Stroh 形式を用いた異方性圧電-等方性接合体のグリーン関数*

古口 日出男^{*1}

Green's Function for Piezo Anisotropic-Isotropic Bimaterials Using Stroh's Formalism

Hideo KOGUCHI^{*1}^{*1} Nagaoka Univ of Technology
Kamitomioka 1603-1, Nagaoka, Niigata, 940-2188 Japan

In the present paper, three-dimensional Green's functions due to a point in piezo anisotropic-isotropic elastic bimaterials are derived by using Stroh's formalism and two-dimensional Fourier transforms. Green's functions for piezo-piezo anisotropic materials were derived until now, however, the functions cannot be applied to the analysis for piezo anisotropic-isotropic bimaterials, because the boundary condition at the interface of piezo-piezo anisotropic bimaterials cannot be satisfied with the boundary conditions for insulator and conductor. In the present paper, a general expression of Green's function for piezo anisotropic-isotropic bimaterials is firstly derived, and a specified Green's function for piezo transversely isotropic -isotropic materials is secondly derived in a closed form. Numerical example is given to demonstrate the validity of the present formulation of three-dimensional point-force Green's functions.

Key Words : Elasticity, Anisotropy, Interface, Bimaterials, Stroh's Formalism

1. 緒 言

圧電材料はセンサー, アクチュエータ, トランスデューサとして超音波顕微鏡, プローブ顕微鏡, 微細加工機などに使われている. 圧電材料を用いる場合, 圧電材料を固定するため他の材料と接合・締結する必要がある. 本研究では, 圧電材料を絶縁体の接着剤あるいは導電体のハンダなどで接合する場合を考える. 筆者は, これまで二次元・三次元接合体の研究を行い, 接合体界面端に発生する特異応力場の特性を明らかにしてきた. その際, 界面上の応力を高精度に求めるために, 接合体の解を基本解とする境界要素法を用いてきた. 無限等方性弾性体の基本解すなわちグリーン関数として Kelvin の解を用いるのが普通である. 一方, 等方性接合体の解析に用いることができる三次元 2 相体の基本解としては Rongved の解がある⁽¹⁾. また, 異方性弾性体の基本解として, Pan と Chou の誘導した無限横等方性弾性体の解⁽²⁾および二相横等性体の解⁽³⁾がある. また, Pan と Yuan らは 2000 年に三次元二相異方性弾性体のグリーン関数を導出した⁽⁴⁾. Yuan ら⁽⁵⁾は 2003 年に異方性積層体のグリーン関数を導いた. 2010 年には古口⁽⁶⁾は Stroh 形式で表されたグリーン関数を等方性弾性体に拡張する方法を示した. また, 古口は 2011 年には異方性-異方性弾性体および異方性-等方性弾性体の三次元および二次元のグリーン関数を導いた⁽⁷⁾. 一方, 横等方性圧電材料の無限体の基本解は Wang らにより導かれている⁽⁸⁾. Ding は 1997 年に二相横等方性圧電体のグリーン関数を導いた⁽⁹⁾. また, Pan は 2002 年に圧電圧磁の無限異方性体, 二相体, 半無限体の三次元グリーン関数を Stroh 形式で求めた⁽¹⁰⁾. これまで導かれた二相圧電体のグリーン関数では, 二つの材料が共に圧電材料である必要がある. ところで, 圧電材料を実際に用いる場合, 非圧電材の等方弾性体あるいは異方性材に接合することが多くある. その場合, 等方性材の電気的特性として, 導体あるいは誘電体 (絶縁材料) の二つを考えることができる. これまでの二相圧電体のグリーン関数は一つの材料を近似的に等方性材とすることがで

* 原稿受付 2013 年 6 月 7 日

^{*1} 正員, フェロー, 長岡技術科学大学 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)
E-mail: koguchi@mech.nagaokaut.ac.jp

きるが、その場合界面の電氣的境界条件は誘電体か導体に対応するものであるか明確でない。したがって、異方性圧電体-異方性体あるいは異方性圧電体-等方性体のグリーン関数で、さらに異方性体あるいは等方性体が導体あるいは誘電体である場合の解を導くことが、圧電接合体の応力解析に必要であると考えられる。

本論文では、Stroh 形式を用いて異方性圧電体-等方性体（導体および誘電体）の接合体の三次元グリーン関数を導出する。論文の構成は、第2章で圧電体に対する Stroh 形式について説明し、第3章で異方性圧電体-等方性体の接合体に関する三次元グリーン関数について説明する。第4章では第3章で導いたグリーン関数から横等方性圧電体-等方性体の接合体の三次元グリーン関数を閉形で導出する。つぎに第5章で数値解析例を示し、結言で論文全体をまとめる。

2. Stroh 形式による 3 次元異方性圧電弾性体の基礎式

圧電材料の構成方程式は次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijsk} \varepsilon_{sk} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \kappa_{ij} E_j\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力、 D_i は電気変位、 ε_{sk} はひずみ、 C_{ijsk} は弾性定数テンソル、 e_{kij} は圧電定数、 E_k は電場、 κ_{ij} は誘電率である。

物体力および電荷が無い場合、圧電材料の平衡方程式は次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0 \\ D_{j,j} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

また、電場 E_k は電気ポテンシャル ϕ から $E_k = -\partial\phi/\partial x_k = -\phi_{,k}$ のように求められる。さらにひずみを変位 u_i で表し、式(1)に代入すると

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= C_{ijsk} u_{s,kj} + e_{kij} \phi_{,kj} \\ D_{j,j} &= e_{jsk} u_{s,kj} - \kappa_{jk} \phi_{,kj}\end{aligned}\quad (3)$$

が得られる。ここで、各添字は 1 から 3 をとる。また、添字の“, ” は微分を表している。つぎに、 (x_1, x_2) 平面に関する 2 次元フーリエ変換の定義式を示す。

$$\tilde{f}(\eta_1, \eta_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) e^{i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (4)$$

式(3)を 2 次元 Fourier 変換すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}(C_{ias\beta} \tilde{u}_s + e_{ai\beta} \tilde{\phi}) \eta_\alpha \eta_\beta + i \eta_\alpha \{ (C_{i3s\alpha} + C_{i\alpha s3}) \tilde{u}_{s,3} + (e_{ai3} + e_{3i\alpha}) \tilde{\phi}_{,3} \} - C_{i3s3} \tilde{u}_{s,33} - e_{3i3} \tilde{\phi}_{,33} &= 0 \\ (e_{\alpha s\beta} \tilde{u}_s - \kappa_{\alpha\beta} \tilde{\phi}) \eta_\alpha \eta_\beta + i \eta_\alpha \{ (e_{3s\alpha} + e_{\alpha s3}) \tilde{u}_{s,3} - (\kappa_{\alpha 3} + \kappa_{3\alpha}) \tilde{\phi}_{,3} \} - e_{3s3} \tilde{u}_{s,33} + \kappa_{33} \tilde{\phi}_{,33} &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

ここで、 $\eta_1 = \eta n_1$, $\eta_2 = \eta n_2$ とおく。なお、 $(n_1, n_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$ である。 θ は、Fourier 変換平面の η_1 軸から半時計回り方向の角度である。 η は正の変数である。式(5)は x_3 に関する 2 階常微分方程式であり、その一般解は次式で与えられる。

$$\tilde{u}(\eta_1, \eta_2, x_3) = \mathbf{a}_u e^{-ip\eta x_3}, \quad \tilde{\phi}(\eta_1, \eta_2, x_3) = a_\phi e^{-ip\eta x_3} \quad (6)$$

式(6)を式(5)に代入し、整理すると p と未定係数 $\mathbf{a}_u$ および a_ϕ に関する次式を得ることができる。なお、 $\mathbf{a}$ の添え字 u および ϕ は、変位および電気ポテンシャルに関する係数であることを示している。

$$\begin{aligned} & (C_{i\alpha s\beta}a_{su} + e_{\alpha i\beta}a_{\phi})n_{\alpha}n_{\beta} + p\{(C_{i3s\alpha} + C_{i\alpha s3})a_{su} + (e_{\alpha i3} + e_{3i\alpha})a_{\phi}\}n_{\alpha} + p^2(C_{i3s3}a_{su} + e_{3i3}a_{\phi}) = 0 \\ & (e_{\alpha s\beta}a_{su} - \kappa_{\alpha\beta}a_{\phi})n_{\alpha}n_{\beta} + p\{(e_{3s\alpha} + e_{\alpha s3})a_{su} - (\kappa_{\alpha3} + \kappa_{3\alpha})a_{\phi}\}n_{\alpha} + p^2(e_{3s3}a_{su} - \kappa_{33}a_{\phi}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を整理して、次式を得る⁽¹¹⁾.

$$\{\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}\}\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (8)$$

ここで, $Q_{ik} = C_{ijks}n_jn_s$ ($k=1,2,3$), $e_{jis}n_jn_s$ ($k=4$), $R_{ik} = C_{ijks}n_jm_s$ ($k=1,2,3$), $e_{jis}m_jm_s$ ($k=4$), $T_{ik} = C_{ijks}m_jm_s$ ($k=1,2,3$), $e_{jis}m_jm_s$ ($k=4$), $Q_{4k} = e_{jks}n_jn_s$ ($k=1,2,3$), $-\kappa_{js}n_jn_s$ ($k=4$), $R_{4k} = e_{jks}n_jm_s$ ($k=1,2,3$), $-\kappa_{js}n_jm_s$ ($k=4$), $T_{4k} = e_{jks}m_jm_s$ ($k=1,2,3$), $-\kappa_{js}m_jm_s$ ($k=4$), $\mathbf{n} = [n_1, n_2, 0]^T = [\cos\theta, \sin\theta, 0]^T$, $\mathbf{m} = [0, 0, 1]^T$ である⁽¹⁷⁾. また, $\mathbf{a} = \{a_{1u}, a_{2u}, a_{3u}, a_{\phi}\}^T$ である.

