3 次元マイクロラティスで構成された梁の曲げ特性評価* (第 1 報 数値解析に基づく検討)

牛島 邦晴^{*1}, 秋吉 宗^{*2}, Dai-Heng CHEN^{*3}
中原 健志^{*1}, Wesley James CANTWELL^{*4}

Estimation of Bending Behaviour for Beams Composed of Three-Dimensional Micro-Lattice Cells (Part 1 Based on Numerical Analysis)

Kuniharu USHIJIMA^{*1}, Takashi AKIYOSHI, Dai-Heng CHEN,
Takeshi NAKAHARA and Wesley James CANTWELL

^{*1} Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Sangyo University
2-3-1, Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka, 813-8503, Japan

In this paper, the bending properties of micro-lattice beam (second moment of area and natural frequency) are presented. In particular, the effects of overall lengths of the beam and geometries of the unit-cell on these properties are investigated by using FE analysis. The second moment of area for the micro-lattice beam depends strongly on the geometries of the unit-cell (strand's length, diameter and angles among the adjacent strands), and its trend is not the same as the continuous solid beam. On the other hand, the observed vibration modes for the micro-lattice beam are similar to those for a solid beam, and their natural frequencies can be estimated precisely using the initial stiffness, the second moment of area obtained by structural analysis and the mass per unit length for the lattice beam, if the wavelength for each mode is ten times as long as the width of the unit-cell.

Key Words : Micro-Lattice Beam, Finite Element Method, Structural Analysis, Modal Analysis, Natural Frequency

1. 緒 言

ハニカムやフォーム, ラティスに代表される周期セル構造体は, 構造内部の幾何形状を自由に变化させることで, 様々な機械的特性(高剛性, 高強度)を持たせることができる. そのため, 機械設計における多様なニーズに応え得る先端複合材料として, 大いに注目されている⁽¹⁾. 特に, 近年はユニットセルの一辺の長さが数 mm の微細なセル構造体が作られるようになり, その強度評価に関する基礎的な研究がこれまで数多く報告されている^{(2)~(6)}.

著者らの一人は SLM (Selective Laser Melting) と呼ばれるラピッドプロトタイプング技術を用い, 直径 15 ~ 30 μm の金属粉末にレーザー光を照射して金属を凝着させることで, 直径 200 μm , 長さ 1.5 ~ 4mm 程度の細長い梁を図 1(a) に示すような 3 次元状につなが合わせたラティス(以下ではマイクロラティスと呼ぶ)を容易に作製する手法を開発した⁽⁷⁾⁽⁸⁾. また著者らはその構造に単軸圧縮荷重やせん断荷重を与えて得られる基本的な機械的特性(縦弾性係数 E^* , せん断弾性係数 G^* および塑性崩壊強度)について, 理論モデルを構築してその評価法を提案してきた^{(9)~(14)}. このマイクロラティスは CAD データを基に作製するため, 梁の長さや梁同士がなす角度を自由に設定することができ, 例えば図 1(b) に示すようにセルを不均一に組み合わせることもできる. そのため, 目的に合った構造の形を自由に設計することが可能となり, 今後このマイクロラティスを使った構造を断熱材, 吸音

* 原稿受付 2013 年 2 月 8 日

^{*1} 正員, 九州産業大学工学部機械工学科 (〒813-8503 福岡県福岡市東区松香台 2-3-1)

^{*2} 九州産業大学工学部機械工学科

^{*3} 正員, フェロー, 東京理科大学工学部機械工学科 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)

^{*4} Department of Aerospace Engineering, Khalifa University of Science, Technology and Research
(Abu Dhabi, P.O. Box 127788 UAE)

E-mail: kuniharu@jp.kyusan-u.ac.jp

材, 梱包材, 構造部材といった様々な方面へ応用することが期待される.

一方, 周期セル構造体を用いた梁や板といった有限な寸法を持つ実構造の機械的特性に関する研究も, これまで幾つか報告されている^{(15)~(18)}. 例えば Tekoğlu らは任意の2次元セル形状を持つフォーム材の特性 (一軸圧縮, せん断, インデンテーション, 曲げ変形下での機械的特性) に及ぼすセルの大きさやフォーム材全体の寸法の影響について, 実験ならびに数値解析を用いて検討している⁽¹⁶⁾. また, Deshpande らは, 四面体コア (tetrahedral core) を持つサンドイッチパネルが3点曲げ荷重を受ける時の様々な崩壊挙動について, 理論解析ならびに実験における強度評価を行っている⁽¹⁷⁾. さらに, Lou らは四面体コアを持つサンドイッチ梁が単純支持の状態における, 曲げ振動の固有振動数を理論的に求め, 有限要素法における解析解との比較・検討を行っている⁽¹⁸⁾. 図1(a)(b)に示したマイクロラティスを実用化するためには, これまで求めてきた周期セル構造体としての特性だけでなく, 梁や板といった有限な寸法を持つ構造での特性 (例えば曲げ剛性やねじり剛性など) の評価も必要不可欠といえる.

