あるいは真値に対しどのような確定値が生じるかその分布を評価することが重要となる。そこで本研究では、回帰係数を固定のパラメータではなく、MCMC 法により分布として推定することで、その損傷パラメータの発生率の分布を導出する。

さらに回帰係数を分布として導出することで、推定結果の確率的評価を可能とするだけではなく、階層化することで他の個体の事前分布として用い、少ないサンプリングで高精度の推定モデルを構築する事が可能となる。近年、工業界を中心とし、ベイズ統計学の小サンプル検査データへの適用⁽¹³⁾⁽¹⁷⁾が進められてきている。ベイズ統計学では、ベイズの定理から事前情報として他の個体ないし個体群(検査においては他の工場、配管等の検査データ)の分布(=事前分布)を用いる事で、小サンプル数である個体に適合する分布(=事後分布)を導出する事が可能である。個体差の大きいプラント機器やモデルチェンジの多い航空機の機体に対し、FEM や実験機、モデルチェンジ前の機体より得られたデータを事前分布とし、現状の小サンプル数データで事前分布を更新する事で、事前の情報を有効に活用し、小サンプル、省コストで評価システムの構築が可能となる。本章では、ベイズの定理の基礎および、回帰係数を分布として推定する損傷評価、回帰係数分布からの事後分布導出の流れを示す。

2・2 ベイズの定理

ベイズの定理⁽¹⁾⁽²⁾とは、ある前提条件の下で結果が生まれる場合、逆に結果から前提条件がどのような確率で起こっていたかを推測する方法であり、ある結果が得られた時に、その結果を反映した下での事後確率を求めるのに使われる。ベイズの定理では、前提条件や事前確率の尤度を仮定し、ある結果が得られる確率とその事前確率の尤度から事後確率を導き出している。ここで事前確率とは、過去の解析データや他の個体の解析データなどの事前の情報から得られた確率である。事後確率とは、事前確率をある結果が得られる確率から更新した結果の確率である。更新は一回限りで終わらせる必要がなく、古いデータに基づく事後分布を次の事前分布として用い、新しいデータが入るたびに更新が可能である。ベイズの定理では、事前情報の利用による推定精度の向上が可能であり、これが大きな利点となっている。さらに、ベイズ統計では、通常の統計学と異なり、パラメータをすべて確率分布で表現するという特徴がある。ベイズ統計では、手元にある情報が少ない場合でも多い状態でも情報量に見合った合理的判断を下すという目的があるため、あるパラメータの値の候補が本当に真の値である可能性

が高いのか低いのかを確率分布によって表現している。本研究では、FEMにより得られたデータ^{(11),(18),(20),(21)}の分析による回帰係数分布を事前分布とし、実験により得られた計測データ^{(12),(19)}から事後分布を推定する。これにより、損傷同定モデルの構築の際に実機での多数のサンプルが不要となる。また、任意の一組の計測パラメータから同定を実施する際に、その同定結果の信頼度を評価可能となる。次式にベイズの定理を示す。

$$P(C_i | A) = \frac{P(A | C_i)P(C_i)}{\sum_{j=1} P(A | C_j)P(C_j)} \quad (2)$$

ここで $P(C_i)$ は事前確率で、 C_i と損傷パラメータが推定される確率であり、この分布が事前分布である。 $P(A | C_i)$ は計測データから得られる尤度である。 $P(C_i | A)$ は事後確率で、実際に A という損傷が計測されたときに C と損傷パラメータが推定される確率であり、その分布が事後分布である。ベイズ統計により母数の区間推定を行う場合、通常の統計学で用いられる信頼区間は用いず、確信区間を用いる。確信区間は、母数の事後分布の両端からある確率の区間を切り取って残った、中央部の区間である。

2・3 事前分布の設定

事前分布にはさまざまな確率分布を設定することが可能であるが、事後分布に対して重要な影響を与えるので設定には注意が必要である。事前分布には共役事前分布^{(1),(2),(16)}と呼ばれる、事前分布と事後分布が同じ確率分布族に属することを仮定するための事前分布が存在する。共役事前分布を用いることによって、事前分布から事後分布への更新を簡易な評価式で記述可能となる代表的な共役事前分布を表1に示す。本研究では、事後分布を正規分布に従うとして解析を行う。そのため、事前分布の平均を正規分布、分散を逆ガンマ分布に従うとして解析を行う。