また, 式(7)から p を求め, $\mathbf{a}$ を決定するが, この時 p を式(7)の固有値, $\mathbf{a}$ を固有ベクトルと呼ぶ. 固有値 p は固有ベクトルの係数行列の行列式の値を 0 とすることで求められる. 異方性圧電弾性体の場合, p の値は異なる 4 つの共役な複素数である. ここで, 変位ベクトルに電気ポテンシャルを加えたベクトルを拡張変位ベクトルとして, $\mathbf{u}^E = (u_1, u_2, u_3, \phi)$ を考える. また, 拡張作用力ベクトル $\mathbf{t}^E$ を $\mathbf{t}^E = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3)$ とすると,

$$\begin{aligned} t_i^E &= \sigma_{i3} = C_{i3ks}u_{k,s} + e_{ki3}\phi_{,k} \quad (i=1,2,3) \\ t_4^E &= D_3 = e_{3ks}u_{k,s} - \kappa_{3k}\phi_{,k} \end{aligned} \quad (9)$$

である. 式(9)を 2 次元 Fourier 変換すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{t}_i^E &= -i\eta_{\alpha}C_{i3k\alpha}\tilde{u}_{k,3} + C_{i3k3}\tilde{u}_{k,3} - i\eta_{\alpha}e_{\alpha i3}\tilde{\phi} + e_{3i3}\tilde{\phi}_{,3} \\ &= -i\eta(C_{ijks}n_sm_j + pC_{ijks}m_sm_j)a_{ku}e^{-ip\eta x_3} - i\eta(e_{sij}n_sm_j + pe_{sij}m_sm_j)a_{\phi}e^{-ip\eta x_3} \\ \tilde{t}_4^E &= -i\eta_{\alpha}e_{3k\alpha}\tilde{u}_{k,3} + e_{3k3}\tilde{u}_{k,3} + i\eta_{\alpha}\kappa_{3\alpha}\tilde{\phi} - \kappa_{33}\tilde{\phi}_{,3} \\ &= -i\eta(e_{jks}n_sm_j + pe_{jks}m_sm_j)a_{ku}e^{-ip\eta x_3} + i\eta(\kappa_{js}n_sm_j + p\kappa_{js}m_sm_j)a_{\phi}e^{-ip\eta x_3} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)は次のように書くことができる.

$$\tilde{\mathbf{t}}^E(\eta_1, \eta_2, x_3) = -i\eta \mathbf{b} e^{-ipx_3} \quad (11)$$

ここで, $\mathbf{b} = (\mathbf{R}^T + p\mathbf{T})\mathbf{a} = -(\mathbf{Q} + p\mathbf{R})\mathbf{a}/p$ である. 変位および作用力ベクトルの一般解は, 式(6)と式(11)に固有値 p_j と固有ベクトル $\mathbf{a}_j$ ($j=1,2,3,4$) をそれぞれ代入して得られた 4 つの解を足し合わせることで得られる. 例えば, $p > 0$ であるので, $x_3 \rightarrow -\infty$ で変位, 応力が 0 になるような場合には $\text{Im } p_j > 0$ に対する解を用いて, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^E(\eta_1, \eta_2, x_3) &= \mathbf{A} \langle e^{-ip_1x_3} \rangle \mathbf{q} \\ \tilde{\mathbf{t}}^E(\eta_1, \eta_2, x_3) &= -i\eta \mathbf{B} \langle e^{-ip_1x_3} \rangle \mathbf{q} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ は固有ベクトルから成る行列で $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{1u}, \mathbf{a}_{2u}, \mathbf{a}_{3u}, \mathbf{a}_{\phi}]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_{1u}, \mathbf{b}_{2u}, \mathbf{b}_{3u}, \mathbf{b}_{\phi}]$, $\mathbf{q}$: 未定係数ベクトルである.

$$\langle e^{-ip_1x_3} \rangle = \begin{bmatrix} e^{-ip_1x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ip_2x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ip_3x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ip_4x_3} \end{bmatrix} \quad (13)$$

なお, $x_3 \rightarrow \infty$ に対する解は, $\text{Im } p_j < 0$ に対する解を用いる.

3. 異方性圧電体-等方性体のグリーン関数

3・1 材料 1 に作用点がある場合

本章では異方性圧電体（材料 1）-等方性体（材料 2）のグリーン関数を導く．初めに，図 1 に示すように材料 1 中の点 $P(0, 0, d)$ に拡張集中力（集中力および集中電荷） $\mathbf{f}^E = (f_1, f_2, f_3, -f_e)$ が作用している場合を考える．式(12)に示した 2 次元 Fourier 変換された $\tilde{\mathbf{u}}^E$ および $\tilde{\mathbf{t}}^E$ を用いて異方性圧電体-等方性体のグリーン関数を表すと以下になる．

1) $d \leq x_3$ (Material 1)に対して

$$\tilde{\mathbf{u}}^{E(1)} = \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)\infty} + \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)}x_3} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{E(1)} = -i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)\infty} - i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)}x_3} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} \quad (15)$$

2) $0 \leq x_3 \leq d$ (Material 1)に対して

$$\tilde{\mathbf{u}}^{E(1)} = -\mathbf{A}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta p_s^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \mathbf{q}^{(1)\infty} + \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)}x_3} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{E(1)} = i\eta \mathbf{B}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta p_s^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \mathbf{q}^{(1)\infty} - i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)}x_3} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} \quad (17)$$

3) $x_3 \leq 0$ (Material 2)に対して

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(2)} = -\mathbf{A}^{(2)} \left\langle e^{\eta x_3} \right\rangle \mathbf{q}^{(2)} \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(2)} = i\eta \mathbf{B}^{(2)} \left\langle e^{\eta x_3} \right\rangle \mathbf{q}^{(2)} \quad (19)$$

ここで，各行列および変数の括弧付き上添え字の数字は対応する領域の材料を示している．等方性体の変位および応力ベクトルには電気ポテンシャルおよび電気変位は含まれないため，通常の $\tilde{\mathbf{u}}$ と $\tilde{\mathbf{t}}$ を用いる．式(14)~(19)の $\bar{\mathbf{q}}^{(1)}$ ， $\mathbf{q}^{(2)}$ および $\mathbf{q}^{(1)\infty}$ は，それぞれ未知係数ベクトルで，特に $\mathbf{q}^{(1)\infty}$ は無限体の解に対するベクトルである．さらに， $\bar{p}_j (j=1,2,3,4)$ は p_j の共役複素数の固有値であり， $\bar{\mathbf{A}}$ ， $\bar{\mathbf{B}}$ は $\bar{p}_j$ からなるベクトルである．

次に既報⁽⁶⁾で導いた等方性体に対する行列 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ を以下に示す．

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \eta x_3 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ n_1 & n_2 & 3-4\nu \end{bmatrix} + \eta x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & in_1 \\ 0 & 0 & in_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \eta x_3 \mathbf{B}_1 = \mu \begin{bmatrix} 1+n_1^2 & n_1 n_2 & 2n_1(1-2\nu) \\ n_1 n_2 & 1+n_2^2 & 2n_2(1-2\nu) \\ 2in_1 & 2in_2 & 2i(2-2\nu) \end{bmatrix} + \eta x_3 \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2n_1 \\ 0 & 0 & -2n_2 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_0 + \eta x_3 \bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ n_1 & n_2 & 3-4\nu \end{bmatrix} + \eta x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & in_1 \\ 0 & 0 & in_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Fig.1 Piezo anisotropic-isotropic bimaterial full-space of source point $P(0,0,d)$ in material 1

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_0 + \eta x_3 \bar{\mathbf{B}}_1 = \mu \begin{bmatrix} 1+n_1^2 & n_1 n_2 & 2n_1(1-2\nu) \\ n_1 n_2 & 1+n_2^2 & 2n_2(1-2\nu) \\ -2in_1 & -2in_2 & -2i(2-2\nu) \end{bmatrix} + \eta x_3 \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2n_1 \\ 0 & 0 & 2n_2 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで, ν はポアソン比, μ は横弾性係数である. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ および $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ は単純に共役の複素数から構成されるものではないことに注意を要する.