そこで本研究では, 図1(a)に示す均一なユニットセルで構成されたマイクロラティスをコアに持つ梁 (以下ではマイクロラティス梁と呼ぶ) の曲げ剛性, ならびに固有振動数を有限要素法により求め, それら特性に及ぼす構造内部の幾何形状の影響を系統的に検討する. 特に, マイクロラティス梁の特性 (断面二次モーメント, 固有振動数) と通常の連続体での特性とを比較し, 連続体として評価可能なマイクロラティス梁の幾何形状を明らかにする. マイクロラティス梁を実際の構造部材として利用する際, 上下に面板を有するサンドイッチパネルとして使用されることも予想されるが, 面板の影響については別報で報告する.

Fig. 1 Photographs of micro-lattice blocks composed of uniform and non-uniform cells

2. 解 析 方 法

本研究では, 汎用 FEM ソフトウェア MSC.Marc/Mentat 2010 を用いた弾性応力解析およびモーダル解析を行う. 図2(a)~(c)に本解析モデルの概要を示す. ユニットセルは8本の長さの等しい円柱棒 (直径 d , 全長 L) で構成されている. 本研究では梁の長手方向を x 軸とし, 図中の L_x, L_y, L_z はそれぞれ x, y, z 方向のユニットセルの大きさを, N_x, N_y, N_z はそれら3方向におけるセルの個数を示す.

次にユニットセルの幾何形状を表すパラメータの関係について説明する. 本研究では図3(a)(b)(c)に示す6種類の角度 $\theta_x, \theta_y, \theta_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ を用いる. それぞれの角度は図中の記号 A~H を用いて以下のように定義する.

$$\begin{cases} \theta_x = \angle HAD = \angle GBC, \theta_y = \angle CAB = \angle GEF, \theta_z = \angle EAF = \angle HDG, \\ \gamma_x = \angle OAB = \angle OBA, \gamma_y = \angle OAE = \angle OEA, \gamma_z = \angle OAD = \angle ODA. \end{cases} \quad (1)$$

セル内部の幾何学的関係より, それぞれの角度の間には以下の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} \cos^2 \gamma_x + \cos^2 \gamma_y + \cos^2 \gamma_z = 1 \\ \tan \theta_x \tan \theta_y \tan \theta_z = 1 \\ \tan \theta_x = \frac{\cos \gamma_y}{\cos \gamma_z}, \tan \theta_y = \frac{\cos \gamma_z}{\cos \gamma_x}, \tan \theta_z = \frac{\cos \gamma_x}{\cos \gamma_y} \end{cases} \quad (2)$$

一方, 図2(b)中に示すユニットセルの長さ L_x, L_y, L_z は, 構成する棒の長さ L および角度 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ を用いて以

下の式で表される．

$$L_x = 2L \cos \gamma_x, L_y = 2L \cos \gamma_y, L_z = 2L \cos \gamma_z. \quad (3)$$

表1には本解析で用いる9種類のユニットセルの幾何寸法を示す．以下では各セルを区別するため，表内に示すようにモデルa~iと呼び区別する．また，特に断らない限り，本研究ではセルを構成する棒の長さ $L=3.05\text{mm}$ ，直径 $d=0.2\text{mm}$ と固定して解析・検討を行う．

Fig. 2 Schematics of geometries of micro-lattice structure and unit cell, and boundary condition for FE analysis

Fig. 3 Definition of angles $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ and $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ in a unit cell

Table 1 Values of geometrical parameters for nine types of micro-lattice models

model	$L_x(\text{mm})$	$L_y(\text{mm})$	$L_z(\text{mm})$	$\gamma_x(^{\circ})$	$\gamma_y(^{\circ})$	$\gamma_z(^{\circ})$	$\theta_x(^{\circ})$	$\theta_y(^{\circ})$	$\theta_z(^{\circ})$
a	1.96	4.67	3.39	71.3	40.0	56.2	54.0	60.0	22.8
b	2.77	4.67	2.77	63.0	40.0	63.0	59.3	45.0	30.7
c	3.39	4.67	1.96	56.2	40.0	71.3	67.2	30.0	36.0
d	2.48	3.52	4.31	65.9	54.7	45.0	39.2	60.0	35.2
e	3.52	3.52	3.52	54.7	54.7	54.7	45.0	45.0	45.0
f	4.31	3.52	2.48	45.0	54.7	65.9	54.8	30.0	50.8
g	2.86	2.08	4.96	62.0	70.0	35.5	22.8	60.0	53.9
h	4.05	2.08	4.05	48.4	70.0	48.4	27.2	45.0	62.8
i	4.96	2.08	2.86	35.5	70.0	62.0	36.1	30.0	67.2