Table 1 Typical conjugate prior distribution

	Conjugate prior distribution
Binomial distribution	Beta distribution
Poisson distribution	Gamma distribution
Exponential distribution	Gamma distribution
Normal distribution	Average : Normal distribution, Variance : Inverse gamma distribution

2・4 回帰係数分布の推定方法

本研究では、回帰係数を最小二乗法のように固定のパラメータではなく、分布として推定するため、最尤法により、回帰係数分布導出を行う。一例として次式に単回帰モデルの推定方法⁽¹⁾を示す。

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (3)$$

ここで、 x は評価に用いる計測パラメータ、 y は損傷寸法等の損傷パラメータ、 β_i は回帰係数である。誤差項 ε が $N(0, \sigma^2)$ の正規分布に従うと仮定すると、 y が従う分布は

$$y | \beta_0, \beta_1, \sigma^2 \sim N(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2) \quad (4)$$

となる。ここで、 σ は y の標準偏差である。被説明変数が y をとる確率は

$$P(y | \beta_0, \beta_1, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\{y - \beta_0 - \beta_1 x\}^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (5)$$

となり、全観測データ L に対する尤度は次式となる。

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | \{Y_i\}, \{X_i\}) = \prod_{j=1}^n P(Y_j | \beta_0, \beta_1, \sigma^2) \quad (6)$$

ここで、 X_i は説明変数、 Y_i は被説明変数である。最尤推定を行い、対数尤度を最大化する回帰係数の分布から、確定値の真値に対する大小あるいは真値に対しどのような確定値が生じるかを評価する。

2・5 回帰係数分布の事後分布の導出

本研究では、事後分布の導出にはベイズ統計において代表的に用いられるサンプリング手法であるマルコフ連鎖モンテカルロ(MCMC)法^{(1),(2),(22)-(24)}を用いた。解析条件を表2に示す。ここで、表の Burn-in はサンプリングの冒頭部の廃棄区間である。MCMC 法では、初期値の値は最初に指定する必要があるが、初期値設定に指標は無く、初期値の値はランダムに、あるいは適当に選択せざるをえない。そのため、初期値の影響のある区間は破棄する必要がある。次に Thinning は一定繰り返し回数おきに間引いてサンプリングする手法である。MCMC 法の結果得られたサンプルは互いに相関しており、独立なサンプルとなっておらず、自己相関の影響によって事後分布全体からのサンプルになっていない可能性がある。そこで、独立サンプルを得るため、一定繰り返し回数おきに間引く必要がある。最後に Chains は同時に行うシミュレーション数のことである。分布が収束したかを判断するためには、異なる初期値から始まる複数の連鎖を発生させる必要がある。MCMC 法の収束の判定指標として、式(7)で示される R-hat⁽²³⁾を用いる。

$$\hat{R} = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} \frac{B}{W} \quad (7)$$

ここで、 W は連鎖内の分散、 B は連鎖間の分散、 k はサンプリング数である。R-hat の値が 1 に近いほど収束していることを示し、値が 1.1 以下であれば収束しているといえる。本研究では、R-hat の値が 1.1 以下になるように解析条件を設定している。

Table 2 Analysis conditions

Number of sampling	50000
Burn-in	5000
Thinning	100
Chains	3

また本研究では、事後分布からのサンプリング手法としてギブズ・サンプラー^{(1),(2),(22)-(24)}を用いている。例として、母数を正規分布に従うと仮定した場合のギブズ・サンプラーについて説明する。本研究では、共役事前分布になるよう事前分布に式(8)、(9)に示すように正規分布、逆ガンマ分布を仮定しており、尤度関数は式(10)のようになり、事後分布は式(11)のように求めることができる。

$$\mu | \sigma^2 \sim N(\mu_0, \tau_0^2) \quad (8)$$

$$\sigma^2 \sim IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\lambda_0}{2}\right) \quad (9)$$

$$P(X | \mu, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\mu - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (10)$$

$$P(\mu, \sigma^2 | X) \propto P(X | \mu, \sigma^2) P(\mu) P(\sigma^2)$$

$$\propto (\sigma^2)^{-\left\{\frac{n+\nu_0}{2}+1\right\}} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\mu - \bar{x})^2 + \lambda_0}{2\sigma^2} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\tau_0^2} \right] \quad (11)$$

