構造物の荷重経路解析における相補的指標 U^{} に関する FEM 計算の効率化***鈴木 謙介^{*1}, 櫻井 俊彰^{*2}, 井上 健吾^{*1}
中田 達也^{*1}, 榎 徹雄^{*2}, 高橋 邦弘^{*3}**Reduction of U^{**} Calculation Time for Complementary Load Transfer Analysis in Structures**Kensuke SUZUKI^{*1}, Toshiaki SAKURAI, Kengo INOUE,
Tatsuya NAKADA, Tetsuo MAKI and Kunihiro TAKAHASHI^{*1} Keio Univ., School of Integrated Design Engineering
3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa, 223-8522 Japan

The index U^* was introduced in the previous paper by the authors to show the load paths in a structure. The complementary index U^{**} to U^* has also been studied to ascertain the conditions of distributed loading. The main problem encountered in calculating U^* and U^{**} is the high computation time required—especially for the actual application of large scale FEM models. In this study, we propose two methods for reducing the time taken by FEM calculations to obtain the U^{**} distributions. In the first method, the essential term is extracted from the global form of the flexibility matrix for the calculation of an internal flexibility matrix in each node. Since the first method cannot be utilized for large-scale commercial FEM codes, a second method is introduced. In the second method, three independent inspection loadings are applied to each node of a structure. In this operation, the multi-displacement condition is converted into the multi-loading condition. After calculating the cab structure for a heavy-duty truck cab using the second method, we obtained the result that the reduction in time required for calculations was better than 90 percent.

Key Words : Structural Analysis, Finite Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Load Transfer, Load Path, U^* , U^{**}

1. 緒 言

構造物内部の荷重伝達の把握には応力やひずみの概念が広く用いられている⁽¹⁾。しかしながらそれが必ずしも万能という訳ではない。例えば、構造物中には応力集中が存在するから、円孔や切欠きの周囲に発生した高い応力をもって、その部分の伝達荷重が大きいと判断することは実際的でない。荷重を多く伝えようとすればその箇所に円孔を設けたほうが良いという奇妙な結論を導くことになる。著者らは荷重伝達 U^* 解析⁽²⁾を提案し、このような問題を回避した荷重伝達の表現方法を検討してきた。経路 U^* 解析はこれまでも産業界に应用されており⁽³⁾、構造検討および伝達経路の把握などに適用されてきている。また著者らは指標 U^* とは相補的な関係にある U^{**} についても検討を行い、分布荷重の存在する場合に有効であることを確認している⁽⁴⁾。

構造物における指標 U^* および U^{**} の分布を知るためには、構造内部の各点についてこれらを計算する必要がある。通常は有限要素法を用いてモデルの各節点に関して計算することが多いが、詳細なモデルにおいては百万回以上におよぶ繰り返し計算が必要となり、スーパーコンピュータを用いても実際に利用することは難しい。以前に著者らは U^* 算出に関して有限要素法による新たな U^* 計算法⁽⁵⁾を提案し、効率的な計算を可能にした。しかし U^{**} の場合にはこれと大幅に異なる議論が必要である。本論文では U^{**} の有限要素法による計算時間の短縮を図り、効率的な有限要素法計算手法を提案することを目的としている。

指標 U^{**} は負荷点と構造物内部の 1 点の結合を表す内部たわみ性を用いて表現することができる。これを利

* 原稿受付 2012 年 12 月 3 日

^{*1} 慶應義塾大学大学院 (〒223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1)^{*2} 正員, 東京都市大学 (〒158-0087 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)^{*3} 正員, 慶應義塾大学

E-mail: takahasy@mech.keio.ac.jp

用して、全体たわみ性行列を求める 1 回の計算により全節点の U^{**} を計算する 2 方法について検討を行う。

第 1 の計算法は、有限要素法における全体剛性行列の逆行列を求め、そこから成分を抜き出すことにより内部剛性の算出を行う方法である。また第 2 の計算法は、本来の負荷点には荷重を与えず、逆に内部の点に検査荷重を与えて、内部たわみ性を算出する手法である。

第 1 の手法は簡便ではあるが、全体の剛性行列の逆行列を求めずに計算する汎用解析ソルバ (Nastran 等) には適さない。これには第 2 の手法を適用することができる。また、Nastran において第 2 の手法を適用する際には、DMAP による追加プログラム⁽³⁾を用いることによりさらに計算時間の短縮が可能と考えられる。

2. 指標 U^* による表現⁽²⁾

2・1 指標 U^* の概念

これまでに報告した U^* の内容をまとめておきたい。図 1(a) は一般の弾性構造をモデル化して示している。負荷点を A、拘束点を B、また内部の任意の点を C とおいたときの 3 点の荷重と変位の関係は

$$\begin{Bmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} \\ K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \\ d_C \end{Bmatrix} \quad (1)$$