FEMによる本解析で用いた要素分割と材料特性について述べる．本解析では2節点のTimoshenko梁要素(要素番号98)⁽¹⁹⁾を用い、ユニットセルを構成する各棒を10分割してモデル化した．また、解析対象は等方・均質な弾性材料とし、物性値は実際に作製に用いるステンレス鋼(SUS316)を想定し、著者らの一人が行った先の試験結果⁽⁸⁾より縦弾性係数 $E_s=140\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu_s=0.3$ 、密度 $\rho_s=7.98\times 10^{-3}\text{g/mm}^3$ とした．

次に本FEM解析で用いた境界条件について説明する．図2(c)に示すように、マイクロラティス梁の左端を完全固定した片持ち梁とし、右側の自由端近傍に変位ならびに回転角を入力して変形を制御する．その際、梁が一樣なせん断力 F_y または曲げモーメント M を受ける状態となるよう、また、構成するセル内で局所的な変形が生じないように注意を要する．図2(c)には y 方向に3層($N_y=3$)持つ梁の概略図を示しているが、上述の状態を満足させるため、図中の点Iに表2に示すような変位($U_{x,end}$, $U_{y,end}$)ならびに回転角 $\phi_{z,end}$ を入力した．

Table 2 Applied boundary conditions near the free end

	under shear force F_y	under bending moment M
$U_{x,end}$	arbitrary	$L_I \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - 1 \right)$
$U_{y,end}$	$U(\text{input})$	$\frac{L_I}{\theta} (1 - \cos \theta)$
$\phi_{z,end}$	arbitrary	$\theta(\text{input})$

緒言でも述べたように、本研究では均一なユニットセルで構成されたマイクロラティスをコアに持つ梁の曲げ剛性 E^*I^* 、ならびに固有振動数について検討する．ここで、 E^* はこのマイクロラティス梁の縦弾性係数を表し、著者らによる先の研究により以下の理論解で求められる⁽¹⁴⁾．

$$E^* = \frac{3\pi E_s}{16} \cdot \left(\frac{d}{L} \right)^4 \cdot \frac{\cos \gamma_x}{\sin^2 \gamma_x \cos \gamma_y \cos \gamma_z} \quad (4)$$

一方、このマイクロラティス梁の断面二次モーメント I^* を理論的に求めるためには、ユニットセルの変形挙動を詳細に調べる必要がある．本研究では I^* を理論的に求める代わりに、FEM解析で得られた梁に作用するせん断力 F_y や曲げモーメント M を用いて計算する．すなわち、マイクロラティス梁を均質体とみなし、例えば一樣なせん断力 F_y の下では入力した変位 $U_{y,end}$ を用いて以下の式

$$I^* = \frac{F_y L_I^3}{3E^* U_{y,end}} \quad (5)$$

を用いて I^* を求める． I^* の理論的検討は次報で述べる．

図4はユニットモデルeを用いた十分長いマイクロラティス梁($N_x=144$, $N_y=3$, $N_z=1$)に一樣なせん断力 F_y のみや曲げモーメント M のみが作用する場合、さらには曲げモーメント $M(=F_y N_x L_x/2)$ とせん断力 F_y を同時に受けてS字型に変形するよう、変位や回転角を適当に与えたときの、梁の中立軸上の節点変位 U_y を自由端の変位 $U_{y,end}$ で無次元化して表したたわみ形状を示す．図中にはFEM解を各印(●, ○, △)で表し、各線(実線, 破線, 点線)は材料力学に基づく理論解を示す．ただし、理論解もまた端部の変位で正規化しているため、梁の曲げ剛性 E^*I^* の値は必要ない．この結果からわかるように、いずれの境界条件下においても、梁全体にわたって連続体と同様なたわみ形状が得られている．また、いずれの条件下で得られた断面二次モーメント I^* の値に差はほとんど見られなかった．

以下ではこのマイクロラティス梁の断面二次モーメント I^* や曲げ振動の固有振動数 f に及ぼす、構造の幾何形状の影響について検討する。

Fig. 4 Comparisons of deformed shapes for continuous beam and micro-lattice beam under three boundary conditions

3. 解析結果および検討

3-1 断面二次モーメント I^* への影響について

次節では表1に示したユニットセルのうち、立方体 ($L_x=L_y=L_z$) であるモデルeを用いて検討し、ユニットセルの形状の違いによる影響は続く3-1-2節で検討する。

3-1-1 各方向のセル数 N_x , N_y , N_z の影響

図5(a)は、 y と z 方向のセル数 $N_y=N_z=1$ と固定し、梁の長手方向(x 方向)のセル数 N_x のみを増やした時の、断面二次モーメント I^* の変化を示す。この図からわかるように、セル数 N_x の増加とともに I^* の値は緩やかに減少する。ここで、 N_x が十分大きい ($N_x=288$) 場合の I^* に対する相対誤差を求め、その値が5%以内に収まった時を安定と考えると、 N_x の値が12以上でその範囲に収束した。従ってこのことから、モデルeのユニットセル形状を持つマイクロラティスで構成された梁構造において、厚さ方向(y 方向)や奥行き方向(z 方向)に比べおよそ10倍程度以上の長さを持たせることで、長さ方向の影響を無視できる直線梁と同様な挙動を示す、といえる。