また, 未知ベクトルを決定するに当たり必要な界面における変位と応力および導体あるいは誘電体の境界条件および拡張集中力の作用点における平衡条件を用いる. 初めに, 異方性圧電無限体に対する解 $\mathbf{q}^\infty$ および $\bar{\mathbf{q}}^\infty$ を導く. その際に用いる条件を以下に示す.

1) 作用点における変位の境界条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{E(1)} \Big|_{x_3=d^+} = \tilde{\mathbf{u}}^{E(1)} \Big|_{x_3=d^-} \quad (24)$$

2) 作用点における作用力の境界条件

$$\tilde{\mathbf{t}}^{E(1)} \Big|_{x_3=d^+} - \tilde{\mathbf{t}}^{E(1)} \Big|_{x_3=d^-} = -\mathbf{f}^E \quad (25)$$

式(24)と式(25)に式(14), (15)を代入すると次式を得る.

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \bar{\mathbf{q}}^{(1)\infty} + \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}^{(1)} d} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} = -\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)\infty} + \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}^{(1)} d} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} \\ -i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{q}}^{(1)\infty} - i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}^{(1)} d} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} - i\eta \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)\infty} + i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}^{(1)} d} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} = -\mathbf{f}^E \end{cases} \quad (26)$$

この式を $\mathbf{q}^{(1)\infty}$ および $\bar{\mathbf{q}}^{(1)\infty}$ について解くと次式が得られる.

$$\mathbf{q}^{(1)\infty} = \frac{i}{\eta} \mathbf{G} \mathbf{f}^E, \quad \bar{\mathbf{q}}^{(1)\infty} = \frac{i}{\eta} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{f}^E \quad (27)$$

ここで, $\mathbf{G} = \left\{ \left(\bar{\mathbf{A}}^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{A}^{(1)} - \left(\bar{\mathbf{B}}^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \right\}^{-1} \left(\bar{\mathbf{B}}^{(1)} \right)^{-1}$, $\bar{\mathbf{G}} = \left\{ \left(\mathbf{A}^{(1)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{A}}^{(1)} - \left(\mathbf{B}^{(1)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \right\}^{-1} \left(\mathbf{B}^{(1)} \right)^{-1}$ である.

つぎに, 未知係数ベクトル $\bar{\mathbf{q}}^{(1)}$ および $\mathbf{q}^{(2)}$ を求める. 材料 2 の等方性材が導体である場合および誘電体である場合により, 電気ポテンシャルあるいは電気変位の境界条件が異なる.

A) 材料 2 が導体の場合

1) 界面における変位と電気ポテンシャルの境界条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{u(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)} \quad (x_3 = 0) \quad (28)$$

$$\phi = 0 \quad (x_3 = 0) \quad (29)$$

2) 界面における作用力の境界条件

$$\tilde{\mathbf{t}}^{u(1)} = \tilde{\mathbf{t}}^{(2)} \quad (x_3 = 0) \quad (30)$$

ここで, $\tilde{\mathbf{u}}^{u(1)}$ および $\tilde{\mathbf{t}}^{u(1)}$ は電気ポテンシャルおよび電気変位ベクトルを除いたベクトルである. 式の誘導を行い易いように, $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ を以下のように表す.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{uu} & \mathbf{A}^{u\phi} \\ \mathbf{A}^{\phi u} & A^{\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{uu} & \mathbf{B}^{u\phi} \\ \mathbf{B}^{\phi u} & B^{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで, $\mathbf{A}^{uu}$ は 3×3 の行列, $\mathbf{A}^{u\phi}$ は 3×1 , $\mathbf{A}^{\phi u}$ は 1×3 , $A^{\phi\phi}$ はスカラーである. $\mathbf{B}$ も同様である.

変位および応力ベクトルは, 次式のように表される. 以下には界面の境界条件に関する式だけを示す.

1) $0 \leq x_3 \leq d$ (Material 1) について

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^u \\ \tilde{\phi} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{uu(1)} & \mathbf{A}^{u\phi(1)} \\ \mathbf{A}^{\phi u(1)} & \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta p_s^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{u(1)\infty} \\ q^{\phi(1)\infty} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} & \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \\ \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} & \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)} x_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} \\ \bar{q}^{\Phi\phi(1)} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{t}}^u \\ \tilde{D}_3 \end{Bmatrix} = i\eta \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{uu(1)} & \mathbf{B}^{u\phi(1)} \\ \mathbf{B}^{\phi u(1)} & \mathbf{B}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta p_s^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{u(1)\infty} \\ q^{\phi(1)\infty} \end{Bmatrix} - i\eta \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} & \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \\ \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)} & \bar{\mathbf{B}}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_s^{(1)} x_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} \\ \bar{q}^{\Phi\phi(1)} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

2) $x_3 \leq 0$ (Material 2) について

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(2)} = -(\mathbf{A}_0^{(2)} + \eta x_3 \mathbf{A}_1^{(2)}) \langle e^{\eta x_3} \rangle \mathbf{q}^{\Phi(2)} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(2)} = i\eta (\mathbf{B}_0^{(2)} + \eta x_3 \mathbf{B}_1^{(2)}) \langle e^{\eta x_3} \rangle \mathbf{q}^{\Phi(2)} \quad (35)$$

ここで, $\bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)}$, $\mathbf{q}^{\Phi(2)}$ は境界条件から決まる未定定数ベクトルで, $\bar{q}^{\Phi\phi(1)}$ は未定定数である.
境界条件の式(28), (29)および(30)から次式が得られる.

$$-\mathbf{A}^{uu(1)} \langle e^{i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} - \mathbf{A}^{u\phi(1)} e^{i\eta p_s^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} + \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{q}^{\Phi\phi(1)} = -\mathbf{A}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} \quad (36)$$

$$-\mathbf{A}^{\phi u(1)} \langle e^{i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} - \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} e^{i\eta p_s^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} + \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \bar{q}^{\Phi\phi(1)} = 0 \quad (37)$$

$$\mathbf{B}^{uu(1)} \langle e^{i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{B}^{u\phi(1)} e^{i\eta p_s^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} - \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{q}^{\Phi\phi(1)} = \mathbf{B}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} \quad (38)$$

式(37)より

$$\bar{q}^{\Phi\phi(1)} = \left\{ \mathbf{A}^{\phi u(1)} \langle e^{-i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} e^{-i\eta p_s^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} - \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} \right\} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \quad (39)$$

が得られる. この式を式(36), (38)に代入すると

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \right\} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \mathbf{A}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} &= \left\{ \mathbf{A}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \mathbf{A}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \right\} \langle e^{i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} \\ &+ \left\{ \mathbf{A}^{u\phi(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \right\} e^{i\eta p_s^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \right\} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \mathbf{B}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} &= \left\{ \mathbf{B}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \mathbf{A}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \right\} \langle e^{i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} \\ &+ \left\{ \mathbf{B}^{u\phi(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \right\} e^{i\eta p_s^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} \end{aligned} \quad (41)$$

が得られる. これらの式を $\bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)}$ および $\mathbf{q}^{\Phi(2)}$ について解くと

$$\bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} = \mathbf{g}_\Phi^{u(1)} \langle e^{i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{g}_\Phi^{\phi(1)} q^{\phi(1)\infty} e^{i\eta p_s^{(1)} d} \quad (42)$$

$$\mathbf{q}^{\Phi(2)} = \mathbf{h}_\Phi^{u(1)} \langle e^{i\eta p_s^{(1)} d} \rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{h}_\Phi^{\phi(1)} q^{\phi(1)\infty} e^{i\eta p_s^{(1)} d} \quad (43)$$

が得られる. ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\Phi^{u(1)} &= \left\{ (\mathbf{A}_0^{(2)})^{-1} \bar{\mathbf{A}}_\Phi^u - (\mathbf{B}_0^{(2)})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^u \right\}^{-1} \left\{ (\mathbf{A}_0^{(2)})^{-1} \mathbf{A}_\Phi^u - (\mathbf{B}_0^{(2)})^{-1} \mathbf{B}_\Phi^u \right\} \\ \mathbf{g}_\Phi^{\phi(1)} &= \left\{ (\mathbf{A}_0^{(2)})^{-1} \bar{\mathbf{A}}_\Phi^\phi - (\mathbf{B}_0^{(2)})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^\phi \right\}^{-1} \left\{ (\mathbf{A}_0^{(2)})^{-1} \mathbf{A}_\Phi^\phi - (\mathbf{B}_0^{(2)})^{-1} \mathbf{B}_\Phi^\phi \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{\Phi}^{u(1)} &= \left\{ (\bar{\mathbf{A}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{A}_0^{(2)} - (\bar{\mathbf{B}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \right\}^{-1} \left\{ (\bar{\mathbf{A}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{A}_{\Phi}^u - (\bar{\mathbf{B}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{B}_{\Phi}^u \right\} \\ \mathbf{h}_{\Phi}^{\phi(1)} &= \left\{ (\bar{\mathbf{A}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{A}_0^{(2)} - (\bar{\mathbf{B}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \right\}^{-1} \left\{ (\bar{\mathbf{A}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{A}_{\Phi}^{\phi} - (\bar{\mathbf{B}}_{\Phi}^u)^{-1} \mathbf{B}_{\Phi}^{\phi} \right\}\end{aligned}\quad (45)$$

なお,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}_{\Phi}^u &= \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{A}_{\Phi}^u = \mathbf{A}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \mathbf{A}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{A}_{\Phi}^{\phi} = \mathbf{A}^{u\phi(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)}, \\ \bar{\mathbf{B}}_{\Phi}^u &= \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{B}_{\Phi}^u = \mathbf{B}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \mathbf{A}^{\phi u(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{B}_{\Phi}^{\phi} = \mathbf{B}^{u\phi(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)}\end{aligned}\quad (46)$$

である.

