板厚方向に一様な平板状の静電場領域に対する効率的な静磁場解析法*

岸本 喜直^{*1}, 高橋 諒^{*2}, 大塚 年久^{*1}, 小林 志好^{*1}, 天谷 賢治^{*3}An Efficient Analysis Method for Magnetostatic Field
Induced by Flat Plate Shaped and Thickness Uniform Electrostatic Field DomainYoshinao KISHIMOTO^{*1}, Makoto TAKAHASHI, Toshihisa OHTSUKA,
Yukiyoshi KOBAYASHI and Kenji AMAYA^{*1} Department of Mechanical Engineering, Tokyo City University
1-28-1, Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo, 158-8557, Japan

The magnetostatic analysis is important on corrosion detection problems, nondestructive inspection of structures and biomagnetism measurement. Boundary element method (BEM) is often used to the magnetostatic analysis conventionally because BEM does not require the discretization of the magnetostatic field domain and has an advantage for open domain problems. On the other hand, 2D BEM is more accurate and more efficient than 3D BEM to calculate the electrostatic field of flat plate shaped and thickness uniform electrostatic field domain. However, in case of the magnetostatic field should be calculated, the conventional method requires numerical calculation of electric potentials at discrete sample points in the electrostatic field domain, and numerical region integration of the discrete points. This research has developed a new boundary element method for analyzing magnetostatic field induced by flat plate shaped and thickness uniform electrostatic field domain. This method describes magnetic vector potential and magnetic flux density as the similar form of 2D BEM for the electrostatic field analysis. Since the magnetostatic field can be calculated directly from the results of 2D BEM for the electrostatic field analysis, the accuracy and computational time are improved. In order to demonstrate the accuracy and efficiency of the present method, some example problems are solved and the results are compared with the conventional method. Present method is also applied to the practical problem which is an inspection of lithium-ion batteries.

Key Words : Magnetostatic Analysis, Biot-Savart Law, Boundary Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Nondestructive Inspection, Electromagnetic Measurement

1. 緒 言

現在, 構造物中の鉄筋などの腐食状態を調べる手段やき裂の有無を調べる非破壊検査を行う手段に静磁場解析が盛んに用いられている。また, 生物学の分野では脳内の微小な電気信号により生じる磁場を解析し, その活動を研究することにも利用され, 静磁場解析は工学に限らず非常に重要である^{(1)~(5)}。

静電場における電流が誘起する静磁場を解析する場合, 有限要素法や境界要素法など種々の数値解析法が利用できる。その中でも磁気ベクトルポテンシャルを導入した境界要素法は, 磁場領域内部で要素分割を必要とせず, 解析精度も高いため有用である^{(6)~(11)}。また, 前報⁽¹²⁾で報告したように, 静電場がラプラス方程式に支配される場合には, 任意の点における磁気ベクトルポテンシャルは静電場領域表面の電位に関する積分で表せる。したがって, この方法ではまず, 静電場領域の表面を境界要素分割し, 三次元境界要素法で静電場領域表面すべての電位

* 原稿受付 2012 年 11 月 8 日

^{*1} 正員, 東京都市大学工学部機械工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)^{*2} 東京都市大学大学院工学研究科機械工学専攻 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)^{*3} 正員, 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻
(〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

E-mail: ykishimo@tcu.ac.jp

を既知とした後、同じ境界要素を用いて磁気ベクトルポテンシャルを得ることができる。

一方、解析対象が薄平板内の電場のように、電位分布が板厚方向に一樣で、板厚方向に垂直な平面で二次元分布をなす場合、静電場解析は二次元境界要素法で行う方が解析精度が高く、計算効率も良い⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。しかしながら、このような静電場が誘起する静磁場を前述の方法で解析する際に、薄平板表面の積分を数値積分で求めるのでは計算精度の低下と計算量の増加を招き、静電場解析に用いた二次元境界要素法の利点を損なうことになる。

そこで、本研究では板厚方向に一樣で、その軸方向に垂直な平面（以下、計算平面と呼称する。）で二次元ポアソン方程式に支配される平板状の静電場に対し、二次元境界要素法を利用した効率的な静磁場の境界要素解析法を開発した。本手法ではまず、計算平面上の任意の点の電位が二次元境界要素法によって計算できることを利用する^{(9)(12)~(14)}。次に、静磁場の積分方程式における静電場領域の表面に関する積分項を解析的に計算し、その積分範囲を静電場解析に用いる二次元境界要素法と同様の形式で表す。これらの操作により、磁気ベクトルポテンシャルと二次元境界要素法による計算結果の関係を直接定式化することができ、数値計算における計算精度と計算量の問題を解決することができる。

本論文ではまず、ポアソン電場に誘起される静磁場問題を示し、従来の静磁場解析法として、ポアソン電場に対して拡張した前報⁽¹²⁾の静磁場解析法について概説する。次に本手法の詳細として、静電場領域表面の電位に関する面積分の積分範囲を二次元境界要素法と同様の形式に変換する手順を述べ、それらを用いた磁気ベクトルポテンシャルと磁束密度の定式化の手順について述べる。最後に従来法と本手法の比較のため、具体例として一樣な電流が流れている直方体周辺の磁束密度と、薄平板型リチウムイオン電池内を流れる電流が誘起する磁束密度について、従来法と本手法を用いて計算した結果を示す。

2. ポアソン電場に誘起される静磁場問題

静磁場と静電場の概略図を図1に示す。図1において、境界 Γ_M で囲まれた透磁率 μ である静磁場領域 Ω_M と、領域 Ω_M 内において境界 Γ_E で囲まれた電気伝導度 κ である静電場領域 Ω_E を考える。透磁率 μ は領域 Ω_M 内で、電気伝導度 κ は領域 Ω_E 内で場所によらず一定であるとする。磁束密度を求めるべき点 p の位置ベクトルを p 、ソース点 q の位置ベクトルを q とし、境界 Γ_M における外向き単位法線ベクトルを n_M 、境界 Γ_E における外向き単位法線ベクトルを n_E とする。また、全領域を Ω_∞ （境界 Γ_∞ ）とする。

