振動法を用いた粒子強化複合材料の確率均質化逆解析*

坂田 誠一郎^{*1}, 清水 義隆^{*2}

Inverse Stochastic Homogenization Analysis for a Particle-Reinforced Composite Material with the Perturbation-Based Approach

Sei-ichiro SAKATA^{*1} and Yoshitaka SHIMIZU^{*1} Kinki Univ. Dept. of Mechanical Engineering
Kowakae 3-4-1, Higashi-Osaka, Osaka, 577-8502, Japan

This paper discusses the inverse stochastic homogenization analysis for a particle-reinforced composite material. The homogenization analysis is performed with the homogenization theory, and the stochastic analysis is performed with the perturbation-based approach. In order to analyze the inverse stochastic homogenization problem, which aims to identify the coefficient of variances of the randomly varied elastic properties of component materials from the probabilistic characteristics of the homogenized elastic properties, the inverse stochastic homogenization method with the perturbation-based technique is proposed. The probabilistic properties of the homogenized elastic properties, which are obtained from an experiment or the Monte-Carlo simulation, are assumed to be known and used in the inverse stochastic homogenization analysis. The inverse stochastic homogenization problems with considering a single- or multi-variation of the elastic properties of the component materials are solved, and from the numerical results, accuracy and effectiveness of the proposed method are discussed.

Key Words : Inverse Stochastic Homogenization Analysis, Stochastic Homogenization Analysis, Perturbation, Particle-Reinforced Composite Material, Microscopic Random Variation

1. 緒 言

複合材料は、二種類以上の素材を組み合わせた材料であり、高比剛性などの特長から構造材料として広く利用されている。しかし、均質材料と比べて微視構造が複雑であり、複合材料を構成する素材の物性値や形状等のばらつきが、複合材料全体の巨視的な力学特性や微視的な応力状態に複雑な影響を及ぼす場合がある。そのため、複合材料を用いた構造物の信頼性評価の際に注意する必要がある。この観点から、近年では複合材料を構成する素材のばらつき（微視的なばらつき）が、複合材料の平均的な材料特性のばらつきや微視的な応力状態に及ぼす影響を調査した報告が見られるようになった。

これらの先行研究として、Kaminski ら⁽¹⁾⁽²⁾や Sakata ら⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾は一方向繊維強化複合材料や粒子強化複合材料について、素材の物性値の微視的なばらつきが複合材料の平均的な材料特性に及ぼす影響を解析する確率均質化解析について報告した。また、Sakata らは複合材料の微視的な物性値のばらつきが微視的な応力状態に及ぼす影響を解析するマルチスケール確率応力解析について報告した⁽⁶⁾⁽⁷⁾。このように、先行研究では微視的な物性値のばらつきを仮定し、巨視的な材料特性のばらつきや微視的な応力状態のばらつきに及ぼす影響の解析が行われている。

しかし、現実問題における複合材料の微視的な物性値のばらつきは、素材そのものがもともと有するものだけでなく、例えば複合材料の射出成形など加圧加熱過程を伴う製造工程で受ける力学的や熱的、もしくは化学的影響など製造工程に起因する場合もある。また、経年劣化等の後天的な条件に起因する微視的なばらつきも存在す

* 原稿受付 2012 年 12 月 13 日

^{*1} 正員, 近畿大学 (〒577-8502 大阪府東大阪市小若江 3-4-1)^{*2} 島根大学大学院 総合理工学研究科

E-mail: sakata@mech.kindai.ac.jp

る．これらの影響は一般に複雑であるとともに，製造工程を経た後の複合材料内部における構成材料単独の物性値を測定することは困難であると考えられる．したがって，このような微視的なばらつきが未知の場合には，実際に測定可能な複合材料の平均材料特性の巨視的なばらつき量から，微視的な物性値のばらつき量を推定する解析が必要となる．

これらの背景に対し，Sakata らは複合材料の平均的材料特性のばらつき量（分散もしくは変動係数）から微視的なばらつき（例えば素材の材料定数の分散もしくは変動係数）を推定する解析を確率均質化逆解析と名付け，等価弾性特性解析手法に Mori-Tanaka の手法⁽⁸⁾，確率特性解析手法にモンテカルロシミュレーションを用いた確率均質化逆解析手法を提案した⁽⁹⁾．しかしながら，Mori-Tanaka の手法は複雑な微視構造を考慮することが難しく微視的な応力状態も精確に解析できないという問題点を有する．一方，解析手法に例えば均質化法⁽¹⁰⁾を用いた場合，モンテカルロシミュレーションを用いた確率均質化逆解析は高い計算コストを要するという問題が生じる．そこで，本報では複合材料の等価弾性特性解析手法として均質化法，確率特性解析手法として摂動法に基づく手法を用いた確率均質化逆解析手法を提案する．そして，ガラス粒子強化複合材料を例として確率均質化逆解析を試み，提案手法の有効性を調査したので報告する．

2. 確率均質化解析と確率均質化逆解析の概要

確率均質化解析とは，複合材料における素材の物性値や微視構造のばらつきの種類や大きさから複合材料の等価弾性特性のばらつきの大きさを求める解析である．これとは逆に，確率均質化逆解析とは，複合材料の等価弾性定数のばらつきの大きさから素材の物性値などの微視的なばらつきの大きさを推定する解析である．図 1 に，本報における確率均質化解析と確率均質化逆解析の概略を示す．図 1 の E_p と E_m は強化材および母材の縦弾性定数， ν_m は母材のポアソン比， E^{eq} ， G^{eq} ， ν^{eq} はそれぞれ巨視スケールにおける等価縦弾性定数，せん断弾性定数およびポアソン比を表す．本報では，微視的なばらつきとして複合材料を構成する素材の弾性定数のばらつきを考え，図 1 下側の確率均質化逆解析に，摂動法に基づく確率均質化法を用いる点が特徴である．

