MEMS 構造要素における構造 - 流体 - 静電界連成 の階層的分解による有限要素解析*

石原 大輔^{*1}, 堀江 知義^{*1}, 二保 知也^{*1}, 馬場 昭好^{*2}

Finite Element Analysis Using Hierarchical Decomposition for Interaction of Structural, Fluidic and Electrostatic Fields in MEMS Structural Components

Daisuke ISHIHARA^{*1}, Tomoyoshi HORIE, Tomoya NIHO and Akiyoshi BABA

^{*1} Kyushu Institute of Technology, Department of Mechanical Information Science and Technology
680-4 Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-8502, Japan

In this study a finite element analysis using hierarchical decompositions for the interaction of structural, fluidic and electrostatic fields is applied for vibration analyses of a MEMS structural component. The interaction is partitioned into the electrostatic field and the fluid-structure interaction (FSI) using the block Gauss-Seidel method. The FSI is split into the pressure field and the other using a projection method, where the intermediate state variables are used for the splitting without generating computationally expensive Schur complement matrices. The developed finite element analysis is applied for a micro cantilever beam actuated by the step electrostatic force in vacuum and air. It was demonstrated from the comparisons among the numerical and experimental results that the proposed analyses provide the results consistent with the experimental results. It follows from the present results that the numerical analyses taking into account the interaction of the structural, fluidic and electrostatic fields are required for the accurate predictions of the vibration characteristics of the MEMS structural components.

Key Words : Finite Element Method, Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS), Interaction, Structure, Incompressible Stokes, Electrostatic Field, Decomposition, Partitioning, Splitting, Projection Method, Monolithic Method

1. 緒 言

典型的な MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems) の構造要素の寸法は, $1\mu\text{m}$ から 1mm までの範囲にある⁽¹⁾. この大きさにおいては, スケール効果により, 体積力よりも表面力が強く表れる. ゆえに MEMS 構造要素の典型的な駆動力は静電力⁽²⁾であり, 空気などの流体中で動作する場合⁽³⁾, 流体粘性力による強い減衰を受ける⁽⁴⁾. そして静電力と流体粘性力は構造の運動に依存する. ゆえに MEMS 構造要素と周囲の流れ場および静電場の連成 (構造 - 流体 - 静電界連成) が生じる. 本研究では, MEMS 構造要素の重要な設計パラメータである共振周波数や減衰率などの振動特性⁽⁵⁾が, 構造 - 流体 - 静電界連成の影響を強く受けることが示される.

従来の研究では, 構造 - 静電界連成解析^{(2), (21)-(24)}が多いが, 近年, 構造 - 流体 - 静電界連成解析⁽⁷⁾⁻⁽¹⁰⁾が注目されている. 一般に複雑な系は分解 (decomposition) して解くことが可能であり⁽⁶⁾, 構造 - 流体 - 静電界連成の計算モデルはいくつか考えられ, 系全体を一体にして解く研究⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾のほかに, 系全体を流体 - 構造連成と静電界に分離 (partitioning) し, 流体 - 構造連成を一体にして解く研究⁽¹⁰⁾がある. 本研究では, 解析自由度を低減するために, まず系全体をその構成要素の系である流体 - 構造連成と静電界に分離し, さらに流体 - 構造連成を圧力場と速度場に分割 (splitting) する計算モデルを提案する. この計算モデルにおいて, 互いに関連を持つ異なる階

* 原稿受付 2013 年 5 月 20 日

^{*1} 正員, 九州工業大学 (〒820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4)

^{*2} 九州工業大学

E-mail: ishihara@mse.kyutech.ac.jp

層毎に、性質の異なる分解を行っており、これを階層的分解と呼ぶ。このような階層的分解の計算モデルに基づき、構造 - 流体 - 静電界連成の有限要素解法を開発する。そして真空中と空気中で静電力により駆動されるマイクロ片持ち梁において、本解法による振動解析を行い、構造 - 流体 - 静電界連成を考慮することの必要性を示す。

2. 構造 - 流体 - 静電界連成系の方程式

2・1 支配方程式

流体粘性の卓越する MEMS の構造要素周りの流れ⁽⁴⁾に対し、スクイーズ膜近似⁽²⁹⁾よりも汎用的なストークス近似⁽⁵⁾⁽⁷⁾を用いる。ここで 3 次元解析の重要性⁽⁵⁾から、3 次元ストークス方程式を用い、流れの非圧縮性を仮定する⁽⁵⁾。同様に MEMS 構造要素を 3 次元弾性体とする。 Ω_t^s , Ω_t^f , Ω_t^e はそれぞれ時刻 t における弾性構造、流体、静電界の領域、 Γ_t^{fs} , Γ_t^{se} はそれぞれ t における構造 - 流体境界、構造 - 静電界境界を表す。ここで上付き添え字 s, f, e, fs, se はそれぞれ構造、流体、静電界、流体 - 構造連成、構造 - 静電界連成に関する量であることを表す。非圧縮性ストークス方程式は、

$$\rho^f \frac{\partial v_i^f}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ji}^f}{\partial x_j} + \rho^f g_i^f \quad \text{and} \quad \frac{\partial v_i^f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega_t^f \quad (1)$$