図5(b)(c)はユニットモデルeを用いた梁において、 x 方向のセル数を $N_x=144$ と固定し、 y , z 方向のセル数を変化させた時の断面二次モーメント I^* の変化を示す。ここで、図中の I_1^* は $N_y=N_z=1$ での I^* の値を示す(以下同様)。材料と断面が均一な連続体において、断面二次モーメントはその定義からも明らかなように、厚さ方向(y 方向)の長さの3乗、奥行き方向(z 方向)の長さに比例する。一方、マイクロラティス梁ではその傾向が少し異なる。図5(b)(c)には比較のため、連続体での挙動を実線で示す。図5(b)(c)からわかるように、 y 方向にセルを増やした場合、連続体に比べ断面二次モーメント I^* は小さめ、 z 方向にセルを増やした場合はやや大きめに増加する傾向を示す。また、これらの傾向はセルの形状のみに依存した結果が得られた。セルの形状による影響は次節で検討する。

3-1-2 セルの幾何形状(直径 d , 長さ l および角度 θ_x , θ_y , θ_z) の影響

表3は、ユニットセルを構成する棒の長さ L ならびに直径 d を幾つか変えた時の、 $N_x=144$, $N_y=N_z=1$ での断面二次モーメント I_1^* の値を示したものである。この結果からわかるように、得られる断面二次モーメント I_1^* は棒の長さ L の4乗に比例するが、また、直径 d にはほとんど依存していない、といえる。この傾向は均質な連続体における断面二次モーメントの特徴(y 方向の長さの3乗に、 z 方向の長さに比例する)からも容易に想像できる。一

Fig. 5 Effects of numbers N_x , N_y and N_z on the second moment of area I^* for micro-lattice beam

方，式(4)からわかるように，このマイクロラティス梁の縦弾性係数 E^* は，曲げ支配型の構造であるため棒の直径 d の4乗に比例し， L の4乗に反比例する．従って曲げ剛性 $E^* I^*$ として整理した場合，剛性は直径 d の4乗に比例するが，長さ L に無関係である，といえる．

Table 3 Effects of strand's diameter d and length L on second moment of area I^*_I

value of I^* (unit mm^4)	$d=0.1\text{mm}$	0.2mm	0.3mm	0.4mm
$L=3.05\text{mm}$	1.56×10^1	1.55×10^1	1.54×10^1	1.52×10^1
$L=6.10\text{mm}$	2.50×10^2	2.49×10^2	2.49×10^2	2.48×10^2
$L=9.14\text{mm}$	1.27×10^3	1.27×10^3	1.27×10^3	1.26×10^3

次にセル内部の角度 θ_x , θ_y , θ_z の影響について説明する．ここでは表1に示した9種類のユニットモデルに対して検討する．ただし，梁の長手方向である x 方向のセル数 $N_x=144$ と固定する．まず z 方向のセル数 $N_z=1$ と固定し， y 方向のセル数 N_y の値のみを3種類変えた時の I^* の値を表4に示す．また，表中にはマイクロラティス梁

を均質な連続体とみなし、以下の式

$$I^* = \frac{(N_y L_y)^3 \cdot N_z L_z}{12} \quad (6)$$

で求めた結果と、式(5)との相対誤差も示している。表4からわかるように、このマイクロラティス梁の断面二次モーメント I^* は、 y 方向のセル数が増加するにつれて均質な連続体とみなした解(式(6))に近づくが、 y 方向に短いセルを持つモデル g, h, i では他のモデルに比べ誤差が大きく、均質体と同様な特徴を有しているとは言い難い。

Table 4 Comparison of second moment of area I^* (unit mm⁴) by changing the number of cells N_y ($N_x=144, N_z=1$)