ここで、 μ_0 は事前分布の平均、 $\tau_0=1/\sigma_0^2$ は事前分布の分散であり、 ν_0 は形状母数、 λ_0 は尺度母数、 x_i は評価に用いる計測パラメータ、 n は計測データ数、 $X=(x_1, \dots, x_n)$ 、 IG は逆ガンマ関数である。しかし、 σ^2 が未知の場合には事後分布を解析的に求めることができない。そこで、ギブズ・サンプラーを用いたMCMC法で対処する。ギブズ・サンプラーでは条件付事後分布を利用して、事後分布からの確率標本を発生させる。ここで条件付事後分布とは、 μ 、 σ^2 の乱数を $P(\mu | \sigma^2)$ から同時に生成することはできないが、 μ の条件付事後分布 $P(\mu | \sigma^2)$ と σ_0^2 の条件付事後分布 $P(\sigma^2 | \mu)$ からは μ と σ^2 が生成できるというものである。条件付確率分布は式(12)、(13)のように定義される。

$$\mu | \sigma^2, X \sim N \left(\frac{n\sigma^{-2}\bar{x} + \tau_0^{-2}\mu_0}{n\sigma^{-2} + \tau_0^{-2}}, \frac{1}{n\sigma^{-2} + \tau_0^{-2}} \right) \quad (12)$$

$$\sigma^2 | \mu, X \sim IG \left(\frac{n + \nu_0}{2}, \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\mu - \bar{x})^2 + \lambda_0}{2} \right) \quad (13)$$

以上の式を用いると、(11)式の事後分布 $P(\mu, \sigma^2 | x)$ からの確率標本を以下のような手順により得ることができる。

- (1) (μ, σ^2) の初期値($\mu_{(1)}, \sigma_{(1)}^2$)を決める
- (2) (12)式の $P(\mu | \sigma_{(k)}^2, x)$ から μ を生成し、 $\mu_{(k+1)}$ とする($k=1, 2, \dots$)
- (3) (13)式の $P(\sigma^2 | \mu_{(k+1)}, x)$ から σ^2 を生成し、 $\sigma_{(k+2)}^2$ とする
- (4) 収束したと判定されるまでステップ2、3を繰り返す

3. 電気ポテンシャル法を用いた層間はく離評価

3・1 概要

CFRPは比剛性、比強度の力学特性が優れているために、航空機などの主構造への適用が検討されている。しかし、層間強度が弱いため、弱い衝撃で外側から目視できない層間はく離を容易に発生し、圧縮特性が著しく低下する。特に、近年では大型航空機の主構造への適用が進んでおり、その簡便な評価法が望まれている。これまでに貫通き裂を有するCFRP梁試験片を対象としたはく離位置と寸法の同定の検討から、電気ポテンシャル法^{(11),(12),(18)-(21)}が有効であることが実験的手法および有限解析を用いた解析的手法から示されて来ている。本稿では、電気ポテンシャル法を用いて、層間はく離の同定を行う。検討内容として、FEM解析データによる回帰モデルを事前情報とし、実験による計測データを用いた事後分布の推定を行う際の試験点数の評価精度への影響評価を行う。

3・2 電気ポテンシャル法

電気ポテンシャル法とは、炭素繊維の導電性を利用し、層間はく離で生じるCFRP積層板内部の電気抵抗変化を積層板表面に作成した複数電極を用いて測定することで、層間はく離位置と寸法を定量的に同定する手法である。本研究では、はく離寸法のみ同定する。解析対象に図1に示される $[0_2/90_2]_s$ の直行積層板の梁モデルを用いた。実験、解析的検討の詳細は参考文献(11)-(12)、(18)-(21)に示すが、電極は試験片上面に6個設置しており、各電極間の5箇所 で電圧変化を取得した。電圧変化量は隣接する二つの電極の一方を0[V]に固定し、他方からの電極か