ここで、図1に示したように静電場領域の形状が板厚 t の平板であるとき、その板厚方向に z 軸をとり、 z 軸の原点 O を静電場領域の底面にとる。このとき、残りの互いに直交する二軸を x 軸および y 軸とし、 xy 平面すなわち計算平面を図2に示す。図2において、二次元領域 Ω'_E を静電場領域、境界 S_E を計算平面における静電場領域の境界とする。また、計算平面上に投影された静磁場領域 Ω_M および全領域 Ω_∞ をそれぞれ Ω'_M および Ω'_∞ とする。以下、ダッシュ(')の付いたベクトルは計算平面上の二次元ベクトルを表すものとし、計算平面上に投影された磁束密度を求める点 p の二次元位置ベクトルを p' 、ソース点 q の二次元位置ベクトルを q' 、境界 S_E の外向き単位法線ベクトルを n'_S とする。

2.1 三次元静電場解析

静電場領域 Ω_E において、点 q における電位 $u(q)$ と電流密度 $j(q)$ 、単位体積あたりの電流の沸き出し量 $f(q)$ はそれぞれ以下の関係式を満たす。

$$j(q) = -\kappa \nabla_q u(q) \quad (1)$$

$$\nabla_q^2 u(q) = -\frac{1}{\kappa} f(q) \quad (2)$$

ここで、 ∇_q は q 座標に関する三次元ナブラ演算子であることを表す。

式(2)から電位 $u(q)$ を求めるためには、三次元ラプラス方程式の基本解 $\phi^*(q, s)$ を導入する。

$$\phi^*(q, s) = \frac{1}{4\pi |q - s|} \quad (3)$$

$$\nabla_q \phi^*(q, s) = -\nabla_s \phi^*(q, s) = -\frac{q - s}{4\pi |q - s|^3} \quad (4)$$

$$\nabla_q^2 \phi^*(q, s) = \nabla_s^2 \phi^*(q, s) = -\delta(|q - s|) \quad (5)$$

Fig. 1 Analytic area

Fig. 2 Calculation plain

ここで、 δ はディラックのデルタ関数である．この基本解 $\phi^*(q, s)$ を式 (2) の両辺に乗じて領域 Ω_E で領域積分すると

$$\int_{\Omega_E} \phi^*(q, s) \nabla_s^2 u(s) d\Omega(s) = -\frac{1}{\kappa} \int_{\Omega_E} \phi^*(q, s) f(s) d\Omega(s) \quad (6)$$

となる．式 (6) の左辺をグリーンの定理を用いて変形することで

$$u(q) = \int_{\Gamma_E} \phi^*(q, s) \frac{\partial u(s)}{\partial n_E} d\Gamma(s) - \int_{\Gamma_E} \frac{\partial \phi^*(q, s)}{\partial n_E} u(s) d\Gamma(s) + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega_E} \phi^*(q, s) f(s) d\Omega(s) \quad (7)$$

が得られる．ここで、 $\partial/\partial n_E$ は境界 Γ_E の外向き法線方向の微分を表す．なお、点 q が領域 Ω_E 外にあるとき、式 (7) の右辺は 0 となることに注意されたい．

2.2 二次元静電場解析

静電場領域 Ω_E において、電位 $u(q)$ と電流の沸き出し量 $f(q)$ が板厚方向すなわち z 軸方向に一様であるとき、図 2 に示した計算平面を利用して、式 (2) は次式となる．

$$\nabla_q'^2 u(q') = -\frac{1}{\kappa} f(q') \quad (8)$$

ここで、 ∇_q' は q' 座標に関する二次元ラプラス演算子であることを表す．

式 (8) に対して、2.1 と同様の手順を行うと、次式が得られる．

$$u(q') = \int_{S_E} \psi^*(q', s') \frac{\partial u(s')}{\partial n_S} dS(s') - \int_{S_E} \frac{\partial \psi^*(q', s')}{\partial n_S} u(s') dS(s') + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_E} \psi^*(q', s') f(s') d\Omega'(s') \quad (9)$$

ここで、 $\psi^*(q, s)$ は二次元ラプラス方程式の基本解であり、

$$\psi^*(q', s') = -\frac{1}{2\pi} \log |q' - s'| \quad (10)$$

$$\nabla_q' \psi^*(q', s') = -\nabla_{s'}' \psi^*(q', s') = -\frac{q - s}{2\pi |q - s|^2} \quad (11)$$

$$\nabla_q'^2 \psi^*(q', s') = \nabla_{s'}'^2 \psi^*(q', s') = -\delta(|q' - s'|) \quad (12)$$

である．また、 $\partial/\partial n_S$ は境界 S_E の外向き法線方向の微分を表す．なお、点 q が領域 Ω'_E 外にあるとき、式 (9) の右辺もまた 0 となることに注意されたい．

3. 従来の静電場領域に対する領域積分を必要としない静磁場解析法

3.1 磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ の積分方程式

静磁場領域 Ω_M 内の点 $\mathbf{p}$ における磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ はそれぞれ以下の関係式を満たす．

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \nabla_p \times \mathbf{A}(\mathbf{p}) \quad (13)$$

$$\nabla_p^2 A(\mathbf{p}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{p}) \quad (14)$$

式 (14) から磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ を求めるためには，式 (3) に示した，三次元ラプラス方程式の基本解を利用する．三次元ラプラス方程式の基本解 $\phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ を式 (14) の両辺に乗じて領域 Ω_M で領域積分すると，領域 Ω_E 外の電流密度が 0 であることから

$$\int_{\Omega_M} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \nabla_q^2 A(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = -\mu \int_{\Omega_E} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathbf{j}(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) \quad (15)$$

となる．式 (15) の左辺をグリーンの定理を用いて変形すると，磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ の積分方程式として

$$A(\mathbf{p}) = \int_{\Gamma_M} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial A(\mathbf{q})}{\partial n_M} d\Gamma(\mathbf{q}) - \int_{\Gamma_M} \frac{\partial \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_M} A(\mathbf{q}) d\Gamma(\mathbf{q}) + \mu \int_{\Omega_E} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathbf{j}(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) \quad (16)$$