と表される。ここで ρ は質量密度、 v_i は速度ベクトルの第 i 成分、 σ_{ij} はコーシー応力テンソルの ij 成分、 g_i は体積力ベクトルの第 i 成分を表す。流体はニュートン流体を仮定する。希薄効果がそれほど顕著ではないので、壁面は滑り無し境界とする⁽¹¹⁾。移動境界を取り扱うために、ALE 法⁽³⁰⁾を用いるが、移流項が無いため、定式化上、それが陽に現れることはない。弾性構造の平衡方程式を次式に示す：

$$\rho^s \frac{d^2 u_i^s}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}^s}{\partial x_j} + \rho^s g_i^s \quad \text{in } \Omega_t^s \quad (2)$$

ここで u_i は変位ベクトルの第 i 成分を表す。ひずみは十分小さいものとし、線形弾性材料を仮定する。静電界の支配方程式を次式に示す⁽²⁾。静電ポテンシャル φ^e は、次のラプラス方程式を満たす：

$$\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{in } \Omega_t^e \quad (3)$$

静電界ベクトルの第 i 成分 E_i^e は、次式により与えられる。

$$E_i^e = -\frac{\partial \varphi^e}{\partial x_i} \quad (4)$$

導電体に作用する静電力の第 i 成分 τ_i^e は、次式により与えられる。

$$\tau_i^e = -\frac{\epsilon}{2} (E_j^e n_j)^2 n_i \quad (5)$$

ここで n_i は導電体表面の外向き法線ベクトルの第 i 成分を表す。次の幾何学的適合条件と平衡条件(境界面条件)が流体 - 構造境界面に課される：

$$v_i^s = v_i^f \quad \text{and} \quad \sigma_{ij}^s n_j + \sigma_{ij}^f n_j^f = \tau_{fs}^i \quad \text{on } \Gamma_t^{fs} \quad (6)$$

ここで n_i^s , n_i^f はそれぞれ構造, 流体に対する外向き法線ベクトルであり, 流体 - 構造境界面に作用する表面力 τ_i^{fs} は次式を満たす.

$$\tau_i^{sf} = \tau_i^e \text{ on } \Gamma_i^{fs} \quad (7)$$

2・2 有限要素方程式

式 (1), (2) を有限要素離散化する. ここで MEMS 構造要素は大変形する場合がある⁽¹²⁾⁽¹³⁾ので, 構造の定式化には total Lagrange 法を用いる. ここで有限変形するものの, 上述のように微小ひずみを仮定しているので, 第 2Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみの間に, フック則を適用する⁽³²⁾. 境界面条件 (6) を用いて, 流体と構造の有限要素式を 1 つにまとめると, 次の一体型方程式を得ることができる:

$$\mathbf{Q}^{fs} \equiv_L \mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{q}(\mathbf{u}) - \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{g} \text{ and } \tau \mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (8)$$

ここで $\mathbf{Q}^{fs}$ は構造と流体の全ての効果を含む内力ベクトルであり, 各行列・ベクトルは次のように定義される:

$$_L \mathbf{M} = \begin{bmatrix} _L \mathbf{M}^{f_{ii}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & _L \mathbf{M}^{fs_{cc}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & _L \mathbf{M}^{s_{ii}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{f_{ii}} & \mathbf{C}^{f_{ic}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{f_{ci}} & \mathbf{C}^{f_{cc}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^f_i \\ \mathbf{G}^f_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (9a-c)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^s_c(\mathbf{u}^s) \\ \mathbf{q}^s_i(\mathbf{u}^s) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^f_i \\ \mathbf{g}^{fs}_c \\ \mathbf{g}^s_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^f_i \\ \mathbf{a}^{fs}_c \\ \mathbf{a}^s_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^f_i \\ \mathbf{v}^{fs}_c \\ \mathbf{v}^s_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} * \\ \mathbf{u}^{fs}_c \\ \mathbf{u}^s_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^f, \quad (9d-i)$$

$$_L \mathbf{M}^{fs}_{cc} = _L \mathbf{M}^f_{cc} + _L \mathbf{M}^s_{cc} \quad (9j)$$

ここで行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ はそれぞれ質量, 拡散, 発散の行列, ベクトル $\mathbf{q}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$ はそれぞれ弾性内力, 外力, 加速度, 速度, 変位, 圧力のベクトル, 下付き添え字 i , c はそれぞれ流体 - 構造連成における非連成, 連成自由度, 下付き添え字 L は行列の対角集中化, 下付き添え字 τ は行列の転置を表す. 式 (7) を考慮することにより, 構造 - 流体 - 静電界連成の平衡方程式は, 次式のように与えられる:

$$\mathbf{Q}^{fs} = \mathbf{g}^e(\mathbf{u}^s) \quad (10)$$

ここで式 (10) の右辺は MEMS の構造要素に作用する静電力ベクトルを表す. この静電力は構造変位に関する関数であり, 次のように与える. 最初に, 式 (3) の有限要素式

$$\mathbf{L}^e \boldsymbol{\varphi}^e = \mathbf{0} \quad (11)$$

を解いて, 静電ポテンシャル $\boldsymbol{\varphi}^e$ を求める. ここで $\mathbf{L}^e$ はラプラシアン行列である. 次に式 (4) の有限要素式

$$_L \mathbf{M}^e \mathbf{E}^e = -\mathbf{G}^e \boldsymbol{\varphi}^e \quad (12)$$

を解いて, 静電界 $\mathbf{E}^e$ を求める. ここで行列 $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{G}^e$ は次式により与えられる:

$$(\mathbf{M}^e)_{ij} \equiv \sum_k \int_{V_k} N_i N_j dV, \quad (\mathbf{G}^e)_{ijk} \equiv \sum_l \int_{V_l} N_i N_{j,k} dV \quad (13)$$

ここで V_i は要素 i の体積, N_i は形状関数を表す. 式 (12) により $\mathbf{E}^e$ が求まると, 式 (5) から静電力の節点値が求まる. それを構造表面において面積分することにより, 式 (10) の右辺を求める. 構造が変形することで静電界の解析領域が変化し, その結果, 上の $\mathbf{L}^e$, $\mathbf{L}^e \mathbf{M}^e$, $\mathbf{G}^e$ が変化する.