ら 30[mA]の電流を流して導出している。FEM による解析では汎用有限要素法ソフト ANSYS 用い、寸法 3~30mm の層間はく離 1 つをランダムに配置した場合の各電極間の電気ポテンシャル変化を解析している。データ数は 85 点である。実験による計測データはデータ数 36 点、層間はく離寸法は 3~30mm としている。

Fig.1 Model of the specimen

3・3 はく離寸法分布の同定

本研究では、汎化能力を重視し、一次多項式を用いた損傷寸法の同定を行う。被説明変数をはく離寸法 a とし、説明変数は式(14)、(15)に示す各電極間電圧変化のベクトル長さ $vector$ および、 $vector$ で規格化した各電極間電圧変化 $x_i (i=1\sim5)$ とした。

$$vector = \sqrt{\sum_{i=1}^5 V_i^2} \quad (14)$$

$$x_i = \frac{V_i}{vector} \quad (15)$$

ここで V_i は各区間における電圧変化量である。また、はく離寸法 a [mm] は次(16)に示すような正規分布に従うと仮定する。 a の平均 a_α は式(17)に示すような回帰式に従うと定義する。ここで、 $\beta_i (i=1\sim6)$ は回帰係数であり、2章3節で説明したよう共役事前分布にするため式(18)に示すように正規分布に従うと仮定する。式中の μ_{β_i} は回帰係数の平均、 $\sigma_{\beta_i}^2$ は回帰係数の分散である。同様な理由から、逆ガンマ分布になるように τ は a の分散 σ_a^2 の逆数と定義し、 σ_a^2 は式(19)に示すようなガンマ分布に従うと定義する。 $Gamma(r_0, v_0)$ はガンマ分布の確率密度関数であり、式中の r_0 は形状母数、 v_0 は尺度母数である。またはく離寸法の事後分布を式(20)に示す。

$$a \sim N(a_\alpha, \tau) \quad (16)$$

$$a_\alpha = \beta_0 + \sum_{i=1}^5 \beta_i x_i + \beta_6 vector \quad (17)$$

$$\beta_i \sim N(\mu_{\beta_i}, \sigma_{\beta_i}^2) \quad (18)$$

$$\tau = 1/\sigma_a^2 \sim Gamma(r_0, v_0) \quad (19)$$

$$P(a_\alpha, \sigma_a^2 | X) \propto P(X | a_\alpha, \sigma_a^2) P(a_\alpha) P(\sigma_a^2)$$

$$\propto (\sigma_a^2)^{-\left\{\frac{n+v_0}{2}+1\right\}} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\mu - \bar{x})^2 + \lambda_0}{2\sigma_a^2} - \frac{(\mu - a_\alpha)^2}{2\sigma_{\beta_i}^2} \right] \quad (20)$$

次に、FEM データの回帰係数分布推定結果(=事前情報)例として、 β_0 の分布を図 2(a)に示す。図の横軸は回帰係数を、縦軸は PDF を示している。本研究では、ベイズの定理を用いることにより、この回帰係数分布の計測データからの更新を行う。また、過去の正確な見積もりのデータが必ずしも手に入るとは限らず、事前情報の適合度が低い場合も検証を行う必要がある。そこで、本研究では、事前情報の適合度の違いによる検討を行うため、作成した回帰係数分布の平均値のみを変化させ、事前情報の精度が低いものを作成した。例として、 β_0 の分布を図 2(b)に示し、各事前情報の精度を表 3 に示す。本研究では、回帰精度を判定する指標として、次式で示される自由度調整済み決定係数 R^2_{adj} を用いる。

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{SSE / (n - p - 1)}{S_T / (n - 1)} \quad (21)$$

ここで、 n はデータ数、 SSE は残差平方和、 S_T は平均値まわりの 2 乗和を表し、 R^2_{adj} は 0~1 の間の値をとり、その値が 1 に近いほど回帰精度が高いことを意味する。また、表中に示す R^2_{adj} は FEM データの回帰精度ではなく、事前情報のみを用いて実験データの推定を行った場合の精度を示しており、A に近い値を示す場合は FEM 解析データにより導出された回帰モデルを実験モデルにそのまま適用できる。