が得られる．ここで， $\partial/\partial n_M$ は境界 Γ_M の外向き法線方向の微分を表す．さらに，式 (16) の右辺第 3 項の静電場領域 Ω_E に関する領域積分は，前報⁽¹²⁾で報告した方法をもとに式 (1) および式 (7) を用いて，次式のように変換できる．

$$\int_{\Omega_E} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathbf{j}(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = \kappa \left(\int_{\Gamma_E} \mathbf{g}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \frac{\partial u(\mathbf{s})}{\partial n_E} d\Gamma(\mathbf{s}) - \int_{\Gamma_E} \mathbf{h}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega_E} \mathbf{g}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\Omega(\mathbf{s}) \right) \quad (17)$$

ここで，積分核 $\mathbf{g}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s})$, $\mathbf{h}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ は

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{s}}{8\pi |\mathbf{p} - \mathbf{s}|} \quad (18)$$

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{3(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}_E(\mathbf{s})}{8\pi |\mathbf{p} - \mathbf{s}|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{s}) - \frac{\mathbf{n}_E}{8\pi |\mathbf{p} - \mathbf{s}|} \quad (19)$$

である．さらに，式 (17) において，両辺に対して ∇_p との外積をとると

$$\nabla_p \times \int_{\Omega_E} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathbf{j}(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = -\kappa \int_{\Gamma_E} \frac{\mathbf{n}_E(\mathbf{s}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{s})}{|\mathbf{p} - \mathbf{s}|^3} u(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) = \nabla_p \times \left(-\kappa \int_{\Gamma_E} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) \mathbf{n}_E(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) \right) \quad (20)$$

となり，磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{p}) (= \nabla_p \times \mathbf{A}(\mathbf{p}))$ を計算する上で，式 (17) の右辺第 1 項および第 3 項は不要であり，磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ のオフセット項になる．よって，このオフセット項を 0 とすることで式 (16) は

$$A(\mathbf{p}) = \int_{\Gamma_M} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \frac{\partial A(\mathbf{s})}{\partial n_M} d\Gamma(\mathbf{s}) - \int_{\Gamma_M} \frac{\partial \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s})}{\partial n_M} A(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) - \kappa \mu \int_{\Gamma_E} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) \mathbf{n}_E(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) \quad (21)$$

となる．したがって，磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ は式 (21) を式 (13) に代入することで得られ，

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \int_{\Gamma_M} \nabla_p \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \times \frac{\partial A(\mathbf{s})}{\partial n_M} d\Gamma(\mathbf{s}) - \int_{\Gamma_M} \nabla_p \frac{\partial \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s})}{\partial n_M} \times A(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) - \frac{\kappa \mu}{4\pi} \int_{\Gamma_E} \frac{\mathbf{n}_E(\mathbf{s}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{s})}{|\mathbf{p} - \mathbf{s}|^3} d\Omega(\mathbf{s}) \quad (22)$$

となる．なお，式 (21) および式 (22) において，静磁場境界 Γ_M を無限遠（境界 Γ_∞ ）にとると，静磁場境界 Γ_M に関する境界積分項である右辺第 1 項と第 2 項を無視できる⁽⁹⁾．

3.2 従来法を板厚方向に一様な平板状の静電場領域に適用する際の問題点

従来法では式 (21) および式 (22) の右辺第 3 項で表される静電場境界 Γ_E に関する面積分を行う必要がある．したがって，図 1 に示したような，平板状の静電場領域が誘起する静磁場を計算するには上下面と側面の電位に関して面積分する必要がある．一方で，静電場解析は二次元境界要素法で行う方が解析精度が高く，計算効率も良い．しかしながら，このような静電場が誘起する静磁場を従来法で解析する際，特に上下面の電位に関する面積分を数値積分で求めると，計算精度の低下の要因となる．さらに，領域 Ω'_E 内の数値積分点の電位を得るために式 (9) で表される積分を行わなければならないため，計算量が増加し，静電場解析に用いた二次元境界要素法の利点を損なうことになる．

4. 板厚方向に一様な平板状の静電場領域に対する効率的な静磁場解析法

4.1 本手法による磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ の導出

本研究の手法では、まず式 (21) 中の境界 Γ_E に関する面積分の積分範囲を図 1 に示した上下面と側面に分ける。次に、上下面に関する積分について式 (9) を利用し、面積分に関する部分をあらかじめ解析的に計算することで、二次元境界要素法と同様の形式で表現する。側面に関する積分については、電位が z 軸方向に一様であることを利用して、境界 S_E に関する線積分で表す。以上により、磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ を二次元境界要素法と同様の形式で表すことができる。

4.1.1 境界 Γ_E 上下面の積分

式 (21) の右辺第 3 項の境界 Γ_E に関する面積分について、まず、境界 Γ_E の上面に関する積分を $I_1(\mathbf{p})$ とおくと、図 2 に示した計算平面を用いて

$$I_1(\mathbf{p}) = \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) u(\mathbf{q}') \{0, 0, 1\} d\Omega'(\mathbf{q}') = \left\{ 0, 0, \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) u(\mathbf{q}') d\Omega'(\mathbf{q}') \right\} \quad (23)$$