なお，本報で述べる確率均質化逆解析は，微視的なばらつき量の推定を目的とするが，例えば既報のマルチスケール確率応力解析⁽⁶⁾⁽⁷⁾のように，ミクロなばらつき量とマクロなばらつき量の両者が既知である必要がある解析を実施するためにも有用である．

Fig.1 Schematic view of the stochastic homogenization and inverse stochastic homogenization problems

一般に，複合材料の等価弾性定数は実験等により測定できることから，その確率特性も実験を利用した補助的な計算により推定できる．しかし，等価弾性定数のばらつきの要因は多数想定でき，それぞれが複雑な影響を及ぼすと考えられる．これに対し本研究では，上記の逆解析の精度調査のため，順問題（確率均質化問題）における入力パラメータの実際のばらつきが明らかである必要があることから，素材の弾性定数のばらつきを仮定した確率均質化解析による擬似的な数値実験をモンテカルロシミュレーションにより行い，そこで得られた等価弾性定数の確率特性を既知として素材の弾性定数のばらつきの大きさを推定する問題設定とした．

3. 解析手法

3・1 均質化法

複合材料を構成する微視的な物性値(素材の物性値)から,複合材料全体の巨視的な平均材料定数(等価弾性定数)を求める問題を均質化問題と呼ぶ.一般的な等価弾性特性解析手法として,古典的複合則, Eshelby の等価介在物法およびそれを拡張した Mori-Tanaka の手法, 均質化法等が挙げられる. その中でも均質化法は, 微視構造と巨視構造の支配方程式間の数学的整合性が高く, 三次元的に複雑な微視構造を解析することができるという長所がある. また, 巨視的状态(マクロひずみ場)を考慮し微視的な応力場を解析対象とするマルチスケール応力解析を実行することができる. 以上の利点を鑑み, 本報では等価弾性特性解析手法として均質化法を用いる.

均質化法では, 非常に小さなスケール内に不均質かつ周期的な構造を持った材料を巨視的に均質体とみなし, その平均的特性を計算する. 図 2 に周期的な微視構造を有する粒子強化複合材料の概略図を示す.

Fig.2 Schematic view of a glass particle reinforced composite material

均質化法を用いた場合, 均質化された巨視的弾性テンソル C^H は次式より求めることができる.

$$C^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y C \left(I - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) dy \quad (1)$$

ただし, $|Y|$ は微視的なユニットセルの体積, C は微視的なユニットセル中の各素材の弾性テンソル, I は単位テンソル, χ は特性変位, y は微視構造の座標変数, dy は微視構造における微小要素, 上添え字 H は均質化された量を表す. また, χ は次式の特性方程式より求めることができる.

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y} C \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial y} C dy \quad (2)$$

ここで複合材料の素材の弾性定数が確率変動を有する場合, 均質化された巨視的弾性テンソルの実現値 C^{H*} は次式より求めることができる.

$$C^{H*} = \frac{1}{|Y|} \int_Y C^* \left(I - \frac{\partial \chi^*}{\partial y} \right) dy \quad (3)$$

ただし, 上添え字 $*$ は確率変数もしくは確率応答の実現値を表す. ここで素材の弾性定数の実現値が, その期待値及び正規化された確率変数により表現できると仮定する. このとき, 例えば素材の縦弾性定数の実現値は次式で表現できる. ただし上添え字 0 は期待値, α は正規分布に従う正規化された確率変数である.

$$E^* = E^0 (1 + \alpha^*) \quad (4)$$

このとき, 式(2)の特性方程式は次式となる.

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y} C(\alpha^*) \frac{\partial \chi^*}{\partial y} dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial y} C(\alpha^*) dy \quad (5)$$

この方程式の解 χ^* および $C^* = C(\alpha^*)$, 式(3)を用いることで, 等価弾性テンソルの実現値 C^{H*} が計算できる. また, 正方配列の微視構造を有する粒子強化複合材料の場合, 等価なヤング率 E^{eq} , 等価な横弾性定数 G^{eq} 及び等価なポアソン比 ν^{eq} に関する実現値も同様に求める事ができる.

3・2 モンテカルロシミュレーション

本研究では、既知と仮定する等価弾性テンソルの実現値もしくは等価弾性定数の実現値の確率特性を得るために、モンテカルロシミュレーションによる模擬的な数値実験を行う。素材の材料定数のばらつきとして正規分布を仮定するため、Box-Muller 法⁽¹¹⁾に基づき、次式を用いて正規乱数を発生させた。

$$\alpha^* = \sqrt{-2\sigma^2 \log U_1^*} \times \sin 2\pi U_2^* \quad (6)$$

ここで σ^2 は確率変数 α の分散であり、 U_1^* と U_2^* は、 $0 < U_1^* \leq 1$ 、 $0 \leq U_2^* \leq 1$ となる一様乱数の実現値である。乱数の生成にはメルセンヌツイスター法を用いた。また、モンテカルロシミュレーションの試行回数は 10,000 回とした。モンテカルロシミュレーションによる確率応答、例えば等価弾性テンソルの期待値、分散および変動係数は次式で計算した。

$$\text{Exp}[C^{H*}] \approx \frac{1}{n} \sum_k C^{H*}_k \quad (7)$$

$$\text{Var}[C^{H*}] \approx \frac{1}{n} \sum_k (C^{H*}_k - \text{Exp}[C^{H*}])^2 \quad (8)$$

$$\text{CV}[C^{H*}] = \frac{\sqrt{\text{Var}[C^{H*}]}}{\text{Exp}[C^{H*}]} \quad (9)$$