Fig.2 The analysis result as regression coefficient distribution

Table 3 Goodness of fit of prior information

	R^2_{adj}
Prior Information A (high accuracy)	0.710
Prior Information B (low accuracy)	0.393

3・4 回帰係数分布の更新による小サンプル数での損傷評価

本研究は事前情報活用による小サンプル数での損傷評価の効果確認のため、次に示す 4 つの手法での解析を行った。実験の計測データから、①通常の回帰分析の場合、②事前情報のみのモデルが実験にほぼ適合した場合、③事前情報のみのモデルの適合度が低い場合、④過去のデータがなく、無情報事前分布を用いた場合。①~④の手法におけるはく離寸法の同定をサンプル数 8 点の場合、学習データ 3 点で作成したモデルから残りの 33 点の推定を行う場合の 2 種行う。FEM データを事前情報として用いることによって、小サンプルにおける実測に合わせた高精度の損傷評価モデルの作成が可能であるかの検証を行った。ここで、無情報事前分布とは、事前情報がないうちに用いる、その事前分布ができるだけ影響しないような事前分布である。本研究では無情報事前分布として、回帰係数分布 β_i はそれぞれ $\mu_{\beta_i} = 0$, $\sigma_{\beta_i}^2 = 1.0 \times 10^6$, τ は $r = 1.0 \times 10^{-3}$, $v = 1.0 \times 10^{-3}$ としている。

4 はく離寸法同定結果

4・1 事後分布推定結果

図 3(a), (b), (c)に、サンプル数 8 点、 $a=23.8\text{mm}$ における各事前情報と無情報事前分布用いた結果の確率分布を示す。図の横軸ははく離寸法の推定値[mm]を、縦軸は PDF を示し、図中の灰色の区間は 95%確信区間を示す。図 3(a), (b), (c)に示すように事前情報を用いる場合、確信区間幅はほぼ差はないが、無情報事前分布を用いる場

合, その幅は大きくなる. また(a), (b)と(c)の比較から, 無情報事前分布ではなく, 事前情報を用いることによって確信区間が狭くなり, 高精度での損傷同定が可能であることがわかる. また, 回帰係数を分布として推定することで, 損傷寸法を確率分布として推定することが可能であり, 本手法は信頼水準を使った評価にも有効であるといえる. 次に事前情報の有無, 適合度の違いによる推定精度の比較を行なった. 8点の実験データからはく離寸法同定を行った場合の結果を図4(a)に示す. 3点の実験データからはく離寸法同定モデルを作成し, 残りの33点を推定した結果を(b)に示す. 図の横軸ははく離寸法の実測値[mm]を, 縦軸は推定値[mm]を示し, 図中の点は図4に示す推定値分布の平均値を示している. また, 解析結果の比較のため図5(a)に8点の実験データからはく離寸法同定を行った場合の推定平均の残差平方和と95%確信区間幅の平均の棒グラフを示す. (b)に3点の実験データからはく離寸法同定を行った場合の推定平均の残差平方和の棒グラフを示す. 図4, 図5から事前情報を用いることにより, 推定誤差が学習データ3点では約82%, 9データでは約60%の改善がみられ, 事前情報の適合度が高いほど, 少ないデータ数で高い精度での同定が可能であることが確認された. また, 事前情報の適合度が低い場合であっても3データでは約80%, 9データでは約28%の改善がみられ, 従来の回帰分析より少ないデータ数で回帰精度に改善が見られることが確認された. さらに, 図4(b)から, 通常回帰分析では解析不可能であるサンプル数が説明変数より少ない場合であっても, 回帰係数を分布として用いれば推定が可能であることがわかる. つまり, 本手法は, たとえ事前情報がなくとも, サンプル数が少ないのならば, 通常回帰分析より精度良く推定が可能であると考えられる. また, 図5から, サンプル数の増加によって, 事前情報を用いた場合のほうが高精度で推定できることは変わらないが, 事前情報の有無による残差平方和と確信区間幅の平均の差が縮小しており, サンプル数が大きい場合, 本手法による差は少ないことがわかる. このことから, 本手法はサンプル数が少なくなるにつれ, 精度の向上が大きくなり, 小サンプルの時に特に有効であるといえる.