と表せる。このとき、 x 成分と y 成分は 0 になるから、 $I_1(\mathbf{p})$ は z 成分だけ計算すればよい。したがって、 $I_1(\mathbf{p})$ の z 成分に対して、点 q が領域 Ω'_E 外にあるときに式 (9) の右辺が 0 になることを利用し、積分範囲を領域 Ω'_E から全領域 Ω'_∞ に拡張した上で式 (9) を代入すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) u(\mathbf{q}') d\Omega'(\mathbf{q}') \\ &= \int_{\Omega'_\infty} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) u(\mathbf{q}') d\Omega'(\mathbf{q}') \\ &= \int_{\Omega'_\infty} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \left(\int_{S_E} \psi^*(\mathbf{q}', s') \frac{\partial u(s')}{\partial n_S} dS(s') - \int_{S_E} \frac{\partial \psi^*(\mathbf{q}', s')}{\partial n_S} u(s') dS(s') + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_E} \psi^*(\mathbf{q}', s') f(s') d\Omega'(s') \right) d\Omega'(\mathbf{q}') \\ &= \int_{\Omega'_\infty} \int_{S_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \psi^*(\mathbf{q}', s') \frac{\partial u(s')}{\partial n_S} dS(s') d\Omega'(\mathbf{q}') - \int_{\Omega'_\infty} \int_{S_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \frac{\partial \psi^*(\mathbf{q}', s')}{\partial n_S} u(s') dS(s') d\Omega'(\mathbf{q}') \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_\infty} \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \psi^*(\mathbf{q}', s') f(s') d\Omega'(s') d\Omega'(\mathbf{q}') \end{aligned} \quad (24)$$

となる。積分の順序の入れ換えると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) u(\mathbf{q}') d\Omega'(\mathbf{q}') \\ &= \int_{S_E} \left(\int_{\Omega'_\infty} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \psi^*(\mathbf{q}', s') d\Omega'(\mathbf{q}') \right) \frac{\partial u(s')}{\partial n_S} dS(s') - \int_{S_E} \left(\int_{\Omega'_\infty} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \frac{\partial \psi^*(\mathbf{q}', s')}{\partial n_S} d\Omega'(\mathbf{q}') \right) u(s') dS(s') \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_E} \left(\int_{\Omega'_\infty} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \psi^*(\mathbf{q}', s') d\Omega'(\mathbf{q}') \right) f(s') d\Omega'(s') \\ &= \int_{S_E} \hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) \frac{\partial u(s')}{\partial n_S} dS(s') - \int_{S_E} \hat{l}^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) u(s') dS(s') + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_E} \hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) f(s') d\Omega'(s') \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ただし、ここで積分核 $\hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\})$, $\hat{l}^*(\mathbf{p}, \{s', t\})$ はあらかじめ解析的に求めておくことができ（付録参照）、それぞれ以下ようになる。

$$\hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) = \frac{1}{4\pi} \left(\log \left[R(\mathbf{p}, s', t)^{\zeta-t} \right] - r(\mathbf{p}, s', t) \right) \quad (26)$$

$$\hat{l}^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) = \frac{(\mathbf{p}' - s') \cdot \mathbf{n}'_S(s')}{4\pi R(\mathbf{p}, s', t)} \quad (27)$$

ここで、 ζ は位置ベクトル $\mathbf{p}$ の z 成分であり、また、

$$R(\mathbf{p}, s', t) = |\mathbf{p} - \{s', t\}| + \zeta - t \quad (28)$$

$$r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t) = |\mathbf{p} - \{\mathbf{s}', t\}| \quad (29)$$

とおいた．

次に，式 (21) の右辺第 3 項の境界 Γ_E に関する面積分について，境界 Γ_E の下面に関する積分を $I_2(\mathbf{p})$ とおくと，図 2 に示した計算平面を用いて

$$I_2(\mathbf{p}) = \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', 0\}) u(\mathbf{q}') \{0, 0, -1\} d\Omega'(\mathbf{q}') = \left\{ 0, 0, - \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', 0\}) u(\mathbf{q}') d\Omega'(\mathbf{q}') \right\} \quad (30)$$

と表せる． $I_2(\mathbf{p})$ の z 成分について， $I_1(\mathbf{p})$ の場合と同様の手順を行うと

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega'_E} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', 0\}) u(\mathbf{q}') d\Omega'(\mathbf{q}') \\ & = - \int_{S_E} \hat{k}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', 0\}) \frac{\partial u(\mathbf{s}')}{\partial n_S} dS(\mathbf{s}') + \int_{S_E} \hat{l}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', 0\}) u(\mathbf{s}') dS(\mathbf{s}') - \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_E} \hat{k}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', 0\}) f(\mathbf{s}') d\Omega'(\mathbf{s}') \end{aligned} \quad (31)$$

が得られる．

4.1.2 境界 Γ_E 側面の積分

式 (21) の右辺第 3 項の境界 Γ_E に関する面積分について，境界 Γ_E の側面に関する積分を $I_3(\mathbf{p})$ とおくと，図 1 および図 2 に示した計算平面を用いて

$$I_3(\mathbf{p}) = \int_{S_E} \int_0^t \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', z\}) u(\mathbf{s}') \{ \mathbf{n}'_S(\mathbf{s}'), 0 \} dz dS(\mathbf{s}') = \left\{ \int_{S_E} m^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) u(\mathbf{s}') \mathbf{n}'_S(\mathbf{s}') dS(\mathbf{s}'), 0 \right\} \quad (32)$$

と表せる．ただし，ここで

$$m^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) = \int_0^t \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', z\}) dz = \frac{1}{4\pi} \log \left[\frac{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t)} \right] \quad (33)$$

とおいた．

以上，4.1.1 と 4.1.2 より，磁気ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{p})$ は次式で表せる．

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}) = & \int_{\Gamma_M} \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \frac{\partial A(\mathbf{s})}{\partial n_M} d\Gamma(\mathbf{s}) - \int_{\Gamma_M} \frac{\partial \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s})}{\partial n_M} A(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) - \kappa\mu \left\{ \int_{S_E} m^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) u(\mathbf{s}') \mathbf{n}'_S(\mathbf{s}') dS(\mathbf{s}'), \right. \\ & \left. \int_{S_E} k^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) \frac{\partial u(\mathbf{s}')}{\partial n_S} dS(\mathbf{s}') - \int_{S_E} l^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) u(\mathbf{s}') dS(\mathbf{s}') + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_E} k^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) f(\mathbf{s}') d\Omega'(\mathbf{s}') \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

したがって，磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ は式 (34) を式 (13) に代入することで得られ，