で表現できる。ここで添字は点 A、点 B あるいは点 C に関する量であることを示し、添字付きの p 、 d は荷重と変位を表すベクトルである。指標 U^* および U^{**} は 3 次元弾性論に基礎をおく 3 次元物体への適用を念頭においており、添え字付きの p 、 d はおのおの 3 個の要素を有している。このため薄板に関しては 3 方向の力は考慮しているが、面外曲げによるエネルギーは考慮していない。一般に薄板構造では板の面内の剛性を利用しており、面外荷重で力を受けることの無いように設計されることが多いから、実用上の問題が生ずることは少ない。添字付きの K は内部剛性テンソルである。すなわち式(1)の列ベクトルと行列は、その要素として 1 階のテンソルと 2 階のテンソルを有している。この式は一見、有限要素法の初等的表記のように見えるがそうではない。この式で 3 点に関する構造全体の挙動を表現していることに注意したい。また、有限要素法における縮退後の行列と内容的には類似しているが、式(1)は有限要素法とは無関係に成立する概念である。式(1)は、AC 間の剛性を最も一般的に

Fig. 1 Expression with three springs

表現するために導入された式であり、点 A, B および点 C を他の要素との節点とする意味は持たせていない。

点 C を拘束せずに変位 d_A を与えた際の外力 p_A による仕事を U とし、点 C を拘束した上で変位 d_A を与える際の外力 p'_A による仕事を U' とする。このとき、

$$U^* = 1 - \frac{U}{U'} \quad (2)$$

を点 C における指標 U^* として定義する。負荷点 A と任意点 C の結合が剛である程、点 C を拘束したときに同じ変位 d_A に必要な仕事 U' は大きくなるから、式 (2) の値は負荷点と任意点との結合の強さを表現している。

式 (1) と式 (2) を用いて

$$U^* = \left(1 - \frac{2U}{(\mathbf{K}_{AC} \mathbf{d}_C) \cdot \mathbf{d}_A} \right)^{-1}$$

を得る。または

$$U^* = \left(1 - \frac{2U}{\mathbf{K}_{AC} \cdot \mathbf{S}} \right)^{-1}, \quad \mathbf{S} \equiv (\mathbf{d}_A \otimes \mathbf{d}_C) \quad (3)$$

とも表すことができる。式 (3) から、 U^* は負荷点と任意点間の結合の強さである $\mathbf{K}_{AC}$ で表現されることが分かる。記号 $\mathbf{S}$ で示した量を経路変位テンソルと称している。ここで積の演算記号にはベクトルおよびテンソルの表記を用いた。記号 $\cdot$ はベクトルあるいはテンソルの内積であり、記号 $\otimes$ はベクトルのテンソル積を示している。

2・2 指標 U^* による荷重伝達経路の定義

式 (3) で定義された U^* 分布は、構造物の表面に等高線によって描くことができる。その稜線に相当する曲線は負荷点との結合の強い箇所を順次結んだ線に相当している。力は剛性の高い箇所を伝わっていくと考えることができるので、この稜線を荷重経路と定義することは合理的であろう。構造物の表面でなくても、一般の 3 次元構造物の内部でも同様に、 U^* の高い箇所から順次低下する経路を定めることができる。経路が複雑で、単純には定めにくい構造も時には存在するが、それは荷重伝達の考え方に鮮明さのない、余り望ましくない構造と考えることもできる。

図 2(a) は円孔付き平板の右端を拘束し、左端に引張荷重を加えた場合の実際の U^* 分布を示している。図 2(b) は指標 U^* を剛性の変化に関するポテンシャルと考えた場合の等ポテンシャル線を示している。ポテンシャルのこの配を剛性低下ベクトルと呼び、剛性低下ベクトルの減衰が最も遅い剛性線が、荷重伝達経路の厳密な定義である。

3. 指標 U^{**} による表現⁽⁴⁾

3・1 指標 U^{**} の定義

上記の U^* に加え、 U^{**} の内容について第 3 章で簡潔に述べておこう。前章に引き続き前置きが長くなるが、新たな概念であるため、本論文の主題に入る前に説明を要すると思われるからである。

再び図 1 に戻ると、指標 U^* は任意点 C を拘束した時としない時に、負荷点 A に同一の強制変位を与えるのに必要な仕事の比で表された。ところがもし負荷が広い範囲に分布している場合には、任意点 C にも負荷の存在する状況が生ずる。このとき、点 C は同時に点 A となり、点 C は移動を拘束しかつ強制変位を与える、という矛盾した操作が必要となる。

第 2 章で述べたように、指標 U^* は任意点 C を拘束しながら負荷点 A に常に同一の変位を与える。一方、指標 U^{**} は負荷点 A に同一の荷重を与える。そうすれば点 C を拘束していても荷重を与えることに差し障りはないから、 U^{**} を用いる限り何の困難も生じない。そのため U^{**} は分布荷重のある場合にも適用できることになる。