Fig.3 Probability distributions of the estimated size

Fig.4 Result of the size identification using each prior information

(a) $n=8$

(b) Learning data=3, Experimental data=33

Fig.5 Comparison as a result of the size identification using each prior information

4・2 更新に必要なデータ数の検討

データ数が少ない場合、事前情報の適合性がその精度に大きく影響を与える。そこで図 6(a), (b)に各データ数における、各事前情報の場合の評価精度と回帰係数 β_0 の 95%確信区間を示す。図の横軸はアップデートに用いたデータ数を、(a)の縦軸は R^2_{adj} を(b)の縦軸は 95%確信区間を示す。ここでデータ数が少ない場合は結果に大きな影響を与えるため交差推定を行った。 n 点($n=36$)の実験データからランダムに k 点のデータを学習データとして用い、作成したモデルから残りの $n-k$ 点のデータの推定を行った。繰り返し数は 100 とする。

図 6(a)から、事前情報 A を用いて解析を行った場合が最も少ないサンプル数で精度の改善が見られ、データ数が 8 点以上で R^2_{adj} が 0.8 以上となり、精度に大幅な改善が見られることがわかる。このことから、事前情報を用いることによって、サンプル数が 8 点以上あれば、高精度の損傷評価モデルの作成が可能だと考えられる。また、適合度が低い事前分布である事前情報 B を用いた場合であっても、無情報事前分布を用いた場合と比較して、少ないサンプル数で回帰精度に改善が見られ、少ないデータ数で損傷評価モデルの作成が可能であることが確認された。データ数が多い場合、本手法による推定精度の差は小さくなるが、データ数が少なくなるにつれ、本手法による改善幅は大きくなる。次に図 6(b)から、事前情報を用いることにより確信区間が狭くなることが確認された。その際に事前情報の適合度は関係ないことがわかる。また図(a)と同様にデータ数が少なくなるにつれ、本手法による改善幅は大きくなる。

(a) R^2_{adj}

(b) 95% Width of the credible

Fig.6 Result of the cross validation using each prior

5. 結 言

本研究では、FEM 解析データにより得られた学習データによる回帰係数分布を事前情報とし、実験により得られた小サンプルの学習データを用いた事後分布のベイズ推定から、小サンプルでの損傷診断の高精度化を行った。以下に結言を示す。

- ・ 過去の正確な見積りのデータを事前情報として用いることによって、小サンプルでの高精度な同定が可能であることが確認された。
- ・ 事前情報を用いることによって、確信区間が狭くなり、信頼水準を使った評価にも有利であることが確認された。つまり、損傷同定において、推定誤差が減少させ、誤評価の確率を減少させることが可能となる。
- ・ 電気ポテンシャル法によるはく離寸法同定において、推定誤差が学習データ 3 点では約 82%、9 データでは約 60%の改善がみられ、事前情報の適合度が高いほど、少ないデータ数で高い精度での同定が可能であることが確認された。また、事前情報の適合度が低い場合であっても 3 データでは約 80%、9 データでは約 28%の改善がみられ、従来の回帰分析より少ないデータ数で回帰精度に改善が見られることが確認され、少数の学習データの場合で本手法の適用により診断精度が改善されることが確認された。