式(42)を式(39)に代入して, 整理すると

$$\bar{\mathbf{q}}^{\Phi\phi(1)} = \mathbf{k}_{\Phi}^{u(1)} \left\langle e^{ip_s^{u(1)}d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + k_{\Phi}^{\phi(1)} q^{\phi(1)\infty} e^{ip_s^{\phi(1)}d} \quad (47)$$

が得られる. ここで,

$$\mathbf{k}_{\Phi}^{u(1)} = \left(\mathbf{A}^{\phi u(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} \mathbf{g}_{\Phi}^{u(1)} \right) / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)}, \quad k_{\Phi}^{\phi(1)} = \left(\mathbf{A}^{\phi\phi(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} \mathbf{g}_{\Phi}^{\phi(1)} \right) / \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \quad (48)$$

である.

これらの結果をマトリックス形式で書くと

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}^{\Phi(1)} &= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} \\ \bar{\mathbf{q}}^{\Phi\phi(1)} \end{Bmatrix} = \frac{i}{\eta} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\Phi}^{u(1)} & \mathbf{g}_{\Phi}^{\phi(1)} \\ \mathbf{k}_{\Phi}^{u(1)} & k_{\Phi}^{\phi(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle e^{ip_s^{u(1)}\eta d} \right\rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{ip_s^{\phi(1)}\eta d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{f}^E \\ (4 \times 4) & (4 \times 1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{i}{\eta} \mathbf{K}_{(4 \times 4)} \left\langle e^{ip_s^{(1)}\eta d} \right\rangle \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{f}^E \\ (4 \times 4) & (4 \times 1) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (49)$$

$$\mathbf{q}^{\Phi(2)} = \frac{i}{\eta} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\Phi}^{u(1)} & \mathbf{h}_{\Phi}^{\phi(1)} \\ (3 \times 3) & (3 \times 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle e^{ip_s^{u(1)}\eta d} \right\rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{ip_s^{\phi(1)}\eta d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{f}^E \\ (4 \times 4) & (4 \times 1) \end{bmatrix} = \frac{i}{\eta} \mathbf{H}_{(3 \times 4)} \left\langle e^{ip_s^{(1)}\eta d} \right\rangle \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{f}^E \\ (4 \times 4) & (4 \times 1) \end{bmatrix} \quad (50)$$

以上の係数を式(14)~(19)に代入し, Fourier 逆変換を行うと次式が得られる. 逆変換に際し, $x_1=r\cos\theta_0, x_2=r\sin\theta_0$ と置き換えると $\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 = r\eta \cos(\theta - \theta_0)$ となることを利用する. θ_0 は, x_1 軸から半時計回りにとった角度である.

$d \leq x_3$ の場合

$$u_i^E = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\bar{A}_{ij}^{(1)} \bar{G}_{jl} f_l}{\bar{p}_j^{u(1)}(x_3 - d) + r \cos(\theta - \theta_0)} + \frac{\bar{A}_{ij}^{(1)} K_{jl} G_{ln} f_n}{\bar{p}_j^{u(1)} x_3 - p_l^{u(1)} d + r \cos(\theta - \theta_0)} \right\} d\theta \quad (51)$$

$$t_i^E = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-\bar{B}_{ij}^{(1)} \bar{G}_{jl} f_l}{\left\{ \bar{p}_j^{u(1)}(x_3 - d) + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} - \frac{\bar{B}_{ij}^{(1)} K_{jl}^{(1)} G_{ln} f_n}{\left\{ \bar{p}_j^{u(1)} x_3 - p_l^{u(1)} d + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} \right\} d\theta \quad (52)$$

$0 \leq x_3 \leq d$ の場合

$$u_i^E = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-A_{ij}^{(1)} G_{jl} f_l}{p_j^{(1)}(x_3 - d) + r \cos(\theta - \theta_0)} + \frac{\bar{A}_{ij}^{(1)} K_{jk} G_{kl} f_l}{\bar{p}_j^{(1)} x_3 - p_k^{(1)} d + r \cos(\theta - \theta_0)} \right\} d\theta \quad (53)$$

$$t_i^E = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{B_{ij}^{(1)} G_{jl} f_l}{\left\{ p_j^{u(1)}(x_3 - d) + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} - \frac{\bar{B}_{ij}^{(1)} K_{jk} G_{kl} f_l}{\left\{ \bar{p}_j^{u(1)} x_3 - p_k^{u(1)} d + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} \right\} d\theta \quad (54)$$

$x_3 \leq 0$ の場合

$$u_i^{u(2)} = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{A_{0ij}^{(2)} H_{jk} G_{kl} f_l}{p_k^{u(1)} d - ix_3 - r \cos(\theta - \theta_0)} + i \frac{x_3 A_{1ij}^{(2)} H_{jk} G_{kl} f_l}{\left\{ p_k^{u(1)} d - ix_3 - r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} \right] d\theta \quad (55)$$

$$t_i^{u(2)} = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{B_{0ij}^{(2)} H_{jk} G_{kl}^{uu} f_l^u}{\left\{ p_k^{u(1)} d - ix_3 - r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} + \frac{2ix_3 B_{1ij}^{(2)} H_{jk} G_{kl} f_l}{\left\{ p_k^{u(1)} d - ix_3 - r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^3} \right] d\theta \quad (56)$$

B) 材料 2 が誘電体の場合

1) 界面における変位と電気ポテンシャルの境界条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{u(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)} \quad (x_3 = 0) \quad (57)$$

2) 界面における作用力の境界条件

$$\tilde{\mathbf{t}}^{u(1)} = \tilde{\mathbf{t}}^{(2)} \quad (x_3 = 0) \quad (58)$$

$$D_3 = 0 \quad (x_3 = 0) \quad (59)$$

以下には界面の境界条件に関する式だけを示す．ここで、式(32)-(35)の $\bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)}$ を $\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)}$ 、 $\bar{q}^{\Phi \phi(1)}$ を $\bar{q}^{D\phi(1)}$ に置き換える．

1) $0 \leq x_3 \leq d$ (Material 1)について

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^u \\ \tilde{\phi} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{uu(1)} & \mathbf{A}^{u\phi(1)} \\ \mathbf{A}^{\phi u(1)} & \mathbf{A}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta p_k^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{u(1)\infty} \\ q^{\phi(1)\infty} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} & \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \\ \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} & \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_k^{(1)} x_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} \\ \bar{q}^{D\phi(1)} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{t}}^u \\ \tilde{D}_3 \end{Bmatrix} = i\eta \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{uu(1)} & \mathbf{B}^{u\phi(1)} \\ \mathbf{B}^{\phi u(1)} & \mathbf{B}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta p_k^{(1)}(x_3-d)} \right\rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{u(1)\infty} \\ q^{\phi(1)\infty} \end{Bmatrix} - i\eta \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} & \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \\ \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)} & \bar{\mathbf{B}}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\eta \bar{p}_k^{(1)} x_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} \\ \bar{q}^{D\phi(1)} \end{Bmatrix} \quad (61)$$

2) $x_3 \leq 0$ (Material 2)について

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(2)} = - \left(\mathbf{A}_0^{(2)} + \eta x_3 \mathbf{A}_1^{(2)} \right) \left\langle e^{\eta x_3} \right\rangle \mathbf{q}^{D(2)} \quad (62)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(2)} = i\eta \left(\mathbf{B}_0^{(2)} + \eta x_3 \mathbf{B}_1^{(2)} \right) \left\langle e^{\eta x_3} \right\rangle \mathbf{q}^{D(2)} \quad (63)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)}$ 、 $\mathbf{q}^{D(2)}$ は境界条件から決まる未定定数ベクトルで、 $\bar{q}^{D\phi(1)}$ は未知定数である．式(60)-(63)から、次式が得られる．

$$-\mathbf{A}^{uu(1)} \left\langle e^{i\eta p_k^{(1)} d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} - \mathbf{A}^{u\phi(1)} e^{i\eta p_k^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} + \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} + \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{q}^{D\phi(1)} = -\mathbf{A}_0^{(2)} \mathbf{q}^{D(2)} \quad (64)$$

$$\mathbf{B}^{\phi u(1)} \left\langle e^{i\eta p_k^{(1)} d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{B}^{\phi\phi(1)} e^{i\eta p_k^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{\phi\phi(1)} \bar{q}^{D\phi(1)} = 0 \quad (65)$$

$$\mathbf{B}^{uu(1)} \left\langle e^{i\eta p_k^{(1)} d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{B}^{u\phi(1)} e^{i\eta p_k^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} - \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{q}^{D\phi(1)} = \mathbf{B}_0^{(2)} \mathbf{q}^{D(2)} \quad (66)$$