3. 階層的分解を用いた連成解析方法

3・1 階層的分解の計算モデル

構造 - 流体 - 静電界連成を分解して解くために, 図 1 に示すように, それを流体 - 構造連成と静電界に分離し, さらに流体 - 構造連成を流速場と圧力場に分割するという計算モデルを用いる. この計算モデルでは, まず (1) 系全体のレベルで, それを構成する要素の系に分離し, 次に (2) 構想要素の系のレベルで, その状態量を分割するというように, 互いに関連するが異なる階層毎に, 性質の異なる分解を適用している. 本研究では, この計算モデルを階層的分解と呼ぶ. 流体 - 構造連成の分割による解析方法は, 非圧縮性流体のプロジェクトン解法⁽¹⁴⁾を応用したものである. 本研究では, 3.3 節で述べるように, 一体型解法と漸近的に等価な方程式を解くように定式化されるので, 数値不安定性の生じやすい流体 - 構造連成を頑健に解析できる. これ以外の計算モデルも可能であるが, 本計算モデルの利点は, 流体 - 構造連成を頑健に解析しつつ, 解析自由度を低減できることである. 系全体を一体に解く場合, 解析自由度の増大に加え, 流体 - 構造連成解析の分野で指摘されているように, 悪条件の方程式が生じる可能性がある⁽¹⁵⁾. 実際, 流体 - 構造連成解析の典型的なテスト問題⁽³³⁾において, 流体 - 構造連成を一体にして解くと, 時間刻み等の解析パラメータを様々変化したとき, 反復法ソルバーの収束性が悪化し, 計算が破綻する場合さえあった. 一方, 流体 - 構造連成を流速場と圧力場に分割して解くと, 反復法ソルバーの収束性が安定する⁽²⁷⁾⁽³⁴⁾. ゆえに, 本分解により, 流体と構造の速度, 流体の圧力, そして静電ポテンシャルについて, 個別に計算することで, 解析自由度が低減されるとともに, 方程式の悪条件の問題が回避でき, 計算効率の向上が期待できる. 以下ではこの計算モデルに従い, 定式化を行う.

3・2 流体 - 構造連成と静電界の分離

ブロックガウス - ザイデル法⁽¹⁵⁾により, 構造 - 流体 - 静電界連成を静電界と流体 - 構造連成に次のように分離する. 現時刻 $t+\Delta t$ における平衡方程式 (10) に対する次の定点反復により, 静電界と流体 - 構造連成を分離する:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{\text{fs}(k)} = \mathbf{g}^e({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{\text{s}(k-1)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

すなわち式 (14) において, まず既知の構造変位 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{\text{s}(k-1)}$ に基づき, 式 (11), (12) により静電界を解いて, 静電力 $\mathbf{g}^e$ を求め, 次に式 (8), (14) から与えられる次の流体 - 構造連成の方程式を解く:

$$\mathbf{L} \mathbf{M}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^{(k)} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} + \mathbf{q}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{g}^e({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)}), \quad (15a)$$

$$\mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (15b)$$

平衡方程式 (15a) は非線形方程式なので, 次の加速度増分 $\Delta \mathbf{a}$ と圧力増分 $\Delta \mathbf{p}$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{a}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{(k-1)} + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{a}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + \beta \Delta t^2 \Delta \mathbf{a}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{p} \quad (16a-d)$$

を用いて, 次のように線形化する:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^{*(k-1)} \Delta \mathbf{a} - \mathbf{G} \Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{g} \quad (17)$$

ここで式 (16) において, ニューマーク β 法に基づき, 加速度増分とその他の増分間の関係を与えた. また式 (17) における $\mathbf{M}^*$ は一般化質量行列であり, 次のように定義される:

$$\mathbf{M}^* \equiv_{\mathbf{L}} \mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \quad (18)$$

ここで $\mathbf{K}$ は $\mathbf{q}^s$ のヤコビ行列である構造接線行列 $\mathbf{K}^s$ を用いて次のように定義される：

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{cc}^s & \mathbf{K}_{ci}^s \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ic}^s & \mathbf{K}_{ii}^s \end{bmatrix} \quad (19)$$

また $\Delta \mathbf{g}$ は残差力であり、次のように定義される：

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}^e(t+\Delta t, \mathbf{u}^{(k-1)}) - \{_{\mathbf{L}} \mathbf{M}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^{(k-1)} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{q}(t+\Delta t, \mathbf{u}^{(k-1)}) - \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(k-1)}\} \quad (20)$$

3・3 流体 - 構造連成の分割

近年、非圧縮性流体のプロジェクトン解法⁽¹⁴⁾における分割が流体 - 構造連成に応用されてきている^{(16), (25)-(28), (34)}。本研究では、中間流速場による分割⁽¹⁶⁾を用いる。この分割は、構造が弾性体の場合に適用されると、他の方法と異なり、計算コストの高いシュアーコンプリメント行列⁽³¹⁾が生じないという特徴を持つ。本研究では、圧力ポアソン方程式 (Pressure Poisson Equation; PPE) が非圧縮性条件と漸近的に一致するように定式化する。式 (15a) と異なり、既知の圧力に対し、中間状態変数 ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{a}}^{(k)}$, ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)}$ および ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(k)}$ が平衡方程式を満たすとする：

$$_{\mathbf{L}} \mathbf{M}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{a}}^{(k)} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)} + \mathbf{q}(t+\Delta t, \hat{\mathbf{u}}^{(k)}) - \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{g} \quad (21)$$