model	value of I^* for $N_y=1$			value of I^* for $N_y=2$			value of I^* for $N_y=3$		
	Eq.(5)	Eq.(6)	error[%]	Eq.(5)	Eq.(6)	error[%]	Eq.(5)	Eq.(6)	error[%]
a	3.18×10^1	2.88×10^1	9.51	2.41×10^2	2.30×10^2	4.48	8.04×10^2	7.77×10^2	3.34
b	2.52×10^1	2.35×10^1	6.57	1.95×10^2	1.88×10^2	3.63	6.54×10^2	6.35×10^2	2.99
c	1.72×10^1	1.66×10^1	3.34	1.37×10^2	1.33×10^2	2.74	4.62×10^2	4.49×10^2	2.73
d	2.04×10^1	1.57×10^1	23.3	1.38×10^2	1.25×10^2	9.00	4.47×10^2	4.23×10^2	5.39
e	1.55×10^1	1.28×10^1	17.4	1.10×10^2	1.02×10^2	7.23	3.62×10^2	3.45×10^2	4.61
f	9.99	9.01	9.77	7.58×10^1	7.21×10^1	4.81	2.52×10^2	2.43×10^2	3.53
g	8.06	3.72	53.8	3.97×10^1	2.98×10^1	25.0	1.17×10^2	1.00×10^2	14.1
h	5.60	3.08	45.0	3.11×10^1	2.46×10^1	20.8	9.43×10^1	8.32×10^1	11.8
i	3.08	2.14	30.3	2.00×10^1	1.72×10^1	14.3	6.32×10^1	5.79×10^1	8.33

次に断面二次モーメント $I^*(=I_1^*)$ の結果を、 y と z 方向のセル数を 2 個、3 個と変化させた時の断面二次モーメント I^* を $N_y=N_z=1$ での $I^*(=I_1^*)$ で除した値 I^*/I_1^* を表 5 に示す。さらに、図 6(a)(b) は 5 種類のユニットモデル (モデル b, d, e, f, h) に対し、先の図 5(b)(c) での整理と同様に x 方向のセル数を $N_x=144$ と固定し、 y と z 方向のセル数を変化させた時の、断面二次モーメントの比 I^*/I_1^* の結果を示す。これらの結果からわかるように、梁の厚さ方向 (y 方向) や奥行き方向 (z 方向) のセル数の影響は、ユニットモデルの形状に依存している。具体的には、 y 方向のセル数 N_y を増やした場合に注目すると (図 6(a) 参照)、モデル b と e と h の結果を比べると明らかに y 方向に短く z 方向に長いモデル h が、他の 2 モデルに比べ I^* の増加の割合が小さい。また、モデル d と e と f の結果を比較しても同様に、セルの z 方向の幅 L_z が長くなるほど I^* の増加の割合が小さくなることが分かる。一方、 z 方向のセル数 N_z を増やした場合、 y 方向に増やした場合とは対照的に、 y 方向に短く z 方向に長いモデル h が I^* の増加の割合が大きく、連続体の解から大きく離れている。前節でも述べたように、連続体であれば断面二次モーメントは梁の高さの 3 乗、奥行きの長さ に比例する。この 9 種類のマイクロラティス梁では角度 γ_y が小さく、また角度 θ_y が小さいほど (すなわち検討しているモデルの中ではモデル c が)、連続体の特性に近い傾向を示す。それとは対照的に、角度 γ_y が大きく、また角度 θ_y が大きいほど (すなわち検討しているモデルの中ではモデル g が)、連続体の特性から最も離れた傾向を示した。そこでモデル c とモデル g を用いた梁における中立軸上のたわみ形状を求め、その結果を図 7(a)(b) に示す。ここで、縦軸の値は左端からの距離 x における y 方向のたわみ U_y を右端部のたわみ $U_{y,max}$ で、横軸は左端からの距離を梁全体の長さ ($=N_x L_x$) でそれぞれ無次元化している。また、図中では x 方向のセル数 $N_x=144$ と固定し、 y と z 方向のセル数 (N_y, N_z)=(1, 1) と (1, 3) での結果をそれぞれ 印と○印で区別し、初等梁理論で求められるたわみ分布を実線で示している。これらの図からわかるように、モデル c を用いた梁ではセル数の違いに関わらず、得られたたわみ分布は初等梁理論の結果とよく一致している。一方モデル g を用いた梁では、特に固定端部近傍において、梁理論で求めた結果よりも小さいたわみ分布を示し、その差は z 方向のセル数 N_z が増加するにつれ大きくなっている。すなわち、モデル g では固定端部近傍でせん断力の影響を受けた部分が広範囲にみられる。そこで、このせん断力の影響を受けた領域を定量的に調べるため、得られたたわみ分布に対し、梁理論で得られる結果との相対誤差をとり、その結果を図 8(a)(b) に示す。図 8(a) は z 方向のセル数 N_z 、図 8(b) は y 方向のセル数 N_y の違いによる影響を示す。これらの結果からわかるように、まず z 方向のセル数 N_z の影響について、図 8(a) よりモデル c では N_z の大きさに関わらず、梁理論との相対誤差が 5% 以上を示す領域は梁全体の長さの 2% 程度以内に収まっているのに対し、モデル g では N_z が