ただし n は試行回数、下添え字 k は k 番目の試行における実現値を表す。

3・3 摂動法による確率均質化解析

本報では、確率特性解析手法として摂動法を用いる。ここで素材の材料定数の実現値が式(4)と同様に与えられ、均質化された弾性テンソルの実現値が次式のように近似的に表現できるとする。

$$\hat{C}^{H*} = C^{H0} + C^{H1}\alpha^1 + \dots + C^{Hi}\alpha^i + \dots \quad (10)$$

ただし上添え字 $\hat{}$ は近似により推定された量を表し、 α は微小な変動を仮定する。また、 C^{Hi} は等価弾性テンソルの i 次の摂動項を表す。本報では、確率特性を求める方法として、摂動解析⁽³⁾により得られる摂動項と m 次近似二次モーメント法⁽¹²⁾を用い期待値及び分散を求めた。例えば均質化された弾性テンソルの期待値 $\text{Exp}[C^{H*}]$ と分散 $\text{Var}[C^{H*}]$ は次式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Exp}[C^{H*}] &\approx \text{Exp}[\hat{C}^{H*}] = C^{H0} + \sum_{i_1} \sum_{i_2} [C^{H2}]_{i_1 i_2} \text{cov}[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}] + \dots \\ \text{Var}[C^{H*}] &\approx \text{Var}[\hat{C}^{H*}] = \sum_{i_1} \sum_{i_2} [C^{H1}]_{i_1} [C^{H1}]_{i_2} \text{cov}[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}] \\ &\quad + \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} \sum_{i_4} [C^{H2}]_{i_1 i_2} [C^{H2}]_{i_3 i_4} \\ &\quad \times (M[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}] - \text{cov}[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}] \text{cov}[\alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}]) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし、 $\text{cov}[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}]$ は $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$ の共分散、 $M[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}]$ は四次の確率モーメントを表す。また、摂動項に関する下添え字及び α の下添え字は変動する物性値を表す。

3・4 摂動法を用いた確率均質化逆解析手法

本報で示す確率均質化逆解析では、等価弾性定数(等価なヤング率 E^{eq} 、等価な横弾性定数 G^{eq} 及び等価なポアソン比 ν^{eq})の期待値と分散から、問題設定において変動すると仮定した素材の物性値(粒子のヤング率 E_p 及びポ

アソソ比 ν_p と樹脂のヤング率 E_m 及びポアソソ比 ν_m)の変動係数を求める．なお，素材の物性値の期待値は既知とした．本報で提案する摂動法を用いた確率均質化逆解析の流れは次の通りである．

- (1) 等価弾性定数の確率特性（期待値と分散）および一次の摂動項を求め，一次近似二次モーメント法を用いて一次摂動法による確率均質化逆解析を行う．
- (2)(1)により推定した素材の物性値の変動係数を利用して，二次摂動法による確率均質化逆解析を行う．
- ⋮
- (n) $n-1$ 次摂動法による確率均質化逆解析で推定した素材の物性値の変動係数を利用して， n 次摂動法による確率均質化逆解析を行う．

本計算の終了条件としては，推定される素材の物性値の変動係数が収束した場合や，高次摂動項の計算コストを鑑みて適当な次数の摂動までで計算を打ち切ることが考えられる．本報では後者の観点から，3 次までの摂動項を用いた場合の解析を行い，解析精度を調査した．

ここで，複合材料は複数の素材から構成されるが，素材の単一の変動を仮定できる場合と，複数の変動を想定する場合で具体的な計算過程が若干異なるため，各々の場合について記述する．

(a) 素材の単一の物性値が変動する場合

素材の単一の物性値が変動し，他は無視できることが明らかな場合，例えば等価縦弾性定数の確率特性は式(11)より次式のように求められる．

$$\left. \begin{aligned} \text{Exp}[\hat{E}^{eq*}] &= E^{eq0} + E^{eq2} \text{CV}[\alpha]^2 + \dots \\ \text{Var}[\hat{E}^{eq*}] &= (E^{eq1})^2 \text{CV}[\alpha]^2 + (E^{eq2})^2 \times (M[\alpha, \alpha, \alpha, \alpha] - \text{CV}[\alpha]^4) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

本問題設定では微視的な確率変数 α の変動係数 $\text{CV}[\alpha]$ が未知である一方，式(12)における等価弾性定数の分散は既知であることから，式(12)を $\text{CV}[\alpha]$ について解けば，素材の物性値の変動係数が近似的に推定できる．

ここでまず，上述の手順(1)における一次摂動法による確率均質化逆解析では，式(12)より，容易に $\text{CV}[\alpha]$ の推定値が計算できる．例えば等価縦弾性定数 E^{eq} の分散が既知であった場合には，次式の通り既知の分散及び等価弾性定数に関する一次の摂動項から $\text{CV}[\alpha]$ が得られる．

$$\text{CV}[\alpha] = \frac{\sqrt{\text{Var}[E^{eq}]}}{E^{eq1}} \quad (13)$$

式(13)による推定は非常に簡便である一方，一次摂動法による低次近似に起因する等価弾性定数の分散の推定誤差が逆解析の精度に大きく影響する．そこで，引き続き高次の摂動法およびそれに基づく確率モーメントの推定を順次適用し，確率均質化逆解析を実施する．