点 C を拘束しないときの点 A に与えた力による相補仕事を W とし、点 A の同一荷重の下に点 C を拘束したときの相補仕事を W' とする。その時の両者の比に基づく

$$U^{**} = 1 - \frac{W'}{W} \quad (4)$$

が点 C における指標 U^{**} の定義である。

指標 U^* は変位が変数となるので負荷の成す仕事によって定義された。一方、 U^{**} では荷重が変数となるので負荷の成す相補仕事によって定義される。ここでは線形弾性構造を扱っているので仕事と相補仕事の値は同一となるが、図 3 に示すように、点 C を拘束した場合を考えると、点 A に同一変位を与えた時と、同一荷重を与える時とでは、両者は一般には異なる値となる。そのため U^* と U^{**} の値も一般に異なっている。分布荷重が構造全体に加わっている場合などでは、 U^{**} は計算できるが U^* は計算できない。ただし分布荷重の無い場合には、図 5 および 6 に見るように、両者の値はそれほど大きくは相違しない。なお、第 2 章で述べたようなポテンシャル論の議論が U^{**} にもそのまま適用できるので、荷重の伝達経路に関しても U^* と同様な考察が可能である。

Fig. 2 Distribution of U^*

Fig. 3 Difference between U and W

3・2 指標 U^* と U^{**} の計算例

図 4, 5 および図 6 に U^* と U^{**} の計算結果に比較を示す。いずれもシェル要素あるいははり要素を用い、有限要素法の汎用コードである MSC Nastran により計算した。図 4 は周囲を単純支持した平板であり、面に垂直な等分布荷重を受けている。平板部の板厚および平板の縦横の寸法比は 1 : 600 : 900 とした。また縦横 2 本の井桁状の格子部も板要素でモデル化した。その板厚と板幅の比は、上記の平板部の板厚を 1 としたとき 10:10 とした。このような分布荷重の場合は、上に述べたように各節点が負荷点 A でもあり、また同時に任意点 C でもあるので、 U^* は計算できない。無理に定義通りに計算を行うと、図 4(b) に示すように U^* は全て 1 となる。これに対し U^{**} であれば、図 4(c) のように合理性のある結果が得られる。

一方、分布荷重の無い場合の U^* と U^{**} の比較を図 5 および図 6 に示した。図 5 は 2 次元の孔付き平板に関して、右辺の一部を固定し左辺の中央に引張りを加えた場合の比較である。図 6 は乗用車車体の客室を平板とはり要素でモデル化している。モデルの詳細は省略するが、図のように 3 点を支持し 1 点に上方向の負荷を与えた。図 5 および図 6 に示すように、分布荷重の無い場合には U^* と U^{**} の分布は比較的類似していると言える。ただし図 5 および図 6 の場合であっても U^* と U^{**} では若干異なる値を示すが、 U^* と U^{**} は定義が異なるので構造内部で数値が相違するのは当然である。

指標 U^{**} の方は分布荷重の有る場合と無い場合の両方について計算ができる。そのため、 U^{**} だけで十分と考えることもできる。しかし次章で述べるように相補仕事による定式化には一般的に馴染みが薄いこと、剛体回転を伴う負荷では U^{**} による計算が不可能なこと、また過去のデータには U^* による結果が多いこと、などから U^* の利用価値も高い。

以上、2 章と 3 章は既に発表した基礎的事項であるが、本研究の主題である以下の検討にとって重要なため、紙面をとって記述した。

Fig. 4 Distributed force (Flat plate model)

Fig. 5 Concentrated force (Flat plate model)

Fig. 6 Concentrated force (Automotive compartment model)

4. 指標 U^{**} の計算の効率化

4・1 定義に沿った U^{**} の計算方法

式(4)の U^{**} の定義は明瞭であるから、その定義のまま有限要素法によって計算することは容易である。すなわち、ある任意点 C の U^{**} を求めるには、点 C を拘束しない所与の境界条件による計算と、点 C を拘束するもう一つの境界条件について静解析を行うだけである。一定値である負荷 p_A の成した相補仕事をその結果から求めるに際して特別な困難はない。

節点番号が $1, 2, 3, \dots, A, B, C, \dots, n$ の場合の荷重と変位の関係は良く知られているように

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_A \\ p_B \\ p_C \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & & \cdots & & A_{1n} \\ & A_{21} & A_{22} & & & & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & A_{AA} & A_{AB} & A_{AC} & \\ & & & \vdots & A_{BA} & A_{BB} & A_{BC} \\ & & & & A_{CA} & A_{CB} & A_{CC} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_A \\ d_B \\ d_C \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (5)$$

で表現される。力のベクトル p および変位ベクトル d は、添え字の A, B, C によって、負荷点 A 、支持部 B 、あるいは任意点 C の量であることを示している。また添え字 A, B, C を除く $1, 2, 3, \dots, n$ は、それ以外の節点の番号を表している。節点 A, B, C を除く節点の数を n で示した。右辺に示した添え字付きの太字 A は、各々の節点間の要素剛性テンソルを表現しており、これを行列で表現したときには 3×3 の成分を有している。

ここでは支持部 B を 1 個の節点として示したが、複数の節点が同時に基礎に固定されている場合でも同一の議論が可能である⁽⁸⁾。式(5)では負荷点 A が 1 点であるとして記述しており、荷重ベクトル p_A と変位ベクトル d_A は 3 個の成分を有している。分布荷重のある場合には点 A の数が複数個あると考えることになる。この数を m としたとき、式(5)における p_A と d_A の成分の個数は $3m$ として記述されていることになる。式(5)右辺の添え字付きの A で示した各行列についても、それに対応した成分を含めて記述されていることになる。式(5)は分布荷重を受ける場合、すなわち点 A が複数個ある場合を適用範囲として包含している。ただし以降は p_A と変位ベクトル d_A は 3 個の成分を持つとして検討を行うが、それらの個数が $3m$ 個の場合も議論の内容は変わらない。