式 (15a) と同様に、これを線形化すると次式を得る：

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{M}^{*(k-1)} \Delta \hat{\mathbf{a}} = \Delta \mathbf{g} \quad (22)$$

ここで $\Delta \hat{\mathbf{a}}$ は中間加速度の増分である。式 (17) と (22) の差を、式 (16b) とそれに類似の

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k-1)} + \gamma \Delta t \Delta \hat{\mathbf{a}} \quad (23)$$

を用いて次のように変形する：

$$\gamma \Delta t \mathbf{G} \Delta \mathbf{p} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{M}^{*(k-1)} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)}) \quad (24)$$

この両辺に左から ${}_{\tau} \mathbf{G}_{\mathbf{L}} \mathbf{M}^{-1}$ を乗じ、式 (18) を使うと次式を得る：

$$\gamma \Delta t {}_{\tau} \mathbf{G}_{\mathbf{L}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \Delta \mathbf{p} = {}_{\tau} \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} - {}_{\tau} \mathbf{G}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)} + {}_{\tau} \mathbf{G}_{\mathbf{L}} \mathbf{M}^{-1} (\gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) ({}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)}) \quad (25)$$

反復計算において、次の PPE を解くことにより、非圧縮性条件 (15b) が漸近的に満足される：

$$\gamma \Delta t {}_{\tau} \mathbf{G}_{\mathbf{L}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \Delta \mathbf{p} = - {}_{\tau} \mathbf{G}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)} \quad (26)$$

上の PPE (26) を解くとき、式 (25) は次式となる：

$${}_{\tau} \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} + {}_{\tau} \mathbf{G}_{\mathbf{L}} \mathbf{M}^{-1} (\gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) ({}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)}) = \mathbf{0} \quad (27)$$

Fig. 1 Hierarchical decompositions for the interaction of structural, fluidic and electrostatic fields.

Fig. 2 Flow of the computations of the proposed method.

ゆえに反復計算において、中間速度と速度が漸近的に一致するとき、式 (27) から、非圧縮性条件 (15b) が漸近的に満足されることが判る。

定点反復 (14) の現反復 k における流体 - 構造連成の解析手順は、次のようにまとめられる：

Step1 : 式 (22) を解いて中間加速度 $\Delta \hat{\mathbf{a}}$ を求め、式 (23) により、中間速度 ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{v}}^{(k)}$ を求める。

Step2 : 式 (26) を解いて圧力増分 $\Delta \mathbf{p}$ を求める。

Step3 : 式 (17) を解いて加速度増分 $\Delta \mathbf{a}$ を求め、式 (16) により加速度 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^{(k)}$ 、速度 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)}$ 、変位 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(k)}$ を求める。

予測子 - 多重修正子法 (predictor-multicorrector algorithm ; PMA) ⁽¹⁷⁾ を用いて、時間進行させる。ここで反復計算ループが PMA の多重修正ループと対応し、式 (16) が PMA の修正子と対応する。そして PMA の予測子をニューマーク β 法を用いて次のように与える：

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{0}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(0)} = {}^t \mathbf{v} + \Delta t (1-\gamma) {}^t \mathbf{a}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(0)} = {}^t \mathbf{u} + \Delta t {}^t \mathbf{v} + \Delta t^2 (1/2-\beta) {}^t \mathbf{a} \text{ and } {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(0)} = {}^t \mathbf{p} \quad (28a, b, c, d)$$

以上の構造 - 流体 - 静電界連成解法の計算手順を図 2 に示す。なお本研究では、図 2 の反復計算 k の反復回数 N を固定したが、4 章の問題の範囲では、解析結果の状態量が収束する (マイクロ片持ちりの面外方向変位の差異が 0.1% 以下) のに、 $N=5$ で十分であった。また流体 - 構造連成解析に関して、それを流速場と圧力場に分割して解く場合と一体にして解く場合で、計算結果が数値誤差の範囲で一致することを、流体 - 構造連成解析の典型的なテスト問題⁽³³⁾で確認している。

4. MEMS 構造要素の連成解析

4・1 静電力により駆動されるマイクロ片持ち梁

静電力によって駆動されるマイクロ片持ち梁の問題を図 3 に示す。SOI ウェハ (上下層：導電性の単結晶シリコン (Si)，上層厚さ $5\mu\text{m}$ ，下層厚さ $355\mu\text{m}$ ，中間層：絶縁性の酸化シリコン (SiO_2)，厚さ $5\mu\text{m}$) のチップにおいて、DRIE を用いて上層に梁を作成し、ウェットエッチングを用いて、梁周辺の中間層を取り除く。図 4 にマスクレイアウト、図 5 に作成した梁を示す。本研究で解析対象とする梁の寸法は、長さ $L=1000\mu\text{m}$ ，幅 $W=36\mu\text{m}$ ，板厚 $H=3.0\mu\text{m}$ ，梁の底面と基部の間の距離 (ギャップ長) $G=5.0\mu\text{m}$ である。ここで面内寸法 L, W は金属反射顕微鏡，面外寸法 H, G は走査型電子顕微鏡による画像を用いて同定した。