式(65)より $\bar{q}^{D\phi(1)}$ を求めると

$$\bar{q}^{D\phi(1)} = \left\{ \mathbf{B}^{\phi u(1)} \left\langle e^{i\eta p_4^{(1)} d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{B}^{\phi\phi(1)} e^{i\eta p_4^{(1)} d} q^{\phi(1)\infty} - \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)-Du(1)} \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} \right\} / \bar{B}^{\phi\phi(1)} \quad (67)$$

が得られる．この式を式(64)および(66)に代入し $\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)}$, $\mathbf{q}^{D(2)}$ を求めると,

$$\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} = \mathbf{g}_D^{u(1)} \left\langle e^{ip_s^{u(1)} \eta d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{g}_D^{\phi(1)} \mathbf{q}^{\phi(1)\infty} e^{ip_4^{\phi(1)} \eta d} \quad (68)$$

$$\mathbf{q}^{D(2)} = \mathbf{h}_D^{u(1)} \left\langle e^{ip_s^{u(1)} \eta d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + \mathbf{h}_D^{\phi(1)} \mathbf{q}^{\phi(1)\infty} e^{ip_4^{\phi(1)} \eta d} \quad (69)$$

$$\bar{q}^{D\phi(1)} = \mathbf{k}_D^{u(1)} \left\langle e^{ip_s^{u(1)} \eta d} \right\rangle \mathbf{q}^{u(1)\infty} + k_D^{\phi(1)} q^{\phi(1)\infty} e^{ip_4^{\phi(1)} \eta d} \quad (70)$$

が得られる．これらの結果をマトリックス形式で表すには，式(49), (50)の $\mathbf{K}, \mathbf{H}$ の成分を式(68)～(70)のものに置き換えればよい．ここで，

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_D^{u(1)} &= \left\{ \left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{A}}_D^u - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{B}}_D^u \right\}^{-1} \left\{ \left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{A}_D^u - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{B}_D^u \right\}, \\ \mathbf{g}_D^{\phi(1)} &= \left\{ \left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{A}}_D^u - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{B}}_D^u \right\}^{-1} \left\{ \left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{A}_D^\phi - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{B}_D^\phi \right\}, \\ \mathbf{h}_D^{u(1)} &= \left\{ \left(\bar{\mathbf{A}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{A}_0^{(2)} - \left(\bar{\mathbf{B}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{B}_0^{(2)} \right\}^{-1} \left\{ \left(\bar{\mathbf{A}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{A}_D^u - \left(\bar{\mathbf{B}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{B}_D^u \right\}, \\ \mathbf{h}_D^{\phi(1)} &= \left\{ \left(\bar{\mathbf{A}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{A}_0^{(2)} - \left(\bar{\mathbf{B}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{B}_0^{(2)} \right\}^{-1} \left\{ \left(\bar{\mathbf{A}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{A}_D^\phi - \left(\bar{\mathbf{B}}_D^u \right)^{-1} \mathbf{B}_D^\phi \right\}, \\ \mathbf{k}_D^{u(1)} &= \left(\mathbf{B}^{\phi u(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)} \mathbf{g}_D^{u(1)} \right) / \bar{B}^{\phi\phi(1)}, \quad k_D^{\phi(1)} = \left(B^{\phi\phi(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)} \mathbf{g}_D^{\phi(1)} \right) / \bar{B}^{\phi\phi(1)} \end{aligned} \quad (71)$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_D^u &= \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)} / \bar{B}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{A}_D^u = \mathbf{A}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \mathbf{B}^{\phi u(1)} / \bar{B}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{A}_D^\phi = \mathbf{A}^{u\phi(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} B^{\phi\phi(1)} / \bar{B}^{\phi\phi(1)}, \\ \bar{\mathbf{B}}_D^u &= \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)} / \bar{B}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{B}_D^u = \mathbf{B}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \mathbf{B}^{\phi u(1)} / \bar{B}^{\phi\phi(1)}, \quad \mathbf{B}_D^\phi = \mathbf{B}^{u\phi(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} B^{\phi\phi(1)} / \bar{B}^{\phi\phi(1)} \end{aligned} \quad (72)$$

前述したように，これらのベクトルを式(13)～(18)に代入し，逆 Fourier 変換を行うと式(51)～(56)と同様な式を得ることができる．

3・2 材料 2 に作用点がある場合

つぎに，等方性材料中に集中荷重が作用する場合のグリーン関数を導く．3.1 と同様に変位と応力ベクトルの解を次式のようにおく．

1) $0 \leq x_3$ (Material 1)に対して

$$\tilde{\mathbf{u}}^{E(1)} = \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \left\langle e^{-i\bar{p}_s^{(1)} \eta x_3} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} & \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \\ \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} & \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\bar{p}_s^{(1)} \eta x_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} \\ \bar{q}^{\Phi\phi(1)} \end{Bmatrix} \quad (73)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{E(1)} = -i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \left\langle e^{-i\bar{p}_s^{(1)} \eta x_3} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(1)} = -i\eta \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} & \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \\ \bar{\mathbf{B}}^{\phi u(1)} & \bar{\mathbf{B}}^{\phi\phi(1)} \end{bmatrix} \left\langle e^{-i\bar{p}_s^{(1)} \eta x_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} \\ \bar{q}^{\Phi\phi(1)} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

2) $d \leq x_3 \leq 0$ (Material 2)に対して

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(2)} = \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \left\langle e^{-\eta(x_3-d)} \right\rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} - \mathbf{A}^{(2)} \left\langle e^{\eta x_3} \right\rangle \mathbf{q}^{(2)} \quad (75)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(2)} = -i\eta \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \langle e^{-\eta(x_3-d)} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} + i\eta \mathbf{B}^{(2)} \langle e^{\eta x_3} \rangle \mathbf{q}^{(2)} \quad (76)$$

3) $x_3 \leq d$ (Material 2)に対して

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(2)} = -\mathbf{A}^{(2)} \langle e^{\eta(x_3-d)} \rangle \mathbf{q}^{(2)\infty} - \mathbf{A}^{(2)} \langle e^{\eta x_3} \rangle \mathbf{q}^{(2)} \quad (77)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(2)} = i\eta \mathbf{B}^{(2)} \langle e^{\eta(x_3-d)} \rangle \mathbf{q}^{(2)\infty} + i\eta \mathbf{B}^{(2)} \langle e^{\eta x_3} \rangle \mathbf{q}^{(2)} \quad (78)$$

ここで, $\bar{\mathbf{q}}^{(1)} = (\bar{\mathbf{q}}^{u(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\phi(1)})^T$, $\mathbf{q}^{(2)}$ は境界条件から決定される定数ベクトルである. これらの式中の $\bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty}$ は, 等方性の無限体中に集中荷重が作用する場合のグリーン関数に対するベクトルである. このベクトルは, 式(23), 式(24)で電気ポテンシャルおよび電気変位を除いた式を用いて求めることができる. すなわち,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} - \mathbf{A}^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \mathbf{q}^{(2)} &= -\mathbf{A}^{(2)} \mathbf{q}^{(2)\infty} - \mathbf{A}^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \mathbf{q}^{(2)} \\ -\bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} + \mathbf{B}^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \mathbf{q}^{(2)} - \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{q}^{(2)\infty} - \mathbf{B}^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \mathbf{q}^{(2)} &= \frac{\mathbf{f}}{\eta} i \end{aligned} \quad (79)$$

が得られる. これらの式を $\mathbf{q}^{(2)\infty}$ および $\bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty}$ について解くと

$$\mathbf{q}^{(2)\infty} = \frac{i}{\eta} \mathbf{G} \mathbf{f} = i \frac{\mathbf{G}_0 + d \eta \mathbf{G}_1}{\eta} \mathbf{f}, \quad \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} = \frac{i}{\eta} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{f} = i \frac{\bar{\mathbf{G}}_0 + d \eta \bar{\mathbf{G}}_1}{\eta} \mathbf{f} \quad (80)$$

ここで,

$$\mathbf{G}_0 = \frac{1}{16\mu(1-\nu)} \begin{bmatrix} -7+8\nu+\cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -7+8\nu-\cos 2\theta & 0 \\ 2\cos \theta & 2\sin \theta & 2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \frac{1}{16\mu(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2\cos^2 \theta & \sin 2\theta & 2i\cos \theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2 \theta & 2i\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_0 &= \frac{1}{16\mu(1-\nu)} \begin{bmatrix} -7+8\nu+\cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -7+8\nu-\cos 2\theta & 0 \\ 2\cos \theta & 2\sin \theta & -2i \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{G}}_1 &= \frac{1}{16\mu(1-\nu)} \begin{bmatrix} -2\cos^2 \theta & -\sin 2\theta & 2i\cos \theta \\ -\sin 2\theta & -2\sin^2 \theta & 2i\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (82)$$

である.