式(5)では負荷点 A と任意点 C は別の点であるとして表示している。もし負荷点 A と任意点 C が同一点である場合を含めて議論を一般化する必要があるが、本論文ではまずは簡単化のために、負荷点 A と任意点 C は別であるとして記述した。しかしこの両者が同一の場合であっても結論は変わらない。そのことについては式(16)に関して後述する。

式(5)は式(1)と同様、行列あるいは列ベクトルでまとめて示してはいるが、その成分である力あるいは変位のベクトルを 1 階のテンソルとして表し、また剛性テンソルまたはたわみ性テンソルを 2 階のテンソル量として示し、これらを太字の記号で表示している。第 2 章でも触れたが、本論文ではこれら太字で表現した成分同士の積の記号についてはテンソル演算の記法を用いている。

連立一次方程式を解く手法は多いが、大部分は定数項の計算を分離できるところに特徴がある。例えば係数行列の逆行列を一度求めておけば、定数項が異なる場合の計算は単なる行列と列ベクトルの計算だけである。また、汎用の有限要素法プログラムで用いられる解法で多用される LU 分解を用いる場合も、行列を一度だけ LU または LDU 分解しておけば、別の定数項に対する前進消去と後退代入の計算時間は短い。有限要素法の変位法において定数項は荷重であるから、式(8)において荷重ケースが多くても計算時間の増加は少ない。一方、荷重でなく強制変位のケースが多い場合には、個々に関して連立方程式を解き直すことになり計算時間が増大する。なお、応力法による有限要素法であれば、この外力と強制変位の関係が逆転するが、現存する大規模な汎用の有限要素法プログラムは殆どが変位法によっている。

式(4)に示した定義どおりに構造物内の U^{**} 分布を求める際には、次々に別の節点を任意点 C として選定し、この節点を交互に順次拘束しつつ点 A に同一荷重を与えて、その時の負荷点 A の変位を求める。荷重と変位が求ま

れば各点を拘束した際の相補仕事 W' は両者の内積の $1/2$ で与えられる。計算過程自体は極めて単純であり、この計算を全節点について繰り返して計算を行うことになる。しかし、ある節点を拘束するということはその位置に零の「強制変位」を与えることに等価であるから、この定義通りの計算方法では、節点の数だけ式(5)を解く計算を繰り返すことになる。一例をあげれば、現在の自動車車体では 100 万から 200 万の節点を有するモデルを扱うから、式(5)をその回数だけ解く必要があることになり、現在の標準的な計算機を用いた場合に計算時間が数十か月にもものぼる場合があり現実的でない。以下にこの難点を解決するいくつかの手法について検討を行う。その準備として次の 4.2 節において U^{**} の定義に関して後の使用のために式を少し変形しておきたい。

4・2 たわみ性テンソル C_{CC} による指標 U^{**} の表現

第 2 章の式(1)は 3 点 A, B および C に関する荷重、変位の関係であるが、良く知られているようにそのままでは右辺の行列の逆行列をとることはできない。剛体並進を許容するために行列が特異となるからである。固定端 B の変位 d_B が零であることから B に関する行と列を取り去り、その後に逆行列をとって、これを式(1)の両辺に乘ずれば、

$$\begin{Bmatrix} d_A \\ d_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{AA} & C_{AC} \\ C_{CA} & C_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_A \\ p_C \end{Bmatrix} \quad (6)$$

を得る。式(1)と同様に、式(6)は構造全体を 3 点で表現した上で、式(6)だけによって全体を表現していることに注意したい。そのためこの添え字付きの C を内部たわみ性テンソルと呼び、通常の要素たわみ性テンソルと区別している。「内部」の語を付したのは、このように通常の要素たわみ性テンソルとは異なる概念であるからである。内部剛性（あるいは相対剛性）の概念は著者らの一人が以前に導入した概念⁽⁹⁾である。同じ負荷点 A と任意点 C の間の剛性であっても、内部剛性（相対剛性）テンソルと通常の要素剛性テンソルは異なる量であることを、 U^* の計算方法の検討⁽⁵⁾において述べた。しかしここで導入した内部たわみ性テンソルの方は、後述するように、通常の要素たわみ性テンソルと個々に一致している。ここにも U^* と U^{**} の対比が単純に対称的な議論で終わらない一面がある。

図 1(a)の状態では $p_C = 0$ であるから、点 A における負荷 p_A がなした相補仕事 W は式(6)から

$$W = \frac{1}{2} d_A \cdot p_A = \frac{1}{2} (C_{AA} p_A) \cdot p_A \quad (7)$$

のみである。一方、図 1(b)では点 C を拘束して同じ負荷 p_A を与えるから点 C に拘束力 p'_C が生ずる。また図 1(b)のとき、負荷点 A の変位も図 1(a)の d_A より小さくなり d'_A となる。このときの相補仕事は式(6)から

$$W' = \frac{1}{2} d'_A \cdot p_A = \frac{1}{2} (C_{AA} p_A + C_{AC} p'_C) \cdot p_A \quad (8)$$