大きいほどその領域が広がっている．そのため，モデル g では断面二次モーメントの増加が大きな結果を示したと考えられる．一方，図 8(b) からわかるように， y 方向のセル数 N_y が増加すると当然ながらせん断力の影響を受ける領域は増加するが，モデル g ではモデル c の結果に比べてその程度は小さい．そのためモデル g ではモデル c に比べ， N_y の増加に対する断面二次モーメントの上昇が連続体の場合よりも小さい結果を示した，と考えられる．なお，図 7 と 8 では固定端近傍のたわみのみを示して説明したが，梁全体でのたわみを比較しても連続体との差は固定端近傍での差に比べ十分小さく，自由端まで評価の範囲としても結論は変わらなかった．

Table 5 Comparison of second moment of area I^* and I_1^* for nine lattice models having some combinations of N_x , N_y and N_z

model	second moment of area I_1^* [mm ⁴]	ratio I^*/I_1^*		ratio I^*/I_1^*	
		$(N_y, N_z)=(2,1)$	$(N_y, N_z)=(3,1)$	$(N_y, N_z)=(1,2)$	$(N_y, N_z)=(1,3)$
a	31.8	7.58	25.3	2.01	3.02
b	25.2	7.76	26.0	2.01	3.03
c	17.2	7.95	26.9	2.01	3.02
d	20.4	6.76	21.9	2.03	3.09
e	15.5	7.12	23.4	2.05	3.14
f	9.98	7.58	25.3	2.05	3.12
g	8.06	4.93	14.5	2.09	3.24
h	5.60	5.56	16.8	2.18	3.45
i	3.08	6.51	20.5	2.14	3.55

Fig. 6 Variations of second moment of area I^* for five types of lattice models with numbers of cells N_y and N_z

3.2 固有振動数 f について

本節ではモード解析で得られた，マイクロラティス梁（片持ち梁）の曲げ振動の固有振動数について検討する．図 9 は，ユニットモデル e で各方向のセル数 $N_x=144$ ， $N_y=N_z=2$ のマイクロラティス梁における 1 次，2 次および 3 次の曲げ振動の固有モード形（中心軸上の節点のたわみ分布）と，各モードに対応する固有振動数 f_i ($i=1, 2, 3$) の値を示す．この結果から明らかなように，このマイクロラティス梁も連続体での細長い梁と同様，固定端を除く節の数が 0 個，1 個，2 個の固有モードが得られた．表 6 にユニットモデル e で y と z 方向のセル数を変えて求めた 1 次から 3 次までの固有振動数 f_i ($i=1, 2, 3$) を示す．連続体の場合，多くの振動学の教科書⁽²⁰⁾にも記載されているように，片持ち梁（長さ l ，縦弾性係数 E および断面二次モーメント I ）における自由振動の固有振動数 f_i

Fig. 7 Comparisons of deformed shape for micro-lattice beam with different number N_z

Fig. 8 Distributions of relative error of deflection between continuous model and micro-lattice beams

は、以下の式で厳密に求められる。

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{M}} \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (7)$$

ここで、式中の M は梁の単位長さ当たりの質量を示し、 λ_i は以下の式を満足するパラメータである。

$$\cos \lambda_i \cosh \lambda_i = -1 \quad (8)$$

また、連続体の片持ち梁における固有振動モード形 w_i は、正規化された形として以下の式

$$\begin{cases} w_i(x) = \cosh \frac{\lambda_i x}{l} - \cos \frac{\lambda_i x}{l} - K \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{l} - \sin \frac{\lambda_i x}{l} \right) \\ K = \frac{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i} \end{cases} \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (9)$$

で厳密に求めることができ、低次（1次～3次）のモード形状を図9中の実線で示す（ただし、式中の $l=N_x L_x$ ）。図9からわかるように、FEM解と式(9)による理論解は良く一致し、モード形状もまた連続体と同様であるといえる。

そこで、前節で求めたマイクロラティス梁の断面二次モーメント I^* と、式 (4) で得られる縦弾性係数 E^* , ならびに以下の式で求められる梁の単位長さ当たりの質量 M^*

$$M^* = \frac{\rho \pi d^2 N_y N_z}{\cos \gamma_x} \quad (10)$$

を式 (7) に代入し ($E \rightarrow E^*, I \rightarrow I^*, M \rightarrow M^*$) , 得られた結果を表 6 内の括弧内に示す。これらの結果から分かるように、マイクロラティス梁の固有振動数は、連続体における理論解 (式 (7)) とよく一致する。また、得られた固有振動数は連続体と同様、 z 方向の長さ、すなわち z 方向のセル数 N_z の違いにほぼ無関係であり、 y 方向の長さ、すなわち y 方向のセル数 N_y が大きくなるほど増加する傾向を示す。

Fig. 9 Three types of vibration mode shapes and their natural frequencies for a micro-lattice beam

図 10 は、ユニットセルの形状を変えて求めた 1 次の固有振動数 f_1 の結果を示す。この結果より、ユニットセルの形状毎に比較すると、 y 方向のセル長さ L_y が大きいほど、また角度 θ_y が大きいほど固有振動数 f_1 は大きくなり、いずれも式 (7) を用いた解と一致する。