初めに, 材料 2 が導体の場合を考える. 境界条件の式(28), 式(29), 式(30)に対する関係式は, 式(31)を材料 1 に適用すると次式のようになる.

$$\bar{\mathbf{A}}^{u(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi\phi(1)} = \bar{\mathbf{A}}_0^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} - \mathbf{A}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} \quad (83)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{\phi(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \bar{\mathbf{A}}^{\phi\phi(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi\phi(1)} = 0 \quad (84)$$

$$-i\eta \bar{\mathbf{B}}^{u(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} - i\eta \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi\phi(1)} = -i\eta \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} + i\eta \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} \quad (85)$$

式(84)から $\bar{q}^{\Phi(1)} = -\bar{\mathbf{A}}^{\Phi u(1)} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} / \bar{A}^{\Phi \Phi(1)}$ が得られる. この式を式(83)および式(85)に代入し, 整理すると次式が得られる.

$$\begin{cases} \left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \mathbf{A}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} = \bar{\mathbf{A}}_0^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} \\ \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} + \mathbf{B}_0^{(2)} \mathbf{q}^{\Phi(2)} = \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} \end{cases} \quad (86)$$

式(83)を $\bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)}$ および $\mathbf{q}^{\Phi(2)}$ について解くと,

$$\bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} = \mathbf{g}_\Phi^{(1)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty}, \quad \mathbf{q}^{\Phi(2)} = \mathbf{h}_\Phi^{(1)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty}, \quad \bar{q}^{\Phi \Phi(1)} = \mathbf{k}_\Phi^{(1)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} \quad (87)$$

が得られる. これらの式をマトリックス形式で表すには, 式(49), (50)と同様に

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi(1)} &= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)} \\ \bar{q}^{\Phi \Phi(1)} \end{Bmatrix} = \frac{i}{\eta} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\Phi^{u(1)} \\ \mathbf{k}_\Phi^{(1)} \end{bmatrix}_{\substack{(3 \times 3) \\ (1 \times 3)}} \langle e^{\eta d} \rangle_{(3 \times 3)} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{G}}_0 + d\eta \bar{\mathbf{G}}_1 \\ \end{pmatrix}_{\substack{(3 \times 3) \\ (3 \times 3)}} \mathbf{f}_{(3 \times 1)} \\ &= \frac{i}{\eta} \mathbf{K}_{(4 \times 3)} \langle e^{\eta d} \rangle_{(3 \times 3)} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{G}}_0 + d\eta \bar{\mathbf{G}}_1 \\ \end{pmatrix}_{\substack{(3 \times 3) \\ (3 \times 3)}} \mathbf{f}_{(3 \times 1)} \end{aligned} \quad (88)$$

$$\mathbf{q}^{\Phi(2)} = \frac{i}{\eta} \mathbf{h}_\Phi^{(1)} \langle e^{\eta d} \rangle_{(3 \times 3)} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{G}}_0 + d\eta \bar{\mathbf{G}}_1 \\ \end{pmatrix}_{\substack{(3 \times 3) \\ (3 \times 3)}} \mathbf{f}_{(3 \times 1)} \quad (89)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\Phi^{(1)} &= \left[\left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\} - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\} \right]^{-1} \left[\left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{A}}_0^{(2)} - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \right] \\ \mathbf{h}_\Phi^{(1)} &= \left[\left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\}^{-1} \mathbf{A}_0^{(2)} - \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\}^{-1} \mathbf{B}_0^{(2)} \right]^{-1} \\ &\times \left[\left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_0^{(2)} - \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)} \bar{\mathbf{A}}^{\phi u(1)} / \bar{A}^{\phi \phi(1)} \right\}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (90)$$

である.

以上の関係を式(73)~(78)に代入して, Fourier 逆変換を行うと次式が得られる.

1) $0 \leq x_3$ (Material 1)に対して

$$u_i^E = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-i\bar{A}_{ij}^{(1)} K_{jk} \bar{G}_{0kl} f_l}{\left\{ \bar{p}_j^{(1)} x_3 + id + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}} - \frac{d \bar{A}_{ij}^{(1)} K_{jk} \bar{G}_{1kl} f_l}{\left\{ \bar{p}_j^{(1)} x_3 + id + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} \right\} d\theta \quad (91)$$

$$t_i^E = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{i\bar{B}_{ij}^{(1)} K_{jk} \bar{G}_{0kl} f_l}{\left\{ \bar{p}_j^{(1)} x_3 + id + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^2} + \frac{2d\bar{B}_{ij}^{(1)} K_{jk} \bar{G}_{1kl} f_l}{\left\{ \bar{p}_j^{(1)} x_3 + id + r \cos(\theta - \theta_0) \right\}^3} \right\} d\theta \quad (92)$$

2) $d \leq x_3 \leq 0$ (Material 2)に対して

$$\begin{aligned} u_i^{(2)} &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-i\bar{A}_{0ij}^{(2)} \bar{G}_{0jk} f_k}{r \cos(\theta - \theta_0) - i(x_3 - d)} - \frac{(d \bar{A}_{0ij}^{(2)} \bar{G}_{1jk} + x_3 \bar{A}_{1ij}^{(2)} \bar{G}_{0jk}) f_k}{\left\{ r \cos(\theta - \theta_0) - i(x_3 - d) \right\}^2} + \frac{2ix_3 d \bar{A}_{1ij}^{(2)} \bar{G}_{1jk} f_k}{\left\{ r \cos(\theta - \theta_0) - i(x_3 - d) \right\}^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{iA_{0ij}^{(2)} h_{\Phi jk}^{(1)} \bar{G}_{0kl} f_l}{r \cos(\theta - \theta_0) + i(x_3 + d)} + \frac{(d A_{0ij}^{(2)} h_{\Phi jk}^{(1)} \bar{G}_{1kl} + x_3 A_{1ij}^{(2)} h_{\Phi jk}^{(1)} \bar{G}_{0kl}) f_l}{\left\{ r \cos(\theta - \theta_0) + i(x_3 + d) \right\}^2} - \frac{2ix_3 d A_{1ij}^{(2)} \bar{G}_{1kl} f_l}{\left\{ r \cos(\theta - \theta_0) + i(x_3 + d) \right\}^3} \right\} d\theta \end{aligned} \quad (93)$$

$$t_i^{(2)} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{i\bar{B}_{0ij}^{(2)}\bar{G}_{0jk}f_k}{\{r\cos(\theta-\theta_0)-i(x_3-d)\}^2} + \frac{2(d\bar{B}_{0ij}^{(2)}\bar{G}_{1jk}+x_3\bar{B}_{1ij}^{(2)}\bar{G}_{0jk})}{\{r\cos(\theta-\theta_0)-i(x_3-d)\}^3} - \frac{6ix_3d\bar{B}_{1ij}^{(2)}\bar{G}_{1jk}}{\{r\cos(\theta-\theta_0)-i(x_3-d)\}^4} \right. \\ \left. - \frac{iB_{0ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{0kl}f_l}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^2} - \frac{2(dB_{0ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{1kl}+x_3B_{1ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{0kl})}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^3} + \frac{6ix_3dB_{1ij}^{(2)}\bar{G}_{1kl}}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^4} \right] d\theta \quad (94)$$

3) $x_3 \leq d$ (Material 2) に対して

$$u_i^{(2)} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{iA_{0ij}^{(2)}G_{0jk}f_k}{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3-d)} + \frac{(dA_{0ij}^{(2)}G_{1jk}+x_3A_{1ij}^{(2)}G_{0jk})f_k}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3-d)\}^2} - \frac{2ix_3dA_{1ij}^{(2)}G_{1jk}f_k}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3-d)\}^3} \right. \\ \left. + \frac{iA_{0ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{0kl}f_l}{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)} + \frac{(dA_{0ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{1kl}+x_3A_{1ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{0kl})f_l}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^2} - \frac{2ix_3dA_{1ij}^{(2)}\bar{G}_{1kl}f_l}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^3} \right] d\theta \quad (95)$$

$$t_i^{(2)} = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{i\bar{B}_{0ij}^{(2)}\bar{G}_{0jk}f_k}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3-d)\}^2} + \frac{2(d\bar{B}_{0ij}^{(2)}\bar{G}_{1jk}+x_3\bar{B}_{1ij}^{(2)}\bar{G}_{0jk})f_k}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3-d)\}^3} - \frac{6ix_3d\bar{B}_{1ij}^{(2)}\bar{G}_{1jk}f_k}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3-d)\}^4} \right. \\ \left. + \frac{iB_{0ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{0kl}f_l}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^2} + \frac{2(dB_{0ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{1kl}+x_3B_{1ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{0kl})f_l}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^3} - \frac{6ix_3dB_{1ij}^{(2)}h_{\Phi jk}^{(1)}\bar{G}_{1kl}f_l}{\{r\cos(\theta-\theta_0)+i(x_3+d)\}^4} \right] d\theta \quad (96)$$

ここで、式(91), (92)中の $\bar{p}_j^{u(1)}$ は θ の関数であるため、数値積分を行う必要がある。一方、式(93)~(96)の式は具体的に材料特性が決まれば、積分することが可能である。