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{p}) = & \int_{\Gamma_M} \nabla_p \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \times \frac{\partial A(\mathbf{s})}{\partial n_M} d\Gamma(\mathbf{s}) - \int_{\Gamma_M} \nabla_p \frac{\partial \phi^*(\mathbf{p}, \mathbf{s})}{\partial n_M} \times A(\mathbf{s}) d\Gamma(\mathbf{s}) \\ & - \frac{\kappa\mu}{4\pi} \left\{ \int_{S_E} \mathbf{v}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) \frac{\partial u(\mathbf{s}')}{\partial n_S} dS(\mathbf{s}') - \int_{S_E} \mathbf{w}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) u(\mathbf{s}') dS(\mathbf{s}') + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega'_E} \mathbf{v}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) f(\mathbf{s}') d\Omega'(\mathbf{s}') \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

となる．ただし，以上において

$$k^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) = \hat{k}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) - \hat{k}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', 0\}) = \frac{1}{4\pi} \left(\log \left[\frac{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t)^{\zeta-t}}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)^{\zeta}} \right] - r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t) + r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0) \right) \quad (36)$$

$$l^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) = \hat{l}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) - \hat{l}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', 0\}) = \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{s}') \cdot \mathbf{n}'_S(\mathbf{s}')}{4\pi} \left(\frac{1}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t)} - \frac{1}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)} \right) \quad (37)$$

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) = a \mathbf{e}_z \times \{\mathbf{p}' - \mathbf{s}', 0\} \quad (38)$$

$$\mathbf{w}^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{s}', t\}) = (b-a) \mathbf{e}_z \times \{\mathbf{n}'_S(\mathbf{s}'), 0\} + c (\mathbf{p}' - \mathbf{s}') \cdot \mathbf{n}'_S(\mathbf{s}') \mathbf{e}_z \times \{\mathbf{p}' - \mathbf{s}', 0\} + d \{\mathbf{n}'_S(\mathbf{s}'), 0\} \times \{\mathbf{p}' - \mathbf{s}', 0\} \quad (39)$$

$$\mathbf{e}_z = \{0, 0, 1\} \quad (40)$$

$$a = \frac{1}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t)} - \frac{1}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)} \quad (41)$$

$$b = \frac{1}{r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t)} - \frac{1}{r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)} \quad (42)$$

$$c = \frac{1}{r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t) R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t)^2} - \frac{1}{r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0) R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)^2} \quad (43)$$

$$d = \frac{1}{r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t) r(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)} \left(\frac{\zeta - t}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', 0)} - \frac{\zeta}{R(\mathbf{p}, \mathbf{s}', t)} \right) \quad (44)$$

とおいた．

4.2 本手法の利点

本手法では式 (34) および式 (35) のように，静電場領域の表面に関する積分項の積分範囲が静電場解析に用いる二次元境界要素法と同様の形式で表されている．したがって，静電場解析に用いた二次元境界要素法の境界要素と解析結果から磁場を直接計算できるため，計算量の点で改善されている．また，3.2 にて述べたように，上下面の電位に関する面積分を必要としないことから，従来法に比べて計算精度も向上することが期待される．

5. 従来法と本手法における計算精度と計算量の比較

本手法の有効性を確認するため，簡単な例として直方体の電場領域周辺の磁束密度を従来法と本手法を用いて計算した．得られた結果をピオ・サバールの法則による厳密解と比較し，従来法と本手法における計算精度と計算量の比較を行った．

5.1 解析対象

解析対象となるモデルを図 3 に示す．図 3 に示すように，一辺の長さが $2L$ の正方形を底面とし，高さが L の直方体内部を y 軸方向に電流密度 j が一様に流れているとする．また，直方体周辺の透磁率を μ とし，場所によらず一定とする．このときの点 $p(0, 0, 2L)$ における磁束密度 $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$ の厳密解はピオ・サバールの法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Omega_E} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{q}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{q})}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^3} d\Omega(\mathbf{q}) \quad (45)$$

を適用して，次式のように求まる．

$$B_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L \frac{j(2L - z)}{\{x^2 + y^2 + (2L - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$$

$$= \mu j L \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{\pi} \log \left[\frac{(2 + \sqrt{3})(7 - 2\sqrt{6})}{5} \right] - \frac{4}{\pi} \left(\tan^{-1} \left[\frac{8 - 5\sqrt{3}}{11} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{6} - 2}{2} \right] \right) \right\} \quad (46)$$

$$B_y = B_z = 0 \quad (47)$$

5.1.1 従来法による計算方法

従来法では式 (22) を用いた．ただし，静磁場境界 Γ_M を無限遠（境界 Γ_∞ ）にとり，式 (22) の右辺第 1 項と第 2 項を無視した．また，境界条件は次式のように設定した．

$$x = \pm L; \quad \frac{\partial u}{\partial n_E} = 0 \quad (48)$$

$$y = -L; \quad u = 0 \quad (49)$$

$$y = L; \quad \frac{\partial u}{\partial n_E} = -\frac{j}{\kappa} \quad (50)$$

$$z = \pm L; \quad \frac{\partial u}{\partial n_E} = 0 \quad (51)$$

本手法と計算精度の比較を行うため，図 4 のように直方体の上下面を一辺の分割数が N になるように四角形一定要素で分割した．したがって，従来法では計 $4N^2$ 個の四角形一定要素を用いた．

Fig. 3 The cuboid model

Fig. 4 The cuboid model (element division) for the conventional method

Fig. 5 The calculation plain (element division) for the present method

Fig. 6 The errors of the calculated results

Table 1 Comparison when the number of the elements = 400

Method	Division number N	Magnetic flux density $B_x [\mu\text{T}]$	Calculation error $ (B_x^{\text{Method}} - B_x^{\text{Exact}}) / B_x^{\text{Exact}} \times 100 [\%]$
Exact	—	13.162409	—
Conventional	10	12.793461	2.803046
Present	100	13.157526	0.037102

5.1.2 本手法による計算方法

本手法では式 (35) を用いた。ただし, 5.1.1 と同様に静磁場境界 Γ_M を無限遠 (境界 Γ_∞) にとり, 式 (35) の右辺第 1 項と第 2 項を無視した。また, 境界条件は式 (48) ~ 式 (50) のように設定した。要素分割は図 5 のように, 計算平面上に投影された直方体の一辺の分割数が N になるように直線一定要素で分割した。したがって, 本手法では計 $4N$ 個の直線一定要素を用いた。