直流電源装置を用いて、図 6 のようなステップ状の供給電圧 V_g (収束値 $\bar{V}_g$) を上下 Si 層に印可する。梁がプルインしないように、 $\bar{V}_g$ の上限値を真空中で 3.5V ，空気中で 5.0V とする。同図に示すように、 V_g の立ち上がり時間 T_r は約 $50\mu\text{sec}$ であり、梁の固有周期約 $200\mu\text{sec}$ と同程度であるため、梁の振動はその影響を受ける。ゆえに V_g を実測し、計算に用いる。接触抵抗を低減するため、金電極を用いて、 V_g を図 4 の点 A, B 付近に印可する。

V_g により梁と下層の間に電位差 V_g が生じ、静電力が梁に作用して、梁が自由振動する。梁の振動として 1 次モードのたわみ振動を仮定して、梁自由端の面外方向速度 v_{tip} をレーザードップラー振動計 (スポット径 $3\mu\text{m}$ ，速

度分解能 $0.05\mu\text{m}/\text{sec}$) により測定する. V_s と v_{tip} をサンプリング速度 500 kHz で同時に収集する. このサンプリング速度は梁の固有振動数よりも十分大きい. 総サンプル数は $66,000$ 点とする. 空気中と真空中 (2Pa 以下) で実験を行う. 同一の条件で 3 回測定する. 各測定間の時間間隔は, 梁が減衰により静止するのに十分な時間とする.

4・2 ヤング率の同定

一般にスケール効果により, MEMS 構造要素の物性値はバルク材と異なる. 梁の厚さが $1\mu\text{m}$ よりも大きい場合, 構造質量密度 ρ^s はバルク材と同程度と考えられ, $\rho^s = 2.33 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ とした. 本研究の梁と同程度の大きさの Si 薄膜構造において, ポアソン比 ν^s は小さく⁽¹⁸⁾, 解析への影響が非常に小さいので, $\nu^s = 0$ とした. 本研究の梁と同程度の大きさの Si 薄膜構造において, ヤング率 E^s は寸法などへの依存性が強い⁽¹⁹⁾. そこで次のようにして E^s を算出した; 真空中 (2Pa 以下) 中で, 梁に電圧を印可してたわませ, 十分時間が経過したのち, 電圧を 0 にした. その後, 梁は自由振動し, そのときの v_{tip} を測定した. この実験結果から梁の固有振動数 (固有周期) は $4,320\text{Hz}$ ($231\mu\text{sec}$) と求まった. これを Euler-Bernoulli 梁の固有振動数の理論解に代入する:

$$f_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1.875}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E^s I}{\rho^s W H}} \quad (29)$$

ここで I は断面 2 次モーメントを表す. この式から E^s を算出したところ, 185GPa であった. これは過去の研究⁽¹⁹⁾ と同程度であり妥当と考えられる. 空気 (大気圧, 26°C) の物性値は, 質量密度 $\rho^f = 1.18\text{ kg/m}^3$, 粘性係数 $\mu^f = 1.82 \times 10^{-5}\text{ kg/(msec)}$ とした. また空気と真空の誘電率 ε をそれぞれ $8.859 \times 10^{-12}\text{ F/m}$ と $8.854 \times 10^{-12}\text{ F/m}$ とした.

Fig. 3 The schematic view of the problem setup.

Fig. 4 Mask layout.

Fig. 5 An example of SEM images of the micro cantilever beam.

Fig. 6 Time histories of the maximum supplied voltages in air.

4・3 チップ内の電気回路による電圧降下

上下の Si 層は、それらの間の SiO₂ 層により、絶縁されていることが期待されるが、ほこりの付着などにより、通電が起こりうる。実際、図 4 の AB 間の抵抗 R_s の抵抗値は $1.3 \times 10^3 \Omega$ であった。ここでチップ内の電気回路を単純化して次の等価電気回路を考える； R_g を上下層間の抵抗、 R_{si} を上層内の抵抗とし、 $R_g + R_{si} = R_s$ の関係が成り立つとする。ここで電極の接触抵抗は微小であり、また下層は上層に比べて十分厚く、その抵抗は十分小さいので、それらの抵抗を無視している。このとき V_s は R_s における電位差、 V_g は R_g における電位差である。

R_{si} の抵抗値は上層を流れる電流の経路に依存する。そこで図 4 に示すように、最短の場合として点 A、C 間を結ぶ電流経路、最長の場合として点 A、D 間を結ぶ電流経路を考える。そして電流経路の断面積 S_e を各経路に垂直な上層の断面積とする。このとき R_{si} の抵抗値の最小は約 20Ω （電流経路 AC の場合；経路長 $L_e \doteq 2 \times 10^{-3} \text{ m}$, $S_e \doteq 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2$ ）、最大は約 500Ω （電流経路 AD の場合； $L_e \doteq 2 \times 10^{-2} \text{ m}$, $S_e \doteq 4 \times 10^{-9} \text{ m}^2$ ）となる。但し、Si 層の抵抗率 ρ_e を $1 \times 10^{-4} \Omega \text{ m}$ とした。 R_g と R_{si} による V_s の分圧により、 V_g は V_s の 62% から 98% の範囲にある。この割合を電圧低下率 γ_{vr} と定義する。静電力は V_g の 2 乗に比例するので、この電圧低下による静電力低下は無視できない。