次に、等方性体が誘電体の場合を考える。式(83), (85)は変更無しで使うことができるが、式(84)は次式に置き換える必要がある。なお、 $\bar{\mathbf{q}}^{\Phi u(1)}$ を $\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)}$ に、 $\bar{\mathbf{q}}^{\Phi \phi(1)}$ を $\bar{\mathbf{q}}^{D\phi(1)}$ に変更する。

$$\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)}\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} + \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)}\bar{\mathbf{q}}^{D\phi(1)} = 0 \quad (97)$$

この式より、 $\bar{\mathbf{q}}^{D\phi(1)} = -\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)}\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)}$ が得られる。この式を変位と応力の連続条件に代入すると、

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right] \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} + \mathbf{A}_0^{(2)}\mathbf{q}^{D(2)} = \bar{\mathbf{A}}_0^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} \\ & \left[\bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right] \bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} + \mathbf{B}_0^{(2)}\mathbf{q}^{D(2)} = \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} \end{aligned} \right. \quad (98)$$

を得る。この式を $\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)}$ と $\mathbf{q}^{D(2)}$ について解くと

$$\bar{\mathbf{q}}^{Du(1)} = \mathbf{g}_D^{(1)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty}, \quad \mathbf{q}^{D(2)} = \mathbf{h}_D^{(1)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty}, \quad \bar{\mathbf{q}}^{D\phi(1)} = \mathbf{k}_D^{(1)} \langle e^{\eta d} \rangle \bar{\mathbf{q}}^{(2)\infty} \quad (99)$$

が得られる。ここで、

$$\mathbf{g}_D^{(1)} = \left[\left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right\} - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right\} \right]^{-1} \left[\left(\mathbf{A}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{A}}_0^{(2)} - \left(\mathbf{B}_0^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \right], \\ \mathbf{h}_D^{(1)} = \left[\left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right\}^{-1} \mathbf{A}_0^{(2)} - \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right\}^{-1} \mathbf{B}_0^{(2)} \right]^{-1}, \quad \mathbf{k}_D^{(1)} = -\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)}\mathbf{g}_D^{(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \quad (100) \\ \times \left[\left\{ \bar{\mathbf{A}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right\}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_0^{(2)} - \left\{ \bar{\mathbf{B}}^{uu(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{u\phi(1)}\bar{\mathbf{B}}^{\Phi u(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\Phi \phi(1)} \right\}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_0^{(2)} \right]$$

である。

拡張変位および応力ベクトルは、式(88)~(89)の中の $\mathbf{g}_\Phi^{(1)}$ を $\mathbf{g}_D^{(1)}$ 、 $\mathbf{h}_\Phi^{(1)}$ を $\mathbf{h}_D^{(1)}$ 、 $\mathbf{k}_\Phi^{(1)}$ を $\mathbf{k}_D^{(1)}$ に置き換えれば求められる。

以上で導出した等方体が導体および誘電体の解を比較すると、材料 1 に作用点がある場合、導体に対する式(44)および(45)と誘電体に対する式(71)は形式的には同じであるが、各式を構成する行列に対する式(46)と式(72)に違いがある。また、材料 2 に作用点がある場合にも、導体に対する式(90)と誘電体に対する式(100)は形式的には同じである。ここで、式(46)と式(72)に示す行列を見ると、例えば導体の場合は $\mathbf{X}^{uu(1)} - \mathbf{X}^{u\phi(1)} \mathbf{A}^{\phi(1)} / \bar{\mathbf{A}}^{\phi(1)}$ 、誘電体の場合は $\mathbf{X}^{uu(1)} - \mathbf{X}^{u\phi(1)} \mathbf{B}^{\phi(1)} / \bar{\mathbf{B}}^{\phi(1)}$ のような違いがあることがわかる。ただし、 $\mathbf{X}$ は $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ を表す行列である。これは、式(39)と式(69)に起因する。式(90)と式(100)にも同様な違いがある。ただし、式(48)と式(71)、式(90)と式(100)中の行列 $\mathbf{k}$ は、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が完全に入れ替わる。

4. 横等方性圧電体-等方性接合体の三次元グリーン関数

第 3 章で導出した異方性圧電体-等方性接合体のグリーン関数は、前述したように式を数値積分する必要がある。ここでは、閉形で求めることができる横等方性圧電体と等方性体の接合を考える。初めに、横等方圧電体の $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$ を示す。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 & (C_{12} + C_{66})n_1n_2 & 0 & 0 \\ (C_{12} + C_{66})n_1n_2 & C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 & e_{15} \\ 0 & 0 & e_{15} & -\kappa_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{55}n_1 & e_{15}n_1 \\ 0 & 0 & C_{44}n_2 & e_{24}n_2 \\ C_{13}n_1 & C_{32}n_2 & 0 & 0 \\ e_{15}n_1 & e_{24}n_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & e_{33} \\ 0 & 0 & e_{33} & -\kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (101)$$

ここで、 $C_{ijkl} = C_{mn}$, $e_{sij} = e_{sm}$ (ij or $kl \rightarrow m$ or $n : 11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23$ or $32 \rightarrow 4, 31$ or $13 \rightarrow 5, 12$ or $21 \rightarrow 6$) である。これらの行列から式(8)の行列方程式を導出すると

$$\begin{bmatrix} C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + p^2C_{44} & (C_{12} + C_{66})n_1n_2 & p(C_{55} + C_{13})n_1 & 2pe_{15}n_1 \\ (C_{21} + C_{66})n_1n_2 & C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + p^2C_{44} & p(C_{44} + C_{32})n_2 & 2pe_{15}n_2 \\ p(C_{55} + C_{13})n_1 & p(C_{32} + C_{44})n_2 & C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + p^2C_{33} & e_{15} + p^2e_{33} \\ 2pe_{15}n_1 & 2pe_{15}n_2 & e_{15} + p^2e_{33} & -\kappa_{11} - \kappa_{33}p^2 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (102)$$

が得られる。この式の係数行列の行列式を 0 とおいて、 p に関する 8 次方程式を解くと、 $\pm\sqrt{(C_{12} - C_{11})/2C_{44}}$ の他 6 つの解が得られる。これらの解は、全て複素数である。ここで、 $\text{Im}(p) > 0$ である根を p_1, p_2, p_3, p_4 とし、共役複素根を $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4$ する。なお、ここでは $p_1 = \sqrt{(C_{12} - C_{11})/2C_{44}}$ とする。これらの固有値に対する固有ベクトル $\mathbf{a}$ を求めると、以下のようになる。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T, \quad \mathbf{a}_j = \begin{Bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & a_{3j} & a_{4j} \end{Bmatrix}^T \quad (103)$$

ここで、

$$a_{3j} = -\frac{2e_{15}p_j(e_{15} + e_{33}p_j^2) + p_j(C_{13} + C_{44})(\kappa_{11} + \kappa_{33}p_j^2)}{(e_{15} + e_{33}p_j^2)^2 + (C_{44} + C_{33}p_j^2)(\kappa_{11} + \kappa_{33}p_j^2)}, \quad a_{4j} = -p_j \frac{C_{13}(e_{15} + e_{33}p_j^2) + (C_{44}e_{33} - 2C_{33}e_{15})p_j^2 - C_{44}e_{15}}{(e_{15} + e_{33}p_j^2)^2 + (C_{44} + C_{33}p_j^2)(\kappa_{11} + \kappa_{33}p_j^2)} \quad (104)$$

である。

また, $\mathbf{b}$ ベクトルは $\mathbf{b}_j = (\mathbf{R}^T + p_j \mathbf{T}) \mathbf{a}_j$ から求められる. これらの計算から $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ 行列は次式となる.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_{11} \sin\theta & b_{12} \cos\theta & b_{13} \cos\theta & b_{14} \cos\theta \\ b_{11} \cos\theta & b_{12} \sin\theta & b_{13} \sin\theta & b_{14} \sin\theta \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad (105)$$

ここで,

$$b_{11} = \sqrt{\frac{C_{44}(C_{12} - C_{11})}{2}}, \quad b_{1j} = a_{j3}C_{13} + a_{j4}e_{15} + C_{44}p_j, \quad b_{3j} = C_{44} + (a_{j3}C_{33} + a_{j4}e_{33})p_j, \\ b_{4j} = e_{15} + (a_{j3}e_{33} - a_{j4}K_{33})p_j \quad (j=2, 3, 4) \quad (\text{総和規約は適用しない}) \quad (106)$$

である.

共役の根に対応する $\bar{\mathbf{A}}$ および $\bar{\mathbf{B}}$ は, 以下のようになる.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ 0 & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ 0 & \bar{a}_{42} & \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} \sin\theta & \bar{b}_{12} \cos\theta & \bar{b}_{13} \cos\theta & \bar{b}_{14} \cos\theta \\ -b_{11} \cos\theta & \bar{b}_{12} \sin\theta & \bar{b}_{13} \sin\theta & \bar{b}_{14} \sin\theta \\ 0 & \bar{b}_{32} & \bar{b}_{33} & \bar{b}_{34} \\ 0 & \bar{b}_{42} & \bar{b}_{43} & \bar{b}_{44} \end{bmatrix} \quad (107)$$

$\bar{a}_{kl}$ および $\bar{b}_{kl}$ は, 式(106)に p_j の共役を用いた場合の値である. b_{11} は変わらないことに注意する.