高次の摂動法を用いた確率均質化逆解析においては，式(12)より導出される $\text{CV}[\alpha]$ と等価弾性定数の分散の関係式が非線形方程式となること，また $\text{CV}[\alpha]$ が分散だけでなく期待値にも影響を及ぼすことから，解が容易に得られない．そこで，既知である等価弾性定数の期待値および分散に対する推定された等価弾性定数の期待値および分散の誤差を最小化する最適化問題を解くことで，素材の物性値の変動係数を推定する．例えば，等価縦弾性定数の期待値及び分散が既知の場合を例とすると，次の最適化問題を解くことで確率均質化逆解析を実施した．

$$\left. \begin{aligned} \text{find} \quad & \text{CV}[\alpha] \\ \text{to minimize} \quad & F_{obj} = \left(\frac{\text{Exp}[\hat{E}^{eq*}] - \text{Exp}[E^{eq*}]}{\text{Exp}[E^{eq*}]} \right)^2 + \left(\frac{\text{Var}[\hat{E}^{eq*}] - \text{Var}[E^{eq*}]}{\text{Var}[E^{eq*}]} \right)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{E}^{eq*} = \sum_i E^{eqi} \alpha^i \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

なお、式(14)を解くために、本研究では Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(BFGS)公式による準ニュートン法⁽¹³⁾を用い、次式に示す収束条件を満たしたとき最適解が得られたものと判定した。

$$\frac{|F_{obj}^t - F_{obj}^{t-1}|}{F_{obj}^{t-1}} \leq 10^{-9} \quad (15)$$

ここで F_{obj}^t は最適化過程における t 回目の最適化ステップにおける目的関数値を表す。なお、式(12)および式(14)から明らかなように、提案手法では逆解析のための最適化解析に要する繰り返し計算において、確率モーメント推定のための確率均質化解析は1度しか実施しない。一方、既報⁽⁹⁾のモンテカルロシミュレーションを用いた方法では、最適化ステップ数とモンテカルロシミュレーションの試行数に応じた回数の均質化解析が必要となるため、特に均質化解析にコストを要する均質化法の利用を前提とした場合、提案手法は極めて効率的に逆解析が実施できることが利点である。

また、本手法においては、一次摂動法を用いた場合も式(14)を解くことで解が得られると考えられるが、一次摂動法を用いた場合の解が以降の高次摂動法を用いた場合の解の探索の初期値に影響を及ぼすことから、できる限り精確な解を得る必要があること、一次摂動法の利用を仮定している段階では微視的な確率変数の変動係数は全くの未知であり、探索初期値の設定が任意となることなどから、一次摂動法を用いた場合の解の推定に限り、式(13)を用いた陽な代数形式で解を求めることとした。

(b) 素材の複数の物性値が変動する場合

一般には、複数の物性値がそれぞれ異なるばらつきを有する場合を想定する必要がある。このとき、上記のように単一の等価弾性定数の確率特性から微視的な確率特性を推定するのでは無く、変動しうる素材の弾性定数を全てパラメータとし、測定可能な全ての等価弾性定数の確率特性からそれらを推定する。

具体的には、本研究の場合には正方配列された粒子強化複合材料で粒子と樹脂の両者とも等方性材料を仮定することから、素材の弾性定数は粒子の縦弾性定数 E_p およびポアソン比 ν_p 、樹脂の縦弾性定数 E_m 及びポアソン比 ν_m の4種類となる。ここで本研究における確率均質化逆解析はマルチスケール確率応力解析を実施するための微視的な確率変動の推定を目的としていること、及び粒子強化複合材料においては、上記の4つの素材の弾性定数のうち粒子のポアソン比の変動が確率均質化特性やミクロ応力状態に及ぼす影響が他と比べ小さかったことから、これを除いた E_p 、 E_m および ν_m の変動を確率均質化逆解析により推定することとした。また、本報ではこれらの確率変数は独立に変動すると仮定した。

ここで、(a)と同様にまず一次摂動法を用いた場合の微視的確率変動推定について考える。式(11)より、三種類の微視的変動を考えた場合の一次摂動法による等価弾性定数の分散は次式で計算できる。