で表現される。結局 U^{**} は式(4), (7)および式(8)により

$$\begin{aligned} U^{**} &= 1 - \frac{W'}{W} \\ &= \frac{1}{2W} [(C_{AA} p_A) \cdot p_A - (C_{AA} p_A + C_{AC} p'_C) \cdot p_A] \\ &= -\frac{1}{2W} (C_{AC} p'_C) \cdot p_A \end{aligned} \quad (9)$$

で表されることになる。これを変形して

$$U^{**} = -\frac{1}{2W} (C_{AC} \cdot \bar{S}), \quad \bar{S} \equiv (p_A \otimes p'_C) \quad (10)$$

と記述することもできる。ここで記号 $\bar{S}$ で示した量を U^{**} に関する経路負荷テンソルと呼ぶ。負荷部 A と任意点 C の間の変形し易さを示すたわみ性テンソル C_{AC} によって U^{**} の値が決定されていることが式(9)から確認でき

る. この C_{AC} は構造を決めれば負荷に依存せず定まる値である. 一方, 経路負荷テンソル $\bar{S}$ は U^{**} の表現において負荷に依存する部分を示している.

式(9)の右辺の分子に含まれる p_A は, 定義により点 C の位置およびその拘束の有無には無関係に与えた同一荷重である. 同じく W も点 C を拘束しないときの相補エネルギーであるから, 最初に一度だけ求めておけば, 点 C ごとに計算をする必要はない. 従って式(9)によれば, ある点 C の U^{**} 分布を求めることは, 点 C ごとに変化する C_{AC} と p'_C を求めることに帰着すると言える. 前報⁽⁶⁾における U^* の効率的計算法においては, 式(9)に対応する式に基づいて議論を進めた. しかし U^{**} の場合には, 実は式(9)の中の C_{AC} を求めるよりも p'_C を算出する方が複雑な操作を必要とするので, 更に式(9)を別の形に置き換えることが有効である. この観点も U^* の場合とは異なっている.

式(6)によれば, 点 C の拘束の有無によらず一般に

$$d_C = C_{CA} p_A + C_{CC} p_C \quad (11)$$

である. この式において C_{CA} あるいは C_{CC} は構造を決めれば定まるが, 変位 d_C あるいは力 p_A や p_C は点 C の拘束の有無に依存して変化する. 点 C を拘束しない場合には, 変位 d_C あるいは力 p_A や p_C にはプライム記号 (') を付さずに用いることにし, 点 C を拘束した場合にはプライム記号を付けることにする. ただし p_A はどの場合にも同一とするので, 常にプライム記号を付さない.

点 C を拘束しない場合には点 C の拘束力 p_C は零であるから式(11)から

$$d_C = C_{CA} p_A \quad (12)$$

であり, また点 C を拘束した際には点 C の変位 d'_C を零とするから, 点 C における拘束反力 p'_C が生ずる. この値は式(11)および式(12)より

$$p'_C = -C_{CC}^{-1} (C_{CA} p_A) = -C_{CC}^{-1} d_C \quad (13)$$

である. 式(13)から式 (9)は

$$\begin{aligned} U^{**} &= -\frac{1}{2W} (C_{AC} p'_C) \cdot p_A \\ &= \frac{1}{2W} [C_{AC} (C_{CC}^{-1} d_C)] \cdot p_A \end{aligned} \quad (14)$$

と書ける. この最終行に一般的な関係 $(La) \cdot b = (L^T b) \cdot a$ を適用する. ここで L は一般的な 2 階のテンソル, a と b は一般的なベクトルであり, 上添え字の T は転置を示す. 式(14)最終行の括弧 () 内を a として書き換えると

$$U^{**} = \frac{1}{2W} [(C_{AC}^T p_A) \cdot (C_{CC}^{-1} d_C)] \quad (15)$$

となる. このとき $C_{CA} = C_{AC}^T$ であることを考慮し, また式(12)を用いれば, 上式は

$$\begin{aligned} U^{**} &= \frac{1}{2W} d_C \cdot (C_{CC}^{-1} d_C) \\ &= \frac{1}{2W} C_{CC}^{-1} \cdot (d_C \otimes d_C) \\ &= \frac{1}{2W} C_{CC}^{-1} \cdot \hat{S}, \quad \hat{S} \equiv (d_C \otimes d_C) \end{aligned} \quad (16)$$

と書くことができる. ここで 2 階のテンソルの内積 $C_{CC}^{-1} \cdot \hat{S}$ は, 総和規約を用いた指標表示で $(C_{CC}^{-1})_{ij} (\hat{S})^{ij}$ を意味しており, ベクトルのテンソル積 $d_C \otimes d_C$ は, $(d_C)^i (d_C)^j$ を示している.