次にマイクロラティス梁の固有振動数に対し、連続体での固有振動数の理論解 (式 (7)) の有効性を定量的に調べるため、モデル e のセルを用いて長手方向 (x 方向) のセル数 N_x を変えた梁で 1 次から 9 次までの固有振動数を求め、同時に式 (7) で求めた結果との相対誤差を取り、その結果を図 11 に示す。この結果から分かるように、連続体の理論解との固有振動数の相対誤差は高次モードになるほど大きくなり、また軸方向のセル数が少なくなるほど誤差は大きくなる。例えば $N_x=12$ の梁を考えた場合、3 次以降の高次モードでは式 (7) の結果と 5% 以上の誤差が生じている。3 次のモードでの波長を Λ とすると、 $\Lambda=10.42L_x$ となる。すなわち、マイクロラティス梁の固有振動数を連続体での理論解 (式 (7)) でどこまで近似できるかを考えた場合、梁に生じる振動モードの波長 Λ がセル 1 個の幅 L_x の 10 倍よりも大きければ、その固有振動数は連続体での理論解を用いて 5% 以内の精度で近似できる、といえる。

4. 結 言

本研究では、均一なユニットセルで構成されたマイクロラティスをコアに持つ梁 (=マイクロラティス梁) の断面二次モーメント I^* , ならびに固有振動数を有限要素法により求め、それら特性に及ぼす構造内部の幾何形状の影響を系統的に検討した。解析結果に基づき、以下の 4 点の結論が得られた。

- (1) 梁の長手方向 (x 方向) のセル数 $N_x \geq 10$ を満足すれば、マイクロラティス梁の断面二次モーメント I^* は長さに無関係な安定した解を示す。

Table 6 Natural frequencies of 1st, 2nd and 3rd vibration modes for micro-lattice beams having different numbers N_y and N_z

N_y	N_z	$I^*[\text{mm}^4]$	$M^*[\text{g/mm}^2]$	$f_1[\text{Hz}]$	$f_2[\text{Hz}]$	$f_3[\text{Hz}]$
1	1	1.55×10^1	1.74×10^{-6}	1.30×10^{-2} (1.30×10^{-2})	8.12×10^{-2} (8.12×10^{-2})	2.27×10^{-1} (2.27×10^{-1})
	2	3.17×10^1	3.47×10^{-6}	1.31×10^{-2} (1.31×10^{-2})	8.22×10^{-2} (8.22×10^{-2})	2.30×10^{-1} (2.30×10^{-1})
	3	4.86×10^1	5.21×10^{-6}	1.32×10^{-2} (1.33×10^{-2})	8.29×10^{-2} (8.30×10^{-2})	2.32×10^{-1} (2.33×10^{-1})
2	1	1.10×10^2	3.47×10^{-6}	2.44×10^{-2} (2.45×10^{-2})	1.53×10^{-1} (1.53×10^{-1})	4.28×10^{-1} (4.29×10^{-1})
	2	2.25×10^2	6.95×10^{-6}	2.46×10^{-2} (2.47×10^{-2})	1.54×10^{-1} (1.55×10^{-1})	4.31×10^{-1} (4.33×10^{-1})
	3	3.47×10^2	1.04×10^{-5}	2.48×10^{-2} (2.50×10^{-2})	1.55×10^{-1} (1.57×10^{-1})	4.36×10^{-1} (4.39×10^{-1})
3	1	3.62×10^2	5.26×10^{-6}	3.61×10^{-2} (3.62×10^{-2})	2.26×10^{-1} (2.27×10^{-1})	6.32×10^{-1} (6.35×10^{-1})
	2	7.40×10^2	1.04×10^{-5}	3.63×10^{-2} (3.66×10^{-2})	2.28×10^{-1} (2.29×10^{-1})	6.37×10^{-1} (6.42×10^{-1})
	3	1.14×10^3	1.56×10^{-5}	3.66×10^{-2} (3.70×10^{-2})	2.30×10^{-1} (2.32×10^{-1})	6.44×10^{-1} (6.49×10^{-1})

Fig. 10 Comparisons of 1st natural frequency for nine types of lattice models

- (2) 梁の厚さ方向（ y 方向）と奥行き方向（ z 方向）のセル数 N_y と N_z の I^* に対する影響は、構成するユニットセルの形状に依存し、 y 方向に長く、 z 方向に短いセルであるほど、連続体の傾向（厚さ方向の長さの 3 乗、奥行き方向の長さに比例する）から離れる。これは固定端近傍の変形が上述のセルでは連続体に比べ小さくなるのが原因である。

Fig. 11 Variations of relative errors of natural frequency for micro-lattice beams having different number N_x