$$\begin{Bmatrix} \text{Var}[\hat{E}^{eq*}] \\ \text{Var}[\hat{G}^{eq*}] \\ \text{Var}[\hat{\nu}^{eq*}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E^{eq1}|_{E_p} & E^{eq1}|_{E_p} & E^{eq1}|_{E_m} & E^{eq1}|_{E_m} & E^{eq1}|_{\nu_m} & E^{eq1}|_{\nu_m} \\ G^{eq1}|_{E_p} & G^{eq1}|_{E_p} & G^{eq1}|_{E_m} & G^{eq1}|_{E_m} & G^{eq1}|_{\nu_m} & G^{eq1}|_{\nu_m} \\ \nu^{eq1}|_{E_p} & \nu^{eq1}|_{E_p} & \nu^{eq1}|_{E_m} & \nu^{eq1}|_{E_m} & \nu^{eq1}|_{\nu_m} & \nu^{eq1}|_{\nu_m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{NSD}[E_p] \\ \text{NSD}[E_m] \\ \text{NSD}[\nu_m] \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ただし下添え字 E_p 、 E_m および ν_m は変動する素材の弾性定数を表す。また $\text{NSD}[\alpha] = \text{CV}[\alpha]^2$ である。よって、式(16)と既知である等価弾性定数の分散の二乗誤差最小化条件から、解くべき方程式として次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \text{Var}[E^{eq*}] \\ \text{Var}[G^{eq*}] \\ \text{Var}[\nu^{eq*}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E^{eq1}|_{E_p} & E^{eq1}|_{E_p} & E^{eq1}|_{E_m} & E^{eq1}|_{E_m} & E^{eq1}|_{\nu_m} & E^{eq1}|_{\nu_m} \\ G^{eq1}|_{E_p} & G^{eq1}|_{E_p} & G^{eq1}|_{E_m} & G^{eq1}|_{E_m} & G^{eq1}|_{\nu_m} & G^{eq1}|_{\nu_m} \\ \nu^{eq1}|_{E_p} & \nu^{eq1}|_{E_p} & \nu^{eq1}|_{E_m} & \nu^{eq1}|_{E_m} & \nu^{eq1}|_{\nu_m} & \nu^{eq1}|_{\nu_m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{NSD}[E_p] \\ \text{NSD}[E_m] \\ \text{NSD}[\nu_m] \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここで式(17)を解いた場合、低次近似による推定誤差に起因し、解が負となる場合がある。そこで制約として式(17)の解が0以上となる条件を付加するために、Lagrangeの未定乗数法⁽¹⁴⁾を用いた。この場合、最小化すべきLagrange汎関数は次式で定義される。

$$L(\text{NSD}[E_p], \text{NSD}[E_m], \text{NSD}[\nu_m], \lambda_{E_m}, \lambda_{E_p}, \lambda_{\nu_m}) = F_{obj} + \lambda_{E_p} h(\text{NSD}[E_p]) + \lambda_{E_m} h(\text{NSD}[E_m]) + \lambda_{\nu_m} h(\text{NSD}[\nu_m]) \quad (18)$$

ただし, h は制約条件を表す関数であり,

$$h(\text{NSD}[E_p]) = -(\text{CV}[\alpha_{E_p}])^2, h(\text{NSD}[E_m]) = -(\text{CV}[\alpha_{E_m}])^2, h(\text{NSD}[\nu_m]) = -(\text{CV}[\alpha_{\nu_m}])^2 \quad (19)$$

である. また $\lambda_{E_m}, \lambda_{E_p}, \lambda_{\nu_m}$ は Lagrange 乗数を表す. このとき, Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件を用いれば, 上記の制約条件付き最適化問題の解が得られる. 例えば E_m と ν_m の 2 種類の材料定数の変動を仮定した場合の KKT 条件は次の通りである.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \text{NSD}[E_m]} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \text{NSD}[\nu_m]} = 0, \\ \lambda_{E_m} &\geq 0, \quad \lambda_{\nu_m} \geq 0, \\ h(\text{NSD}[E_m]) &\leq 0, \quad h(\text{NSD}[\nu_m]) \leq 0, \\ h(\text{NSD}[E_m])\lambda_{E_m} &= 0, \quad h(\text{NSD}[\nu_m])\lambda_{\nu_m} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(20)から得られる方程式を解くことにより, 一次摂動法を用いた場合の微視的確率変動量が推定できる.

高次摂動法による確率均質化逆解析では, (a)と同様に既知である等価弾性定数の期待値と分散に対する推定された等価弾性定数の期待値と分散の誤差を最小化する最適化問題を解くことで, 素材の物性値の変動係数を推定する. 解くべき最適化問題は次式で定義した.

$$\left. \begin{aligned} \text{find} \quad & \text{CV}[E_p], \text{CV}[E_m], \text{CV}[\nu_m] \\ \text{to minimize} \quad & F_{obj} = \sum_j \left(\frac{\text{Exp}[\hat{X}_j^*] - \text{Exp}[X_j^*]}{\text{Exp}[X_j^*]} \right)^2 + \sum_j \left(\frac{\text{Var}[\hat{X}_j^*] - \text{Var}[X_j^*]}{\text{Var}[X_j^*]} \right)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{X}_j = \sum X_{jp_1 p_2 \dots p_m} \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_l^{p_l} \\ & X_j = \{E^{eq}, G^{eq}, \nu^{eq}\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ただし $X_{jp_1 p_2 \dots p_l}$ における下添え字 p_l は等価弾性定数についての確率変数 α_l に関する摂動次数を表す.

なお, 利用した最適化手法および収束条件は(a)と同じである.

ここで, 式(14)や式(21)を解く最適化過程において, 目的関数 F_{obj} の評価には等価弾性特性の分散を求める必要がある. 前報⁽⁹⁾ではこの計算にモンテカルロシミュレーションを用いていたため, 一回の目的関数評価に 10^4 回程度の均質化解析が必要であったが, 提案手法では数回程度の均質化解析で済むため, 大幅な計算コスト削減が可能となる.