5.2 数値計算

5.2.1 数値計算条件

具体的な数値を用いて計算した結果を比較することで, 従来法と本手法の計算精度と計算量の違いについて比較した。図 3 において, 長さを $L = 1 \text{ m}$, 直方体内の電流密度を $j = 100 \text{ A/m}^2$, 電気伝導度を $\kappa = 1 / \Omega \cdot \text{m}$ とし,

直方体周辺の透磁率を $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m とした．また，要素分割する際の一边の分割数 N は 2, 4, 8, 10, 20, 30, 40 の計 7 段階とした．このときの総要素数は従来法では 16 ~ 6400，本手法では 8 ~ 160 となる．本手法ではさらに細かく分割した分割数 $N = 100$ および 1000（総要素数 400 および 4000）の場合についても検討した．

以上の条件において，点 $p(0, 0, 2)$ における磁束密度 B の x 成分 B_x を式 (46)，従来法ならびに本手法を用いて計算した．なお，数値積分にはガウス・ルジャンドルの積分公式のうち 8 点公式を用い，積分点を従来法では $64 (= 8^2)$ 個，本手法では 8 個とした．

5.2.2 数値計算結果

点 p における磁束密度 B の x 成分 B_x について，厳密解 B_x^{Exact} と，総要素数を 400 とした場合においてそれぞれの手法によって得られた計算値 B_x^{Method} を表 1 に示す．また，厳密解に対して，分割数 N を変化させたときの従来法および本手法の計算値との差の推移を図 6 に示す．

表 1 より，総要素数が等しい場合，厳密解からの差は本手法の方が従来法に比べて約 75 倍小さいことが分かる．また，図 6 より分割数を大きくするにつれて，従来法と本手法ともに厳密解に近づく傾向が見られる．しかし，本手法の方が従来法に比べて，少ない分割数で速く厳密解に近づくことが分かる．したがって，計算精度について，本手法の方が従来法よりも優れていることが示された．一方，従来法では $4N^2$ 個の要素に，本手法では $4N$ 個の要素に分割して計算を行った．計算時間はこれら要素の数に比例し，従来法では N^2 ，本手法では N のオーダーとなる．したがって，計算量についても本手法の方が従来法よりも優れていることが分かる．

6. 実際の工学問題における適用例

本手法の実際の工学問題における有効性を確認するため，具体例として薄平板型リチウムイオン電池内を流れる電流が誘起する磁束密度の分布を従来法と本手法を用いて計算し，従来法と本手法における計算精度と計算量の比較を行った．

6.1 リチウムイオン電池の概要

一般的ナリチウムイオン電池の内部構造の概略図を図 7 に示す．リチウムイオン電池では正極をリチウム遷移金属酸化物 (LiCoO_2 や LiMn_2O_4 など) が塗布されたアルミニウム (Al) 箔とし，負極をカーボンが塗布された銅 (Cu) 箔として，正極と負極の間には電解液を浸み込ませたセパレータが挿入されている^{(15)~(17)}．セパレータには絶縁性のポリエチレン微多孔膜がよく用いられる．

一方で，リチウムイオン電池は製造工程で金属粉が混入してセパレータを破くことで，正極と負極が接触して短絡状態を形成する場合があります．短絡箇所には電流が集中して流れることで発火などの重大な事故につながる危険性が指摘されている^{(18) (19)}．そこで，本研究では電池内を流れる電流が誘起する電池外部の磁束密度分布を見積もることで，磁気計測を用いた非破壊による短絡位置の検出方法の有効性を検証できると考えられる．

6.2 数値計算モデル

図 8 に今回用いた数値計算モデルを示す．本数値計算モデルには正極と負極の間の一箇所に短絡が生じている電池モデルを用意した．ここで，電池モデルの寸法は正極，負極共に長さ 60 mm × 幅 20 mm × 厚さ 0.1 mm の薄い直方体平板とし，正極と負極の間にあるセパレータの厚さは無視した．また，座標を図 8 (b) に示すようにモデルの中心を原点とする直交座標系をとり， $(x_d, y_d, 0)$ を短絡部の中心座標とする．以下では本数値計算モデルに対して，充電時を想定して x 軸方向に電流を流したとき，正極の上面から 1 mm 離れた場所に生じる y 軸方向および z 軸方向の磁束密度を，従来法と本手法を用いて見積もった．

6.2.1 従来法による計算方法および計算条件

図 9 に従来法で計算する場合の境界要素モデルを示す．磁束密度の計算には式 (22) を用いた．境界要素モデルを正極と負極でそれぞれ作成して計算を行い，得られた計算結果を足し合わせることで正極と負極から誘起される磁束密度の合計値を得た．境界要素には四角形一定要素を用い，正極と負極をそれぞれ x 軸方向に 40 分割， y 軸方向に 60 分割， z 軸方向に 1 分割し，総要素数を 10000（正極と負極の要素数をともに 5000）とした．

Fig. 7 Outline of lithium-ion battery

Fig. 8 The calculation model of lithium-ion battery

Fig. 9 The element division model of the lithium-ion battery for the conventional method

Fig. 10 The element division model of the lithium-ion battery for the present method

ここで、式 (22) を適用するにあたって、電池内には電極材料や添加剤、混入する金属粉の種類によって磁性を帯びたものが存在することがある。しかし、今回は計算方法の比較という観点から、磁性の影響を無視し、全領域において透磁率を $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m で一様とした。さらに、静磁場境界 Γ_M を無限遠（境界 Γ_∞ ）にとり、式 (22) の右辺第 1 項と第 2 項を無視した。

同様に、電気伝導度 κ についても電池に用いる電極材料や添加剤の種類によって変動することがあると考えられる。しかしながら、今回は正極内と負極内で電気伝導度が一定であると仮定し、本数値計算においては u の値を電気伝導度と電位の積であると改めて定義することで、数値上の条件では $\kappa = 1/\Omega \cdot \text{m}$ とした。また、境界条