文 献

- (1) 中妻照雄, 入門 ベイズ統計学, 第 2 版 (2007), 朝倉書店
- (2) 古谷知之, ベイズ統計データ分析: R&WinBUGS, 第 3 版(2009), 朝倉書店
- (3) 深澤圭太, 角谷拓, “始めよう!ベイズ推定によるデータ解析”, 日本生態学会誌, Vol.59, (2009) pp. 167-170.
- (4) 久保拓弥, “簡単な例題で理解する空間統計モデル”, 日本生態学会誌, Vol.59, (2009) pp. 187-196.
- (5) Siu, N.O., Kelly, D.L, “Bayesian parameter estimation in probabilistic risk assessment¹”, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 62, (1998), pp. 89-116.
- (6) Quigley, J., Bedford, T, Walls, L., “Estimating rate of occurrence of rare events with empirical bayes: A railway application”, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 92, (2007), pp. 619-627.
- (7) Friswell, M.L, “Damage identification using inverse methods”, *Philosophical Transaction, The Royal Society A*, Vol. 365, (2007), pp. 393-410.
- (8) Farrar, C.R, Worden, K. “An introduction to structural health monitoring”, *Philosophical Transaction, The Royal Society A*, Vol. 365, (2007), pp. 303-315.
- (9) 矢代茂樹, 西川雅章, 岡部朋永, 武田展雄 “応答曲面法を利用した FBG センサ埋め込み CFRP 積層板の損傷評価” 日本機械学会材料力学部門講演会論文集, (2003) pp. 1017-1018.
- (10) 辺 吾一, 山口達也, 福田行義, 青木義男, Pak, K.C., “局所フレキシビリティ法による CFRP 積層材の損傷同定” 日本機械学会論文集 A 編, Vol.66, No.644(2000) pp. 721-726.
- (11) 岩崎篤, 轟 章, “一般化線形混合モデルを用いた逆問題解析による損傷同定の高精度化” 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 76, No. 768 (2010) pp. 32-39.
- (12) Iwasaki, A., Todoroki, A., “Statistical Evaluation of modified Electrical Resistance Change Method for Delamination Monitoring of CFRP Plate”, *Structural health monitoring, An International journal*, Vol. 4, No. 2 (2005), pp. 119-136.
- (13) 岡島智史, 泉聡志, 酒井信介, “減肉率可変モデルにおける配管破損確率評価のための拡張ベイズ手法”, 材料 57-4(2008) pp. 401-407.
- (14) 岡島智史, 泉聡志, 酒井信介, “配管破損率を産業横断型配管損傷データベースから推定するための階層ベイズモデルの導入”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.74, No.741 (2008) pp. 741-748.
- (15) 酒井信介, 岡島智史, 泉聡志, 岩崎篤, “実機検査データによる疲労寿命のベイズ推定”, 材料 54-3 (2005) pp.308-313.
- (16) 岡島智史, 酒井信介, 泉聡志, 岩崎篤, “小標本検査データを元にした疲労破損率のベイズ推定”, 第 20 回材料・構造信頼性シンポジウム講演論文集, 60-65(2004).
- (17) 廣畑賢治, 川上崇, 向井稔, 川村法靖, 干強, 白鳥正樹, “応答曲面法およびベイズ理論に基づく構造信頼性設計手法の提案”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.67, No.660 (2001) pp. 35-41.

- (18) 轟 章, 鈴木洋之, 島村佳伸 “電気ポテンシャル法を用いた CFRP 層間はく離き裂の同定” 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 76, No. 768 (2010) pp. 32-39.
 - (19) 田中雄樹, 轟 章, 島村佳伸 “複数電極電気抵抗変化の応答曲面を用いた CFRP はく離検出知的構造の開発”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 65, No. 640 (1999) pp. 2432-2438.
 - (20) Ueda, M., Todoroki, A., “Delamination monitoring of quasi-isotropic CFRP laminate using electric potential change method, *Modern Physics letters B*, Vol. 22, No. 11 (2008), pp. 869-874.
 - (21) Todoroki, A., Omagari, K., “Detection of matrix crack density of CFRP using electrical potential change method with multiple probes, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, Vol. 2, No. 6 (2008), pp. 718-729.
 - (22) 豊田秀樹, マルコフ連鎖モンテカルロ法, 第 1 版(2008), 朝倉書店
 - (23) 伊庭幸人, 種村正美, 大森裕浩, 和合肇, 佐藤整尚, 高橋明彦, 計算統計Ⅱ マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺, 第 2 版(2006), 岩波書店
 - (24) 山道真人, 角谷拓, “マルコフ連鎖モンテカルロ(MCMC)法を用いたシミュレーションモデルのパラメータ推定:ベイズアンサンブル入門”, 日本生態学会誌, Vol.59, (2009) pp. 207-216.
-