- (3) マイクロラティス梁の断面二次モーメント I^* はユニットセルを構成する棒の長さ L の4乗に比例するが、直径 d の大きさにほとんど依存しない。
- (4) 構造解析で求めたマイクロラティス梁の断面二次モーメント I^* および縦弾性係数 E^* を用いて、曲げ振動時の梁の固有振動数を、連続体における理論解を用いて予測できる。ただし、その精度は求める振動モードの波長 Λ とセルの長手方向の長さ L_x の大小関係に依存し、 $\Lambda > 10L_x$ であれば、5% 以内の精度で固有振動数を予測することができる。

文 献

- (1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F., Cellular Solids: Structure and Properties, Second edition(1997), pp.15-51, Cambridge University Press.
- (2) Brittain, S.T., Sugimura, Y., Schueller, O.J.A., Evans, A.G. and Whitesides, G.M., "Fabrication and mechanical performance of a mesoscale space-filling truss system", Journal of Microelectromechanical Systems, Vol.10(2001), pp.113-120.
- (3) Markaki, A.E. and Clyne, T.W., "Mechanics of thin ultra-light stainless steel sandwich material Part I. Stiffness", Acta Materialia, Vol.51(2003), pp.1341-1350.
- (4) Wadley, H.N.G., "Cellular metals manufacturing", Advanced Engineering Materials, Vol.4-10(2002), pp.726-733.
- (5) Wadley, H.N.G., Fleck, N.A. and Evans, A.G., "Fabrication and structural performance of periodic cellular metal sandwich structures", Composite Science and Technology, Vol.63(2003), pp.2331-2343.
- (6) Schaedler, T.A., Jacobsen, A.J., Torrents, A., Sorensen, A.E., Lian, J., Greer, J.R., Valdevit, L. and Carter, W.B., "Ultralight metallic microlattices", Science, Vol.334(2011), pp.962-965.
- (7) McKown, S., Shen Y., Brookes, W.K., Sutcliffe, C., Cantwell, W.J., Langdon, G. and Nurick, G.N., "The quasi-static and blast response of lattice structures", International Journal of Impact Engineering, Vol.35(2008), pp.795-810.
- (8) Tsopanos, S., Mines, R.A.W., McKown, S., Shen, Y., Cantwell, W., Brookes, W. and Sutcliffe, C.J., "The influence of processing parameters on the mechanical properties of selectively laser melted micro-lattice structures", Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol.132, Issue 4(2010), 041011(12 pages).
- (9) 牛島邦晴, Wesley James CANTWELL, 陳玳コウ, "圧縮荷重を受ける軽量 Lattice 構造の機械特性の評価 (第1報, 圧縮初期の剛性と塑性崩壊応力に対する理論的評価)", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.75, No.753(2009), pp.572-579.

- (10) 牛島邦晴, Wesley James CANTWELL, 陳玳コウ, “ 圧縮荷重を受ける軽量 Lattice 構造の機械特性の評価（第2報, 圧縮負荷方向の違いおよび不完全セルの存在による機械特性への影響）”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.75, No.759(2009), pp.1492-1499.
  - (11) 牛島邦晴, 陳玳コウ, Wesley James CANTWELL, “ 圧縮荷重を受ける軽量 Lattice 構造の機械特性の評価（第3報, 端部の拘束による機械特性への影響）”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.76, No.767(2010), pp.860-867.
  - (12) 牛島邦晴, 陳玳コウ, Wesley James CANTWELL, 妹尾正隆, “ 3次元ラティス構造のせん断変形特性（第1報, ラティス構造全体の幾何形状の影響）”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.76, No.772(2010), pp.1557-1564.
  - (13) 牛島邦晴, 陳玳コウ, Wesley James CANTWELL, 妹尾正隆, “ 3次元ラティス構造のせん断変形特性（第2報, ラティス構造内部のユニットセル形状の影響）”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.76, No.781(2011), pp.1417-1432.
  - (14) Ushijima, K., Cantwell, W.J. and Chen, D.H., “Prediction of the mechanical properties of micro-lattice structures subjected to multi-axial loading”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.68(2013), pp.47-65.
  - (15) Noor, A.K. and Andersen, C.M., “Analysis of beam-like lattice trusses”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.20, Issue 1(1979), pp.53-70.
  - (16) Tekoğlu, C., Gibson, L.J., Pardoën, T. and Onck, P.R., “Size effects in foams: Experiments and modeling”, Progress in Materials Science, Vol.56, Issue 2(2011), pp.109-138.
  - (17) Deshpande, V.S. and Fleck, N.A., “Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending”, International Journal of Solids and Structures, Vol.39(2001), pp.6275-6305.
  - (18) Lou, J., Ma, L. and Wu L.Z., “Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core”, Materials Science and Engineering: B, Vol.177, No.19-20(2012), pp.1712-1716.
  - (19) Marc2010 Volume B: Element library, (2010).
  - (20) 小林繁夫, 振動学,(1994),pp.46-52, 丸善.
-