式(16)において $\hat{S}$ は, 点 C を拘束しないときの点 C の変位 d_C により定まるから, 最初に各点について一度の計算で求めておくことができる. 同じく W も点 C を拘束しないときの相補エネルギーであるから, 最初に一度だけ求めておけば, 点 C ごとに計算する必要はない. また C_{CC} は行列で記述した時には 3×3 の小さな行列である

から、その逆行列 C_{cc}^{-1} を計算するためにはそれ程の時間を必要としない。従って式(16)によれば、ある点 C の U^{**} 分布を求めることは、点 C ごとに变化する C_{cc} を求めることに帰着したと言える。続く 2 節において、点 C ごとの C_{cc} を効率的に求める 2 種類の手法について述べる。

前述したように、以上は任意点 C に外力の存在しない場合、すなわち負荷点 A と任意点 C は別の点であるとして議論を進めた。しかしこの両者が同一点の場合であっても C_{cc} を求めることに帰着するという結論は変わらない。式(16)の d_c は、点 C を自由にしたときの点 C の変位であるが、これを点 C に初期の外力の存在する場合の値にとる必要が生ずるだけである。この理由の詳しい検討については別報に譲りたい。

4・3 全体剛性行列の逆行列から成分を抽出する方法（第一の方法）

式(5) は点 C の拘束の有無によらず成立しているが、ここで支持部 B は変位を拘束された端部であるから常に $d_B=0$ である。従って式(5)の d_B を零とおき、支持部 B に関する行と列の要素を除いても方程式としては成立している。すなわち

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_A \\ p_C \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & & & \vdots \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & \vdots & & A_{AA} & A_{AC} & \vdots \\ & \vdots & & A_{CA} & A_{CC} & \vdots \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_A \\ d_C \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

のように行と列を減ずることができる。この操作は支持部 B の運動を拘束して、剛体並進を拘束したことに相当しており、この操作により式(17)の行列は正則となり逆行列がとれる。同様に式(1)においても支持部 B に関する行と列の要素を除いても方程式としては成立して

$$\begin{Bmatrix} p_A \\ p_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AC} \\ K_{CA} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_C \end{Bmatrix} \quad (18)$$

と書くことができる。上の 2 式に関して、添え字付きの A は通常の変位剛性テンソルであり、同じく K は式(1)で新たに導入された内部剛性テンソルであって、両者の値は一般に異なっている。

$$A_{AA} \neq K_{AA}, A_{AC} \neq K_{AC}, A_{CA} \neq K_{CA}, A_{CC} \neq K_{CC} \quad (19)$$

さて、式(17)において右辺の行列の逆行列を両辺の左から乗ずれば

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_A \\ d_C \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & & & & \vdots \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & \vdots & & B_{AA} & B_{AC} & \vdots \\ & \vdots & & B_{CA} & B_{CC} & \vdots \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_A \\ p_C \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (20)$$

を得ることができる。ここで、添え字付きの B は通常の変位剛性テンソルである。

式(17)は点 C の拘束の有無に拘らず成立しているから点 A と点 C に加わる荷重 p_A と p_C は一般に零ではない。しかし点 A と点 C 以外の節点に加わる荷重 $p_1, p_2, \dots$ は全て零であることに着目すれば、式(20)の p_A と p_C に関する行と列の要素を除いても方程式としては成立していることになる。すなわち式(20)から次の式

$$\begin{Bmatrix} d_A \\ d_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{AA} & B_{AC} \\ B_{CA} & B_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_A \\ p_C \end{Bmatrix} \quad (21)$$

を抜き出すことができる．この式(21)と式(6)を見比べることによって，各要素が等しく

$$\mathbf{B}_{AA} = \mathbf{C}_{AA}, \mathbf{B}_{AC} = \mathbf{C}_{AC}, \mathbf{B}_{CA} = \mathbf{C}_{CA}, \mathbf{B}_{CC} = \mathbf{C}_{CC} \quad (22)$$

であることが分かる．すなわち求めるべき式(6)の内部たわみ性テンソル $\mathbf{C}_{CC}$ は，実は式(20)の要素たわみ性テンソル $\mathbf{B}_{CC}$ と同一である．式(22)で示した一致は，式(19)に示したように内部剛性テンソルと要素剛性テンソルには無かった関係であり， U^{**} の計算には極めて有利な特徴である．

実際の計算操作としては，式(17)の全体剛性行列を作成し，逆行列をとって式(20)を求め，そこから $\mathbf{C}_{CC}$ の値を抜き出すだけである．全体剛性行列あるいはその逆行列は 1 個の点 $\mathbf{C}$ だけに着目した表式ではなく，構造内部の全ての点 $\mathbf{C}$ に関する情報が含まれており，全ての任意点 $\mathbf{C}$ に応じた $\mathbf{C}_{CC}$ を抜き出すだけでその点の U^{**} を求めることができる．

しかしながら通常の汎用の有限要素法解析ソフトにおいては，連立方程式を解く際にわざわざ全体剛性行列の逆行列を求めることは少なく，この計算法は研究者が独自に作成した解析ソルバによる比較的小さなサイズの有限要素モデルの解析に適している．大型の汎用コードに組み込むためには次に述べる第二の手法が有効である．