4. 数値計算例

4・1 計算条件

本報では, 図 2 に示した粒子強化複合材料を対象とし, 母材を Epoxy 樹脂, 強化材を E-glass としたガラス粒子強化複合材料を想定する. これに対し, 樹脂のヤング率 E_m , 粒子のヤング率 E_p , 樹脂のポアソン比 ν_m が独立に変動する場合を考える. 解析に用いた材料定数を表 1 に示す. この対象において, 微視的変動(素材の弾性定数のランダム変動)が一様かつ周期的に生じていると仮定する. なお, 有限要素解析には 8 節点ソリッド要素を用い, ユニットセルの総節点数 1215, 総要素数 1080 である.

Table 1 Elastic properties of each component material

	Young's modulus [GPa]	Poisson's ratio
E-glass	73.0	0.22
Epoxy	4.5	0.39

4・2 素材の単一の物性値が変動する場合

解析例として、まず粒子もしくは樹脂の弾性定数のうち一つのみが変動すると仮定した場合について、 E_m 、 E_p 及び ν_m がそれぞれ変動した場合の確率均質化逆解析結果を示す。正解となる素材の物性値の変動係数を 0.05 とし、既知とする等価弾性定数の分散をモンテカルロシミュレーションで算出した後、等価弾性定数の分散から提案手法により素材の物性値の変動係数を推定する。本例では単一変動を仮定するため、3・4(a)で示した手法を用いて、 E^{eq} 、 G^{eq} 、 ν^{eq} それぞれの期待値と分散から素材の物性値の変動係数を推定した。

なお、提案手法の有効性を検証するために、確率均質化逆解析で推定した素材の物性値の変動係数 CV について、確率均質化逆解析に対する推定誤差 RE_{CV} を次式より求めた。

$$RE_{CV} = \frac{|CV_{PM} - CV_{AS}|}{CV_{AS}} \times 100 \quad [\%] \quad (22)$$

ただし、 CV_{AS} は正解となる素材の物性値の変動係数、 CV_{PM} は提案手法を利用した確率均質化逆解析によって推定した素材の物性値の変動係数を表す。

図 3 に、粒子含有率 V_p を 0.3 として E_m 、 E_p 及び ν_m 変動を仮定した場合の等価弾性定数の変動係数、及び逆解析により推定された素材の弾性定数の変動係数の相対誤差を示す。まず、図 3(a)より、 E_m 変動及び ν_m 変動に対しては等価弾性定数の変動係数が大きくなるのに対し、 E_p 変動の場合は等価弾性定数変動への影響は小さいことが判る。次に図 3(b)より、 E_m 変動の場合、本問題設定においては、いずれの等価弾性定数の分散を用いた場合でも良好な精度でミクロ変動が推定できていることが判る。さらに、1～3 次までのいずれの次数を用いた場合も誤差 0.1% 程度の解が得られた。

Fig.3 CV and relative estimation error for each microscopic random variation in the case of a single random variation ($V_p=0.3$)

E_p 変動については、図 3(c)よりいずれの場合でも誤差 1%未満となっており、良好な解が得られたと考えられるが、等価せん断弾性定数の分散から推定した場合は若干精度が悪い。また、3 次摂動を用いることで、解の精度が大幅に改善されていることが確認できる。

一方、図 3(d)より、 ν_m 変動の場合は他と比較し推定精度がかなり悪いことが判る。特に 1 次および 2 次の摂動を用い、等価縦弾性定数もしくはせん断弾性定数の分散からミクロ変動を推定した場合、誤差は最大 7%程度と大きくなっている。また、等価ポアソン比の分散から推定した場合には誤差は 1%程度と小さくなっている。また、3 次摂動を用いた場合には解析精度は大幅に改善しており、いずれの等価弾性定数の分散から推定した場合でも誤差 1%未満と良好な結果が得られた。一方、 ν_m 変動に対し、等価せん断弾性定数の分散と 2 次摂動を用いて解析を行った場合、1 次摂動を用いた場合より精度が悪化している点に注意が必要である。

ここで、図 3(a)に示したように E_p 変動が等価弾性定数変動に及ぼす影響が小さいことが解析誤差の主因である可能性を調査するために、より E_p 変動の影響が大きくなる $V_p=0.5$ の場合についても解析を行った。その結果を図 4 に示す。図 4(a)に各素材の弾性定数変動に対する等価弾性定数の変動係数、図 4(b)に逆解析による E_p の変動係数の解析誤差を示す。

Fig.4 CV and relative estimation error for each microscopic random variation in the case of a single random variation ($V_p=0.5$)

図 4(a)より明らかなように、 $V_p=0.5$ の場合、特に粒子のヤング率が等価縦弾性定数変動に及ぼす影響が増している。一方、図 4(b)より、例えば一次摂動により等価縦弾性定数の変動係数を用いて解析を行った場合の誤差は 0.2%程度、等価せん断弾性定数の変動係数を用いた場合 0.1%程度改善しているが、 ν_m の変動係数の推定に含まれる誤差と比較すると非常に小さい。また、三次摂動を用いた場合の誤差は逆にわずかであるが増加した。これらのことから、粒子含有率などの変化により素材の弾性定数の等価弾性定数への寄与度が変化した場合には解析誤差に若干影響があるものの、摂動法による確率均質化解析の精度に起因する誤差と比較すると小さいことが確認できた。

これらの結果より、ミクロ変動の種類に応じ適切な等価弾性特性を選択するか、3 次摂動法を用いることで、良好な精度の確率均質化逆解析が実施できると考えられる。

次に、最も精度の悪かった ν_m 変動の場合について、 V_p を 0.1~0.5 まで変化させた場合の V_p と RE_{CV} の関係を調査した。1~3 次までの摂動を用いた確率均質化逆解析結果と正解との相対誤差を図 5 に示す。