実際の R_g と R_{si} の測定は困難であるため、本研究では次のようにして γ_{vr} を算出した。真空中の梁の振動実験において、静電界との連成が生じないときの振動速度振幅を U_{exp} とする。ここで固有周期に対する振動周期の違いが 1% 未満のとき、静電界との連成が生じていないと判断する。この場合、構造解析のみで振動解析が可能であるはずである。そこで $V_g = V_s$ 、初期のギャップ長 G に対する静電力を梁に作用させて有限要素解析を行ったときの振動速度振幅を U_{num} とする。ここで静電力と構造の有限要素解析の設定は 4.4 節に従う。もし電圧降下が無い ($\gamma_{vr} = 1$) ならば、 U_{num} は U_{exp} とよく一致すると考えられるが、実際には電圧降下により、それらは一致しない。この差を利用して、次式により γ_{vr} を算出する：

$$\gamma_{vr} \equiv V_g / V_s \doteq \sqrt{U_{exp} / U_{num}} \quad (30)$$

様々な $\bar{V}_s$ による真空中での梁のステップ励振の実験から得た振動周期を表 1 に示す。同表から、固有周期と振動周期の違いが 1% 未満なのは、 $\bar{V}_s = 1.0 \text{ V}$ の場合である。ゆえに $\bar{V}_s = 1.0 \text{ V}$ の場合の振動振幅から γ_{vr} を評価する。 v_{tip} の時刻歴を図 7 に示す。同図から $U_{exp} = 0.000789 \text{ m/sec}$, $U_{num} = 0.00118 \text{ m/sec}$ なので、式 (30) より $\gamma_{vr} = 0.82$ となった。この値は γ_{vr} の理論値の範囲 $0.62 \sim 0.98$ 内にあり、妥当である。そこで以降の全ての解析において、この γ_{vr} を用いる。前節と本節から、MEMS 構造要素の解析における特有の問題として、問題設定上の不確実性があり、定量的解析のためには、その合理的な同定方法を工夫する必要があることが判る。

4・4 有限要素解析の設定

解析領域全体の模式図を図 8 に示す。流体領域寸法は、 x , y 方向 $23 \mu\text{m}$, z 方向 $1023 \mu\text{m}$ である。まず xy 面内流体領域中で、マイクロ片持ちはり断面の強制振動の移動境界流れ解析を行い、これ以上、領域を広くしても断面に作用する流体力が変化しないことを確認し、次に 3 次元流体領域中で、マイクロ片持ちはりの自由振動の流体 - 構造連成解析を行い、これ以上、 z 方向を長くしてもマイクロ片持ちはりの変位が変化しないことを確認した。構造、流体、静電界の各領域の yz 面において、対称条件を課す。それ以外の境界条件は次の通りである；構造領域に対して、 $z = 0$ の面に完全固定の境界条件、流体領域に対して、底面に滑り無しの境界条件、それ以外の面に表面力 0 の境界条件、静電界領域に対して、下面に 0 V 、上面に $V_g [\text{V}]$ を課す。ここで図 6 のような V_s の計測値に、4.3 節で導出した電圧低下率 $\gamma_{vr} = 0.82$ を乗じることにより V_g を得る。有限要素メッシュは次の通りである；構造領域のメッシュは、6 面体 2 次要素 (20 節点要素) を用いて、661 節点、240 要素、流体領域のメッシュは、4 面体 1 次要素 (p1p1 要素⁽²⁰⁾) を用いて、5,916 節点、26,698 要素、静電界領域のメッシュは、4 面体 1 次要素を用いて、195 節点、480 要素とする。要素分割は、構造領域： x 方向 12 等分割、 y 方向 2 等分割、 z 方向 4 等分割、流体領域： x 方向 31 等分割、 y 方向 31 等分割、 z 方向 9 等分割、静電界領域： x 方向 12 等分割、 y 方向 2 等分割、 z 方向 4 等分割である。時間刻み $\Delta t = 1 \mu\text{sec}$ 、総解析時間 $T_{all} = 1 \text{ msec}$ とする。

4・5 構造 - 静電界連成解析

真空中で静電力によりステップ駆動される梁に生じる構造 - 静電界連成を考える. 供給電圧 $\bar{V}_g = 3.5\text{V}$ を印可したときの自由端 y 方向変位の時刻歴を図 9 (a), $\bar{V}_g$ と振動周期の関係を同図 (b), $\bar{V}_g$ と振動振幅の関係を同図 (c) に示す. 同図 (a) に示すように, 構造解析よりも構造 - 静電界連成解析の方が, 振幅, 周期ともに大きい. この現象は次のように説明できる; バネ支持された質点が静電力で駆動されるとすると, その運動方程式は,

$$ma + ku = f(u), \quad f(u) = -(\varepsilon W / 2G^2)(1 + u/G)^{-2} V_g^2 \quad (31a, b)$$

となる. ここで m と k はそれぞれ質点の質量とバネ定数, f は静電力, a と u はそれぞれ質点の加速度と変位を表す. 式 (31b) を u/G に関してテイラー展開し, 2 次以上の項を無視すると, 式 (31a) は次式となる:

$$ma + (k + k^e)u = f(0), \quad k^e = -(\varepsilon W / G^3) V_g^2 \quad (32a, b)$$

この式において, 静電界からの連成効果は, 印可電圧 V_g の 2 乗に比例する負の付加剛性として表われている. すなわち静電界からの連成効果は, 構造の見た目の剛性低下として理解できる. 実際, 図 9 (b), (c) に示すように, 供給電圧が大きいほど, 構造解析と構造 - 静電界連成解析による振動周期と振動振幅の違いが大きくなる. 以上から, 真空中で静電力により駆動される MEMS 構造要素の振動解析において, 構造 - 静電界連成を考慮しないと, 振動現象の特性を正しく評価できないことが判る.