4・4 検査荷重法による計算時間短縮（第二の方法）

検査荷重法は U^{*} の計算効率化⁽⁵⁾で導入した手法であり，点 $\mathbf{C}$ に人工的に検査荷重を与える方法である．ただし U^{**} の場合には，点 $\mathbf{A}$ の扱いに特徴がある．すなわち式(11)において点 $\mathbf{A}$ の負荷 $\mathbf{p}_A$ を零とした場合を想定し，その場合の $\mathbf{d}_C$ と $\mathbf{p}_C$ を $\mathbf{d}_C''$ と $\mathbf{p}_C''$ と書けば，

$$\mathbf{d}_C'' = \mathbf{C}_{CC} \mathbf{p}_C'' \quad (23)$$

なる関係があることに着目する．

点 $\mathbf{A}$ を自由とし外力を与えず，一方，点 $\mathbf{C}$ には $\mathbf{p}_C''$ として任意の検査荷重を 1 個だけ与え，式(17)を解いて点 $\mathbf{C}$ の変位 $\mathbf{d}_C''$ を求める．この一組の $\mathbf{p}_C''$ と $\mathbf{d}_C''$ を式(23)に代入することにより，3 方向成分に関する 3 個の式を得ることができる．同様に独立した 3 個の $\mathbf{p}_C''$ を与えれば，9 個の式が得られる．その結果 9 個の要素を持つ $\mathbf{C}_{CC}$ の全要素を求めることができる⁽⁵⁾．このようにして構造物の各点に 3 個ずつの検査荷重を与えることにより U^{**} を求める手法が，本論文における第二の方法（検査荷重法）である．

ここで $\mathbf{C}_{CC}$ は対称行列であるから，実際には求めるべき未知数は 9 個でなく 6 個である．そのため実際には 9 個の方程式の中から，6 個の未知数を求める方程式だけを選んで解くことが有利である．

検査荷重法によって複数の強制変位に関する境界条件を，複数の外力に関する境界条件に変換し得たことになる．変位法に基づく有限要素法において検査荷重法により U^{**} 分布の計算時間が短縮できるのはこの理由による．

なお，以上の 2 手法において，計算回数が大幅に減少するが，その影響は単に計算時間短縮の利点に留まらず，数値計算過程の複雑さに起因する U^{**} の計算誤差を小さくする効果があることも見過ごすことができない．

5. 計算効率化の実例による確認

5・1 解析モデル

前章で述べた効率的な U^{**} 計算法の有効性を確認するため，4・4 節に示した検査荷重法を用いて実際の構造に関して計算を行った．

前報⁽⁵⁾の U^{*} に関する計算効率化の確認で用いた大形トラック客室構造の有限要素モデルについて U^{**} 計算を行った．図 7 に有限要素モデルを示す．節点数は約 68000 であり，鋼材を想定したシェル要素およびビーム要素を用いた．客室に加わる下部フレームからの入力として，図の矢印で示す客室左下部に上向きの単位荷重を与えた．また車体両側側面の上部を固定している．計算には汎用有限要素法ソフト MSC Nastran を用いた．

5・2 計算時間の比較

新たな計算法の有用性の確認として，4・1 節で示した定義通りの計算法と，4・4 節の検査荷重法による計算時間との比較を行った．

Fig. 7 Finite element model (Truck cab)

全節点からある節点を抜き出して U^{**} を算出した時の、その節点数と計算時間の関係を図 8 に示した。定義通りの計算法に比べて大幅に計算時間が改善されている。算出点数が 200 点の場合、定義通りに求めた場合の計算時間に比べて検査荷重法では約 1/13 になっている。定義通りの計算法では式(5)を解く計算を U^{**} 算出点毎に繰り返し行う必要があるのに対し、検査荷重法ではこの計算が 1 回で済むのがその理由である。なお、定義通りの算出法では、100 点から 200 点の U^{**} 計算のときに U^{**} 算出点と計算時間に線形の関係からのずれが読み取れる。解析に使用した中間データのサイズが大きくなり、メモリから HDD へ書き込みが変更されたことによると考えられる。

図 8 の比較は同一モデルについて、また算出する節点数を同数として比較している。もし算出する節点数をモデル全体にとるとして、また計算モデルの規模を大きくしていった場合には、定義通りの計算では計算すべき点数も増大する。モデル規模を大きくするに従って更に 1 点の U^{**} を計算する時間もモデルに応じて増大するため指数関数的に計算時間が増大する。その結果、検査荷重法の計算効率の上昇はモデルが大きいほど顕著になると考えられる。