図 5(a)より、粒子含有率が増加するにつれ、 ν_m 変動に対する E^{eq} および ν^{eq} の変動係数は大きくなっていることが判る。一方、 G^{eq} の変動係数は小さくなっている。これに対し図 5(b)~(d)より、 E^{eq} の分散から推定した場合は粒子含有率が増すにつれ誤差が減少している一方、 G^{eq} もしくは ν^{eq} から推定した場合には、粒子含有率の増加に伴い解析誤差は悪化している。このことから、等価弾性定数の変動係数の大きさそのものと、逆解析誤差との直接の相関は見られないことが確認できる。また、特に 1 次もしくは 2 次の摂動法を用いる場合、適切な等価弾性定数（本ケースでは ν^{eq} ）の分散を利用できれば粒子含有率の影響は比較的小さくて済むが、不適切な等価弾性定数（本ケースでは E^{eq} もしくは G^{eq} ）の分散をミクロ変動推定に用いる場合、粒子含有率が逆解析の精

度に影響を及ぼし、より良好な精度を与える等価弾性定数の種類も変化することから注意が必要である。また、図5から確認できるとおり、3次摂動法を用いた場合いずれの粒子含有率でも良好な精度を得ることができた。

以上のように、 E_m 変動もしくは E_p 変動の場合には1次摂動法でも誤差1%程度以下の良好な結果が得られたが、 ν_m 変動の場合には逆解析に用いる等価弾性定数の種類により3次程度の摂動法を使用する必要があるといえる。この理由としては、素材のヤング率変動と各等価弾性定数の関係が比較的線形に近く低次の摂動でも良好な近似が得られる一方、ポアソン比変動の場合には、特に等価縦弾性定数およびせん断弾性定数との関係が強い非線形性を示すため、3次程度以上の摂動を用いなければ良好な近似が得られないことが考えられる。

これらの内容は、不均質材料の確率均質化解析に関する報告⁽³⁾⁽⁴⁾においても示唆されており、本問題の解析精度の向上のためには、確率均質化解析手法の精度向上が有効であると考えられる。

Fig.5 Relative estimation error for each V_p and order of perturbation (ν_m variation)

4・3 素材の複数の物性値が変動した場合

次に、素材の複数の物性値が変動する場合を考える。今回は解析例として、まず粒子含有率 V_p が0.3、 E_m と ν_m が同時かつ独立に変動する場合を考える。この問題について、3・4(b)で示した提案手法を用いて、以下に示す素材の物性値の変動係数の組み合わせによる確率均質化逆解析を行った。

- (1) $CV[E_m]=0.05$ 、 $CV[\nu_m]=0.01$ と仮定した場合
- (2) $CV[E_m]=0.01$ 、 $CV[\nu_m]=0.05$ と仮定した場合
- (3) $CV[E_m]=0.05$ 、 $CV[\nu_m]=0.05$ と仮定した場合

図6に、1～3次までの摂動項を用いた場合について、樹脂のヤング率およびポアソン比に関する確率均質化逆解析結果の誤差を示す．図6(a)は樹脂のヤング率の変動係数推定結果，図6(b)は樹脂のポアソン比の変動係数推定結果を表す．

Fig.6 Relative error in the estimated CVs of the elastic properties of resin in the case of E_m and v_m variations

図6より、樹脂のヤング率変動が大きい場合（上記(1)および(3)）には樹脂のヤング率およびポアソン比の変動係数のいずれもが良い精度で推定できていることが確認できる．一方、ポアソン比変動が支配的な場合(上記(2))，他と比較し解析誤差が大きくなっていることが判る．これは、前節で示したとおり樹脂のポアソン比変動の場合の逆解析精度が低いことに起因すると考えられる．しかしながら、複数変動を考慮した場合の逆解析誤差は最大で3%と、単数変動を仮定した場合の最大誤差より小さい．このことから、ミクロ変動推定のために適切な等価弾性定数が選択できない場合、本節で示した複数変動を仮定した手法を用いることで、比較的精度の良い結果が得られることが示唆される．

また、3次摂動法を用いた場合、いずれの問題設定でも解析誤差は最大1%程度であった．これより、本報における問題設定に対しては、3次以上の摂動法による確率均質化逆解析手法の有効性が高いことが確認できた．

次に、単一変動の場合の誤差が小さかった樹脂及び粒子のヤング率変動の場合について同様の解析を行った．例として次の場合の解析結果を図7に示す．

- (4) $CV[E_m]=0.05$ ， $CV[E_p]=0.01$ と仮定した場合
- (5) $CV[E_m]=0.01$ ， $CV[E_p]=0.05$ と仮定した場合
- (6) $CV[E_m]=0.05$ ， $CV[E_p]=0.05$ と仮定した場合

Fig.7 Relative error in the estimated CVs of the elastic properties of resin in the case of E_m and E_p variations

図7より、粒子のヤング率変動が小さい場合（上記(4)）、粒子のヤング率の変動係数の推定精度が若干悪い。しかしながら、一次摂動を用いた場合でも相対誤差で約1.2%であり、良好な解が得られた。また、本ケースでは樹脂のヤング率変動についてはいずれの場合でも誤差が0.1%未満と非常に精度の良い解が得られた。これは樹脂のポアソン比変動を伴う場合と比べて十分解析精度が良いと言える。このことから、本問題においては、図3(a)に示した各素材の弾性定数の等価弾性定数変動への寄与度が小さい粒子のヤング率が確率変動を有する場合でも、良好な精度の解が得られることが判る。また、図3、図6との比較により、本問題設定では単一変動の場合の解析精度が複数変動においても大きく影響すると考えられる。この解析精度の悪化の原因としては、素材の単一の物性値が変動する場合と同様、摂動法による確率均質化解析(順解析)の解析精度が大きく影響すると考えられる。