件を正極側と負極側でそれぞれ以下のように設定した．まず，正極側では

$$x = -10 \text{ mm}; \quad u = 0 \text{ V} \quad (52)$$

$$\text{座標 } (x_d, y_d, 0) \text{ の節点を持つ 4 要素}; \quad \frac{\partial u}{\partial n_E} = -\frac{I}{S} \quad (53)$$

負極側では

$$x = 10 \text{ mm}; \quad u = 0 \text{ V} \quad (54)$$

$$\text{座標 } (x_d, y_d, 0) \text{ の節点を持つ 4 要素}; \quad \frac{\partial u}{\partial n_E} = \frac{I}{S} \quad (55)$$

とした．ここで， I および S はそれぞれ短絡部を流れる電流および短絡部の面積であり， $I = 1 \text{ A}$ ， $S = 2 \text{ mm}^2$ とした．

6.2.2 本手法による計算方法および計算条件

図 10 に本手法で計算する場合の境界要素モデルを示す．磁束密度の計算には式 (35) を用いた．境界要素には直線一定要素を用い，従来法による計算と同様に正極と負極をそれぞれ x 軸方向に 40 分割， y 軸方向に 60 分割し，総要素数を 400（正極と負極の要素数をともに 200）とした．また，透磁率 μ ，電気伝導度 κ ，および境界条件を前項で述べた従来法の場合と同様とした．ただし，境界条件のうち，式 (53) および式 (55) については単位体積あたりの電流の沸き出し量 $f(x, y, z)$ で近似的に評価し，以下の変換式

$$f(x, y, z) = \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial n_E} \quad (56)$$

を用いた．ここで， t は正極あるいは負極の厚さであり，本数値計算では $t = 0.1 \text{ mm}$ である．また，式 (56) を与える範囲は図 10 に示したように，三次元モデルに境界条件の式 (53) あるいは式 (55) を与えた 4 要素に相当する範囲とし，式 (35) の右辺第 5 項の f に関する積分計算にはガウス・ルジャンドルの数値積分公式（8 点公式）を用いた．

6.3 数値計算結果

短絡部の中心座標を $(x_d, y_d) = (0, 0) \text{ mm}$, $(0, 10) \text{ mm}$, $(0, 20) \text{ mm}$ のように y 軸に沿って変化させた三通りとして，従来法と本手法によって得られたリチウムイオン電池外部の磁束密度分布の y 成分および z 成分を図 11 および図 12 に示す．ここで，図 11 および図 12 に示した磁束密度分布の計算位置は正極の上面から 1 mm 離れた位置で y 軸に沿った地点 $(x, z) = (0, 1.1) \text{ mm}$ である．

まず，計算精度に関して，図 11 および図 12 に示すようにすべての条件において従来法と本手法による磁束密度分布がほとんど一致していることが分かる．また，本手法を適用する際に用いた近似について，電池内の電位分布を板厚方向（ z 軸方向）に一様としたことと， z 軸方向の電流の流出入に式 (56) を用いたことが挙げられるが，本数値計算ではこれらの近似は妥当であったといえる．

次に，計算量に関して，計算機に CPU 3.16 GHz，メモリ 4 GB である市販のパーソナルコンピュータを用いたところ，図 11 と図 12 の全結果を算出するのにかった総所要時間は従来法で約 560 秒，本手法で約 4 秒であった．したがって，本手法によって従来法の約 140 倍の速さで計算できることが分かった．

以上より，実際の工学問題において，本手法によって従来法と同様の結果を，従来法よりも高速に得られることが示された．また，図 11 および図 12 より，短絡部の中心座標の変化にともなって磁束密度分布が変化していることから，薄平板型リチウムイオン電池に対して，磁気計測を用いた非破壊による短絡位置の検出方法の有効性を本数値計算によって確認することができた．

7. 結 言

本研究では板厚方向に一様で，その軸方向に垂直な平面で二次元ポアソン方程式に支配される平板状の静電場に対し，静電場領域に関する積分を評価する式 (21) および式 (22) の右辺第 3 項を，それぞれ式 (34) および式 (35)

(x_d, y_d) [mm]	(0, 0)	(0, 10)	(0, 20)
Conventional method	---	---	---
Present method	—	---	---

Fig. 11 The y component of the magnetic flux density along y-axis; $(x, z) = (0, 1.1)$ mm

(x_d, y_d) [mm]	(0, 0)	(0, 10)	(0, 20)
Conventional method	---	---	---
Present method	—	---	---

Fig. 12 The z component of the magnetic flux density along y-axis; $(x, z) = (0, 1.1)$ mm

の右辺第3項のように変換することで、より効率的な静磁場解析法を開発した。これにより、静電場領域に関する積分項の積分範囲を静電場解析に用いる二次元境界要素法と同様の形式で表すことができた。したがって、静電場解析に用いた二次元境界要素法の境界要素と解析結果から磁場を直接計算できるため、計算量の面で改善された。また、本手法は静電場領域の上下面の電位に関する面積分を必要としないことから、従来法に比べて計算精度も向上することが期待される。

さらに、従来法と本手法の比較のため、一樣な電流が流れている直方体周辺の磁束密度を従来法と本手法を用いて計算した。従来法による計算結果と本手法による計算結果の比較により、計算精度と計算量の両面において、本手法が従来法よりも優れていることが示された。実際の工学問題における適用例として、薄平板型リチウムイオン電池内を流れる電流が誘起する磁束密度についても従来法と本手法を用いて計算した。これによって、従来法と本手法による計算精度と計算量の比較を行い、本手法の有効性を確認した。

付録. 積分核 $\hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\})$, $\hat{l}^*(\mathbf{p}, \{s', t\})$ の計算

まず、積分核

$$\hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) = \int_{\Omega_{\infty}} \phi^*(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}', t\}) \psi^*(\mathbf{q}', s') d\Omega'(\mathbf{q}') \quad (57)$$