Fig. 7 Time histories of tip velocities for $\bar{V}_g = 1.0\text{ V}$. Black line indicates a numerical result, and gray lines indicate experimental results. In the experimental results, digital high (20kHz) and low (100Hz) pass filters were used to remove the noise.

Fig. 8 Schematic view of the whole analysis domain, where the symmetry with respect to the y - z plane was taken into account.

Table 1 Vibration periods in vacuum for various supplied voltages.

Supplied voltage $\bar{V}_g$ [V]	0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
Vibration period [μsec]	231	233	234	236	238	242	246
Relative difference against the natural period [%]	NA	0.9	1.3	2.2	3.0	4.8	6.5

(a) time histories of the tip velocities ($\bar{V}_g = 3.5\text{ V}$, black: coupled, narrow black: uncoupled, gray: experiment)

(b) relation between $\bar{V}_g$ and the period (black: coupled, white: uncoupled, gray: experiment)

(c) relation between $\bar{V}_g$ and the amplitude (black: coupled, white: uncoupled, gray: experiment)

Fig. 9 The numerical and experimental results in vacuum.

4・6 構造 - 流体 - 静電界連成解析

空气中で静電力によりステップ駆動される梁に生じる構造 - 流体 - 静電界連成現象を考える. 供給電圧 $\bar{V}_s = 3.0, 4.0, 5.0\text{V}$ に対する自由端 y 方向の速度と変位の時刻歴を図 10 に示す. 図 9 (a) と同図 (a), (c), (e) を比較すると, 空気からの減衰効果が顕著であることが判る. 同図 (a), (c), (e) に示すように, 実験結果と構造 - 流体 - 静電界連成解析結果がよく一致している. 同図において, 構造 - 流体連成解析の場合, 振動周期は固有周期と一致して一定である. それに対して, 構造 - 流体 - 静電界連成解析の場合, 電圧が大きくなると, 振動周期が大きくなる. この現象は, 4・5 節と同様に, 静電界からの連成効果である負の付加剛性により説明できる. また構造 - 流体連成解析による振動振幅よりも構造 - 流体 - 静電界連成解析による振動振幅の方が大きくなる現象も, 静電界からの連成効果である負の付加剛性により説明できる.

図 10 (a), (c), (e), あるいは図 10 (b), (d), (f) を比較すると, 電圧の増加に伴い, 構造 - 流体 - 静電界連成の場合, 減衰振動が不足減衰から過減衰に変化したのに対し, 構造 - 流体連成の場合, そのような変化が生じなかった. すきま流れの理論から, 梁底面と基部との距離が小さくなると急激に減衰が大きくなる. ここで図 10 (b), (d), (f) に示すように, $\bar{V}_s = 5.0\text{V}$ の場合, 構造 - 流体 - 静電界連成解析の変位平衡点の大きさ ($1.36\mu\text{m}$) は, 構造 - 流体連成解析の変位平衡点の大きさ ($0.899\mu\text{m}$) よりも約 1.5 倍大きい. この違いにより, 構造 - 流体 - 静電界連成解析における減衰が構造 - 流体連成解析よりも大きくなったため, 振動特性に違いが生じた.

Fig. 10 Time histories of the tip velocities and displacements in air. The red lines indicate the results from the interaction analyses of the structural, fluidic and electrostatic fields, the blue narrow lines indicate the results from the interaction analyses of the structural and fluidic fields, while the grey lines indicate the experimental results.

5. 結 言

本研究では、構造 - 流体 - 静電界連成を、流体 - 構造連成と静電界に分離し、さらに流体 - 構造連成を圧力場と速度場に分割する階層的分解に基づき、構造 - 流体 - 静電界連成の有限要素解法を開発した。この解法は、解析自由度を低減しつつ、数値的不安定性の生じやすい流体 - 構造連成を頑健に解析することを狙ったものである。空気中で静電力により駆動されるマイクロ片持ち梁の振動において、提案解法を用いて、実験結果とよく一致する連成解析が可能であることが示された。ここで定量的解析のためには、MEMS 構造要素特有の不確定性を合理的方法により同定する必要があることを示した。提案解法による解析結果から、流体および静電界との連成効果により、MEMS 構造要素の振動特性が大きく変化することが示された。従って、MEMS 構造要素の振動特性を正確に評価するためには、構造 - 流体 - 静電界連成を考慮した解析が必要である。