5. 結 言

本報では、等価弾性特性解析手法として均質化法、確率特性解析手法として摂動法を用いた確率均質化逆解析の手法を提案し、提案手法による確率均質化逆解析を行った。そして、既知と仮定したモンテカルロシミュレーションによる確率均質化解析結果を用いて提案手法の解析精度を調査し、提案手法の有効性を評価した。

提案手法の解析精度について、素材の単一の物性値変動を仮定した場合、提案手法による解析誤差は、 E_m および E_p 変動の場合には1次を含む低次の摂動法を用いた場合でも1%程度以下となった。一方、 ν_m 変動の場合には1次や2次の摂動法を用いた場合、参照する等価弾性定数の変動係数の種類によっては6~8%程度の誤差が生じたが、3次摂動法を用いた場合で最大1%程度となった。

また、素材の複数の物性値変動の例として、 E_m 変動と ν_m 変動を仮定した場合および E_m 変動と E_p 変動を仮定した場合について解析を行った。前者の場合、解析誤差は1次摂動法を用いた場合で最大3%程度、3次摂動法を用いた場合で最大1%程度であった。一方、後者の場合は1次摂動法を用いた場合でも最大誤差は1%程度であった。以上より、本問題について、ヤング率変動のみの場合には1次や2次の低次摂動法でも良好な回を得ることができる一方、樹脂のポアソン比変動を含む場合には、3次以上の摂動法を用いることで、提案手法により確率均質化逆解析が精度良く行えると考えられる。これらの解析誤差の原因としては、摂動法による近似に起因する確率均質化解析の誤差が考えられるため、当該問題の解析精度完全が逆問題解析精度にも繋がると予想されるため、今後の改善が要望されると考える。また、計算コストについて、Windows7, Xeon3.2GHzのPCを用い、単一変動を仮定した場合を例にとると、モンテカルロシミュレーションを用いる手法では、試行回数を10,000とした場合一回の目的関数計算に約35時間を要したのに対し、提案手法を用いた場合は逆解析全体に要する時間が最大約100秒であった。このことから、提案手法により大幅に計算効率が改善できたことが確認できた。

謝 辞

本研究の一部は、科学研究費若手研究(B)（課題番号：23760097、平成23~26年度）および文部科学省私立大学戦略的研究基盤形成支援事業(平成24年~平成26年)の援助を受けた。ここに謝意を表する。

文 献

- (1) Kaminski M. and Kleiber M., "Stochastic structural interface defects in fiber composites", *International Journal of Solid and Structures*, Vol.33 (1996), pp.3035-3056.
- (2) Kaminski M., "Sensitivity and randomness in homogenization of periodic fiber-reinforced composites via the response function method", *International Journal of Solid and Structures*, Vol.46(3-4), (2009), pp. 923-937.
- (3) Sakata S., Ashida F., Kojima T. and Zako M., "Three-dimensional stochastic analysis using a perturbation-based homogenization method for homogenized elastic property of inhomogeneous material considering microscopic uncertainty", *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 45(3/4), (2008), pp.894-907.
- (4) Sakata S., Ashida F. and Zako M., "Kriging-based Approximate Stochastic Homogenization Analysis for Composite Material", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.197(21-24), (2008), pp.1953-1964.
- (5) Sakata, S. and Ashida, F., "Hierarchical stochastic homogenization analysis of a particle reinforced composite material considering non-uniform distribution of microscopic random quantities", *Computational Mechanics*, Vol.48, (2011), pp.529-540.

- (6) Sakata S., Ashida F., and Enya K., “Stochastic analysis of microscopic stress in fiber reinforced composites considering uncertainty in a microscopic elastic property”, *International Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, Vol.4 (2010), pp.568-577.
 - (7) Sakata S., Ashida F. and Enya K., “Perturbation-based stochastic analysis on microscopic stress for particle reinforced composite material considering microscopic uncertainty in material property”, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Vol.9, Issue 4, (2011), pp.395-408.
 - (8) Mori T. and Tanaka K., “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions”, *Acta Metallurgica*, Vol.21 (1973), pp.571-574.
 - (9) Sakata S., Ashida F., and Shimizu Y., “Inverse stochastic homogenization analysis for particle-reinforced composite material with the Monte-Carlo simulation”, *International Journal of Multiscale Computational Engineering*, Vol.9 (2011), pp.409-423
 - (10) Guedes M. and Kikuchi N., “Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.83, (1990) pp.143-198.
 - (11) William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery 著 丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠 訳, *NUMERICAL RECIPES in C*, 技術評論社 (1993), pp-216-217.
 - (12) 西谷章, 檜村俊也, “信頼性指標と2次モーメント法”, 日本建築学会 建築雑誌 Vol.114 (1999), pp.86-89.
 - (13) 今野浩, 山下浩, 非線形計画法, 日科技連出版社 (1978), pp.1-3, pp.127-165, pp.205-214, pp.217-220.
 - (14) 福田雅夫, 非線形最適化の理論, 朝倉書店 (1980), pp.56-61.
-