は以下のようにして解析的に求められる。式(57)の両辺に $\nabla_s'^2$ を作用させると、積分核 $\hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\})$ に関する二次元ポアソン方程式

$$\nabla_s'^2 \hat{k}^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) = -\phi^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) \quad (58)$$

が得られる。ここで、計算平面上の二次元位置ベクトル $\mathbf{p}'$ を中心とする二次元極座標 (ρ, θ) を考えると、

$$\mathbf{s}' = \{\rho \cos \theta, \rho \sin \theta\} + \mathbf{p}' \quad (59)$$

$$\phi^*(\mathbf{p}, \{s', t\}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho^2 + (\zeta - t)^2}} \quad (60)$$

となり、 $\phi^*(\mathbf{p}, \{s', t\})$ は軸対称性を有するから、式(58)は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \hat{k}^*}{\partial \rho} \right) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\rho^2 + (\zeta - t)^2}} \quad (61)$$

となる。したがって、式 (61) を解くことで、次式が得られる。

$$\hat{k}^*(p, \{s', t\}) = \frac{1}{4\pi} \left(\log \left[R(p, s', t)^{\zeta-t} \right] - r(p, s', t) + \log \left[|p' - s'|^{C_1 - \zeta + t} \right] + C_2 \right) \quad (62)$$

式 (62) において、特解として積分定数を $C_1 = \zeta - t$, $C_2 = 0$ とすれば、式 (26) が得られる。

次に、積分核 $\hat{l}^*(p, \{s', t\})$ の解析解を得るには、次式のように微積分の順序を入れ替えると

$$\hat{l}^*(p, \{s', t\}) = \frac{\partial}{\partial n_S} \int_{\Omega'} \phi^*(p, \{q', t\}) \psi^*(q', s') d\Omega'(q') = \frac{\partial \hat{k}^*(p, \{s', t\})}{\partial n_S} = \nabla'_S \hat{k}^*(p, \{s', t\}) \cdot \mathbf{n}'_S(s') \quad (63)$$

となるから、式 (26) を上式 (63) に代入すればよい。

文 献

- (1) 小島史男, 岡本十蔵, 大野泰彦, “有限要素境界要素併用法を用いた電磁場逆解析による蒸気発生器細管材料のき裂形状推定に関する計算手法”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 63, No. 612 (1997), pp. 2650-2656.
- (2) Ridha, M., Amaya, K., and Aoki, S., “Boundary Element Simulation for Identification of Steel Corrosion in Concrete Using Magnetic Field Measurement”, *Corrosion*, Vol. 61, No. 8 (2005), pp. 784-791.
- (3) Nara, T., and Ando, S., “Direct Localization of Multiple Magnetic Dipoles for Surface Crack Detection”, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, Vol. 15, No. 4 (2007), pp. 403-418.
- (4) Cheyne, D., Bostan, A.C., Gaetz, W., and Pang, E.W., Event-Related Beamforming: A Robust Method for Presurgical Functional Mapping using MEG, *Clinical Neurophysiology*, Vol. 118, No. 8, (2007), pp. 1691-1704.
- (5) Agirre-Arrizubieta, Z., Huiskamp, G.J.M., Ferrier, C.H., Van Huffelen, A.C., and Leijten, F.S.S., “Interictal Magnetoencephalography and the Irritative Zone in the Electrocorticogram”, *Brain*, Vol. 132, No. 11 (2009), pp. 3060-3071.
- (6) 坪井始, 須江健一, 国末克己, “ソース電流を考慮した薄板導体の渦電流解析”, 電気学会論文誌 A, Vol. 110, No. 9 (1990), pp. 591-597.
- (7) 酒井譲, 山下彰彦, “有限要素法と境界要素法を併用した磁場解析”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 59, No. 557 (1993), pp. 211-218.
- (8) 浦郷正隆, 天谷賢治, 青木繁, “多層構造を持つ鋼板上における軸対称電磁場の効率的境界要素解析法”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 63, No. 610 (1997), pp. 1280-1286.
- (9) 本間利久, 五十嵐一, 川口秀樹, 数値電磁力学 (2002), 森北出版.
- (10) 日本機械学会編, 機械工学便覧, 基礎編 α6 計算力学 (2007), pp. 145-152. 日本機械学会.
- (11) Bruckner, F., Vogler, C., Feischl, M., Praetorius, D., Bergmair, B., Huber, T., Fuger, M., and Suess, D., “3D FEM-BEM-coupling Method to Solve Magnetostatic Maxwell Equations”, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 324, No. 10 (2012), pp. 1862-1866.
- (12) 岸本喜直, 田中裕也, 天谷賢治, “静電場領域の領域積分を必要としない静磁場解析法”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 73, No. 729 (2007), pp. 567-574.
- (13) Brebbia, C.A., Dominguez, J. 共著, 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行共訳, 詳解 境界要素法 (1993), pp. 51-80, オーム社.
- (14) 青木繁, 天谷賢治, 宮坂松甫, 境界要素法による腐食防食問題の解析 (1998), pp. 24-55, 裳華房.
- (15) 乾義尚, 渡瀬祐樹, 花本武史, 綾部泰, “円筒型リチウムイオン二次電池内温度・電流分布の簡易発熱モデルを用いた 2 次元解析”, 電気学会論文誌 B, Vol. 124, No. 8 (2004), pp. 1041-1048.
- (16) Wu, M.S., Chiang, P.C.J., and Lin, J.C., “Electrochemical Investigations on Advanced Lithium-Ion Batteries by Three-Electrode Measurements”, *Journal of The Electrochemical Society*, Vol. 152, No. 1 (2005), pp. A47-A52.
- (17) 堀江英明, リチウムイオン電池—基礎と応用(2010), 培風館.
- (18) 鷲島真一, “リチウムイオン電池の最近の動向”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 108, No. 402 (2009), pp. 19-24.
- (19) 竹野和彦, 山木純一, “携帯電話用リチウムイオン電池の熱暴走及び容量劣化評価法”, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol. J93-B, No. 9 (2010), pp. 1296-1302.