謝 辞

本研究は、JSPS 科研費 23560263 と JSPS 科研費 23760078 の助成を受けたものである。

文 献

- (1) Gad-el-Hak, M., "The fluid mechanics of microdevices – The Freeman scholar lecture", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 121, (1999), pp. 5-33.
- (2) Shi, F., Ramesh, P., Mukherjee, S., "Dynamic analysis of micro-electro-mechanical systems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, (1996), pp. 4119-4139.
- (3) Mihara, T., Ikehara, T., Konno, M., Murakami, S., Maeda, R., Fukawa, T., Kimura, M., "Design, fabrication, and evaluation of highly sensitive compact chemical sensor system employing a micro cantilever array and a preconcentrator", *Sensors and Materials*, Vol. 23, (2011), pp. 397-417.
- (4) Cho, Y.H., Pisano, A.P., Howe, R.T., "Viscous damping model for laterally oscillating microstructures", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 3, (1994), pp.81-87.
- (5) Ye, W., Wang, X., Hemmert, W., Freeman, D., White, J., "Air damping in laterally oscillating microresonators: a numerical and experimental study", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 12, No. 5 (2003), pp. 557-566.
- (6) Felippa, C.A., Park, K.C., Farhat, C., "Partitioned analysis of coupled mechanical systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, (2001), pp. 3247-3270.
- (7) De, S.K., Aluru, N.R., "Coupling of hierarchical fluid models with electrostatic and mechanical models for the dynamic analysis of MEMS", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, (2006), pp. 1705-1719.
- (8) Rochus, V., Gutschmidt, S., Cardona, A., Geuzaine, C., "Electro-mechano-fluidic modeling of Microsystems using finite elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 48, No. 2 (2012), pp. 355-358.
- (9) Ghosh, R., Mukherjee, S., "Fully Lagrangian modeling of dynamics of MEMS with thin beams – part 2: damped vibrations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 76, (2009), 051008-1.
- (10) Kotera, H., "A Study on Coupled Analysis", *Journal of the Japan Society for Simulation Technology*, Vol. 18, No.1 (1999), pp. 58-64.
- (11) Beskok, A., Karniadakis, G.E., Trimmer, W., "Rarefaction and compressibility effects in gas microflows", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 118, No. 3 (1996), pp. 448-456.
- (12) Li, G., Aluru, N.R., "Linear, nonlinear and mixed-regime analysis of electrostatic MEMS", *Sensors and Actuators A*, Vol. 91, (2001), pp. 278-291.
- (13) Hu, Y.J., Yang, J., Kitipornchai, "Pull-in analysis of electrostatically actuated curved micro-beams with large deformation", *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, (2010), 065030 (9 pages).
- (14) Guermond, J.L., Mineev, P., Shen, J., "An overview of projection methods for incompressible flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, (2006), pp. 6011-6045.

- (15) Rugonyi, S., Bathe, K.J., "On finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions", *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 2, (2001), pp. 195-212.
- (16) Matsumoto, J., Kawahara, M., "Shape identification for fluid-structure interaction problem using improved bubble element", *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 15, (2001), pp. 33-45.
- (17) Zhang, Q., Hisada, T., "Analysis of fluid-structure interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE finite element methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, (2001), pp. 6341-6357.
- (18) Namazu, T., Tanaka, M., Inoue, S., "A simple determination method of in-plane Poisson's ratio for MEMS materials by means of on-chip pure bending test", *Proceedings of 20th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, (2007), pp. 235-238.
- (19) Sato, K., Yoshida, T., Ando, T., Shikida, M., Kawabata, T., "Tensile testing of silicon film having different crystallographic orientations carried out on a silicon chip", *Sensors and Actuators A*, Vol. 70, (1998), pp. 148-152.
- (20) Tedzduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E., Shih, R., "Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, (1992), pp. 221-242.
- (21) Rochus, V., Rixen, D.J., Golinval, J.-C., "Electrostatic coupling of MEMS structures: transient simulations and dynamic pull-in", *Nonlinear Analysis*, Vol. 63, (2005), pp. e1619-e1633.
- (22) Rochus, V., Rixen, D.J., Golinval, J.-C., "Monolithic modeling of electro-mechanical coupling in micro-structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65, (2006), pp. 461-493.
- (23) Ghosh, R., Mukherjee, S., "Fully Lagrangian modeling of dynamics of MEMS with thin beams – part 1: undamped vibrations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 76, (2009), 051007-1.
- (24) De, S.K., Aluru, N.R., "Full-Lagrangian schemes for dynamic analysis of electrostatic MEMS", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, (2004), pp. 737-758.
- (25) Fernandez, M.A., Gerbeau, J.-F., Grandmont, C., "A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2007), Vol. 69, pp. 794-821.
- (26) Badia, S., Quaini, A., Quarteroni, A., "Splitting methods based on algebraic factorization for fluid-structure interaction", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 30, No. 4 (2008), pp. 1778-1805.
- (27) Ishihara, D., Yoshimura, S., "A monolithic approach for interaction of incompressible viscous fluid and an elastic body based on fluid pressure Poisson equation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, (2005), pp. 167-203.
- (28) Idelsohn, S.R., Del Pin, F., Rossi, R., Onate, E., "Fluid-structure interaction problems with strong added-mass effect", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 80, (2009), pp. 1261-1294.
- (29) Lee, J.W., Tung, R., Raman, A., Sumali, H., Sullivan, J.P., "Squeeze-film damping of flexible microcantilevers at low ambient pressures: theory and experiment", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 19, (2009), 105029 (14 pages).
- (30) Hughes, T.J.R., Liu W.K., Zimmerman T.K., "Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29 (1981), pp. 329-349.
- (31) Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, (2003), Society for Industrial and Applied Mathematics.
- (32) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, (1995), 丸善.
- (33) Neumann, M., Tiyyagura, S.R., Wall, W.A., Ramm, E., "Robustness and efficiency aspects for computational fluid structure interaction", *Computational Science and High Performance Computing II*, Vol. 91 (2006), pp.99-114.
- (34) Ishihara, D., Kanei, S., Yoshimura, S., Horie, T., "Efficient parallel analysis of shell-fluid interaction problem by using monolithic method based on consistent pressure Poisson equation", *Journal of Computational Science and Technology*, Vol. 2, (2008), pp. 185-196.