前報⁽⁹⁾に示した U^* に関する検査荷重法と、本報の U^{**} に関する検査荷重法の計算時間を比較し図 9 に示した。検査荷重法では U^* あるいは U^{**} を算出するために任意点に 3 方向の荷重を与える有限要素法計算を行うが、この解析時間が全計算時間のほとんどを占める。このため、検査荷重法による U^* あるいは U^{**} の計算に要する計算時間は両者ではほぼ同等となることが推測される。実際図 9 によれば、算出する節点数が 2000 の時、検査荷重法による U^{**} と U^* の計算時間の相違は約 4 パーセントにしか過ぎない。この相違は、 U^* と U^{**} の計算に必要な出力内容の違いに由来している。すなわち指標 U^* の計算では、任意点に検査荷重を与えたときのその点の変位と、拘束した負荷点の反力を算出するが、指標 U^{**} の計算では必要な値は任意点の変位のみであるため、出力の書き出し時間が少なく僅かではあるが計算時間が減少している。いずれにしても検査荷重法による U^* と U^{**} の計算時間の相違は小さい。両者共に計算点数の増加に伴い、ほぼ線形に計算時間が増加していることが図から読み取れる。

5・3 計算誤差の確認

検査荷重法による U^{**} の計算誤差について検討を行った。前節と同じ大形トラック客室構造の有限要素モデルに対し、定義通りの計算法と検査荷重法の両者による U^{**} 分布を算出した結果を図 10(a)および図 10(b)に示す。両者の相違は各節点の U^* に関して最大でも 0.04% 程度であり、両計算結果はほぼ同一であると言える。

なお、汎用解析ソルバを用いて点 C に 3 方向の検査荷重を加えたときの荷重および変位を求める際に、解析プロセスのうち共通化できるものを省略するようコードを変更することにより、上記の計算効率増加に加えてさらに 3-4 倍程度の高速計算が可能と考えられる⁽¹⁰⁾。

Fig. 8 Improvement of calculation time

Fig. 9 Calculation time of U^* and U^{**}

Fig.10 Distribution of U^{**} of truck model

6. 結 言

構造物における荷重伝達を表現するための U^{**} は U^* の相補的な概念であり、共に著者らが以前より検討を行ってきた指標である。しかしながら大規模なモデルに対する有限要素法を用いた U^* あるいは U^{**} の算出には膨大な時間を必要とするため、実用に際しては計算時間を短縮することが不可欠である。本研究では U^{**} に関して新たな2種類の効率的計算について理論的考察を行い、以下の結果を得た。

- (1) 構造物内部の任意点 (点 C) の U^{**} を求める操作を、点 C に関する 3×3 の内部たわみ性 C_{cc} を求めることに帰着させることができた。この C_{cc} を構造全体に関するたわみ性行列から抜き出すことによって、 U^{**} を求め得ることを示した。ただしこの手法は大規模汎用有限要素法プログラムに適用することはできない。
- (2) 大規模汎用有限要素法プログラムに適用するための手法として、負荷点には外力を与えず、一方、構造内部の各点には3方向に独立した検査荷重を付与した計算を行うことにより、1回の全体たわみ性行列の計算により各点の C_{cc} を算出する手法を開発した。
- (3) 上記検査荷重法を汎用の大規模有限要素法に適用し、大形トラックキャブ構造モデルについて計算した結果、従来の計算法に対して約13倍の計算速度を得た。モデルが大きくなるほど計算効率は上昇する。

謝 辞

ご協力を頂いた林紘樹氏ならびに大宮正毅博士に深甚なる謝意を表する次第である。

文 献

- (1) Kelly, D.W. and Tosh, M. W., "Interpreting Load Paths and Stress Trajectories in Elasticity", *Engineering Computations*, Vol. 17, No. 2 (2000), pp. 117-135.
- (2) 高橋邦弘, 櫻井俊彰, "構造物内部における荷重伝達経路の新たな表現方法", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 71, No. 708 (2005), pp. 1097-1102.
- (3) 日経 BP, "次世代構造解析「力の通り道」が設計を変える", 日経ものづくり, 2011-9 (2011), pp. 62-64.
- (4) 松永拓也, 中田達也, 花里将史, 井上健吾, 高橋邦弘, "分布荷重を受ける構造物における荷重経路解析", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 75, No. 753 (2009), pp. 559-565.
- (5) 櫻井俊彰, 川上博史, 阿部正俊, 高橋邦弘, "構造物の荷重経路 U^* 解析における FEM 計算の高速化", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 73, No. 733 (2007), pp. 975-980.
- (6) 上村真人, 八田良行, 伊東周太, 古賀義徳, 櫻井俊彰, 高橋邦弘, "荷重経路の概念による構造物の最適化", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 74, No. 737 (2008), pp. 6-12.
- (7) Wang, E., Nohara, T., Ishii, H., Hoshino, H. and Takahashi, K., "Load Path U^* Analysis of Truck Cab Structures under Frontal Collision", *Proceedings of the 15th Asia Pacific Automotive Engineering Conference (APAC-15)*, No. 2 (2009), pp. 105-110.
- (8) 櫻井俊彰, 多田雅彦, 石井英章, 野原哲男, 星野裕昭, 高橋邦弘, "構造物の荷重経路解析における複雑な支持条件の考慮", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 71, No. 712 (2005), pp. 1605-1611.
- (9) 高橋邦弘, "「相対剛性」による構造物の表現と Saint-Venant の原理", 日本機械学会論文集, Vol. 52, No. 484 (1986), pp. 2615-2621.
- (10) 真崎宏明, "構造物の荷重伝達経路の分析について", 配管技術, Vol.54, No.8 (2012), pp.22-26.