初めに, 等方性体が導体で横等方性体中に荷重作用点がある場合の解を求める. そこで, 無限横等方圧電体に対する解である式(27)の $\mathbf{G}$ および $\bar{\mathbf{G}}$ を求めると,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\theta}{2b_{11}} & -\frac{\cos\theta}{2b_{11}} & 0 & 0 \\ g_{21} \cos\theta & g_{21} \sin\theta & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} \cos\theta & g_{31} \sin\theta & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} \cos\theta & g_{41} \sin\theta & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\theta}{2b_{11}} & \frac{\cos\theta}{2b_{11}} & 0 & 0 \\ g_{21}^* \cos\theta & g_{21}^* \sin\theta & g_{23}^* & g_{24}^* \\ g_{31}^* \cos\theta & g_{31}^* \sin\theta & g_{33}^* & g_{34}^* \\ g_{41}^* \cos\theta & g_{41}^* \sin\theta & g_{43}^* & g_{44}^* \end{bmatrix} \quad (108)$$

が得られる. また, 式(49), (50)の行列 $\mathbf{K}$ および $\mathbf{H}$ を求めると

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{b_{11} - i\mu}{b_{11} + i\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{\Phi 22}'' & g_{\Phi 23}'' & g_{\Phi 2}^\phi \\ 0 & g_{\Phi 32}'' & g_{\Phi 33}'' & g_{\Phi 3}^\phi \\ 0 & k_{\Phi 2}'' & k_{\Phi 3}'' & k_{\Phi 1}^\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{2ib_{11} \sin\theta}{b_{11} + i\mu} & h_{\Phi 12}'' \cos\theta & h_{\Phi 13}'' \cos\theta & h_{\Phi 1}^\phi \cos\theta \\ \frac{2ib_{11} \cos\theta}{b_{11} + i\mu} & h_{\Phi 12}'' \sin\theta & h_{\Phi 13}'' \sin\theta & h_{\Phi 1}^\phi \sin\theta \\ 0 & h_{\Phi 32}'' & h_{\Phi 33}'' & h_{\Phi 3}^\phi \end{bmatrix} \quad (109)$$

ここで, $g_{ij}, g_{ij}^*, g_{\Phi ij}'', g_{\Phi i}^\phi, h_{\Phi ij}'', h_{\Phi i}^\phi$ などの係数は材料定数からなる定数である.

つぎに, 等方性体が導体で, 等方性体中に荷重作用点がある場合の同様な行列を示す.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2\mu \sin \theta}{b_{11} + i\mu} & -\frac{2\mu \cos \theta}{b_{11} + i\mu} & 0 \\ g_{\Phi 21}'' \cos \theta & g_{\Phi 21}'' \sin \theta & g_{\Phi 23}'' \\ g_{\Phi 31}'' \cos \theta & g_{\Phi 31}'' \sin \theta & g_{\Phi 33}'' \\ k_{\Phi 1} \cos \theta & k_{\Phi 1} \sin \theta & k_{\Phi 3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{\Phi 111} + h_{\Phi 112} \cos^2 \theta & h_{\Phi 112} \cos \theta \sin \theta & h_{\Phi 13} \cos \theta \\ h_{\Phi 112} \cos \theta \sin \theta & h_{\Phi 221} + h_{\Phi 222} \cos^2 \theta & h_{\Phi 13} \sin \theta \\ h_{\Phi 31} \cos \theta & h_{\Phi 31} \sin \theta & h_{\Phi 33} \end{bmatrix} \quad (110)$$

等方性体が誘電体の場合も基本形は同じである．これらの式を第3章の応力および変位の式に代入し， θ に関して積分することにより，横等方性圧電体-等方性体のグリーン関数を閉形で求めることができる．例えば， $0 \leq x_3$ の f_3 に対する変位 u_1 の式は次式のように書くことができる．

$$u_1 = \frac{-i\pi x_1 f_3}{4\mu(1-\nu)} \left[d \left\{ \frac{g_{\Phi 21}''}{R_1^3} + \frac{g_{\Phi 31}''}{R_2^3} + \frac{\kappa_{\Phi 1}}{R_3^3} \right\} + \left\{ \frac{g_{\Phi 23}''}{R_1(z_1 + R_1)} + \frac{g_{\Phi 33}''}{R_2(z_2 + R_2)} + \frac{\kappa_{\Phi 3}}{R_3(z_3 + R_3)} \right\} \right] \quad (111)$$

ここで， $R_k = \sqrt{r^2 + z_k^2}$ ， $z_k = d - i\bar{p}_k x_3$ ($k=1, 2, 3$) である．

5. 解析例

本章では，材料2の等方体が導体である場合について，等方性体中に集中荷重が作用する場合の横等方性圧電体-等方性体の変位場，電気ポテンシャル場，電気変位場と応力場を示す．用いた材料定数は，PZT-6B と等方性の鉄に対するものである．ちなみに，等方性材料のポアソン比とヤング率をそれぞれ 0.30, 205[GPa]とした．ま

Fig.2 Contour maps for Green's functions

た, PZT-6B の材料特性は, $\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{44}\} = \{168, 163, 27.1, 60, 60\} [\text{GPa}]$, $\{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} = \{-0.9, 7.1, 4.6\} [\text{C/m}^2]$, $\{k_{11}, k_{33}\} = \{3600, 3400\} [\text{pC/Vm}]$ とした. ここでは, 集中荷重の作用点を $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5 \times 10^{-2})$, すなわち $d = 5 \times 10^{-2} [\text{m}]$ とし, 集中荷重の大きさを $(f_1, f_2, f_3) = (0, 0, 1)$ あるいは $(1, 0, 0) [\text{MN}]$ とした.

図 2 に変位, 応力などの $x_2=0$ の x_1 - x_3 断面上の分布を示す. 図 2(a) は集中荷重 f_1 が作用する場合の変位 u_3 の分布である. 変位は $x_1=0$ に関して反対称に分布しており, 界面で連続していることがわかる. 図 2(b) は集中荷重 f_3 に対する $x_3=0$ の面で 0 となる場合の電気ポテンシャルの分布である. 圧電材料中に発生し, $x_1=0$ 軸に対称に分布している. 図 2(c) は集中荷重 f_3 に対する応力 σ_{13} の分布である. 図 2(a) と同様に $x_1=0$ に関して反対称に分布している. 図 2(d) は f_3 に対する電気変位 D_3 の分布である. 電気変位は界面で 0 ではなく, 緩やかに分布している.

本研究では, 数式処理ソフトウェアを用いて, Stroh 形式の式変形を行った. 今回導いたグリーン関数を境界要素法の基本解に用いることにより, 高精度に圧電接合体の応力解析を行うことができると考える.

6. 結 言

本研究では, Stroh 形式を用いて異方性圧電体-等方性弾性体の三次元グリーン関数を二種類の界面の電氣的境界条件に対して求めた. また, 異方性材が横等方性の場合のグリーン関数を閉形で導出し, 集中荷重に対する変位, 応力分布を求めた. 以下に得られた知見をまとめて示す.

- (1) 異方性圧電体-等方性体のグリーン関数を等方性体が誘電体および導体である場合に対し求めることができた. 誘電体と導体で界面の電気ポテンシャルあるいは電気変位の境界条件が異なっているが, 基本的な解の形式は同じである.
- (2) 等方性が界面に平行な横等方性圧電体-等方性体のグリーン関数の閉形を求めることができた. Stroh 形式の場合, 数式処理ソフトウェアを用いて, 行列形式で式の変形を行うことにより理論式の展開を計算機上で容易に行うことができ, 最終的には応力, 変位を一括して導出することができる.

文 献

- (1) Rongved, L., "Force Interior to One of Two Jointed Semi-Infinite Solid", *Proceedings Second Midwestern Conference on Solid Mechanics*, (1945), pp.1-13.
- (2) Pan, Y. C. and Chou, T. W., "Point force solution for an infinite transversely isotropic solid", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.43, (1976), pp.608-612.
- (3) Pan, Y. -C. and Chou, T. -W., "Green's functions for two-phase transversely isotropic materials", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.46, (1979), pp.551-556.
- (4) Pan, E. and Yuan, F. G., "Three-dimensional Green's functions in anisotropic bimetals", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, (2000), pp.5329-5351.
- (5) Yuan, F. G., Yang, S. and Yang, B., "Three-dimensional Green's functions for composite laminates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, (2003), pp.331-342.
- (6) 古口日出男, "表面応力と表面弾性特性を考慮した表面グリーン関数 (Stroh 形式の三次元等方性弾性体への適用)", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.76, No.764 (2010), pp.531-538.
- (7) 古口日出男, "Stroh 形式を用いた異方性一等方性弾性体のグリーン関数", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.77, No.782(2011), pp.1770-1785.
- (8) Wang, Z. and Zheng, B., "The general solution of three-dimensional problems in piezoelectric media", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.32, No.1(1995), pp.105-115.
- (9) Ding, H. J., Chen, B. and Liang J., "On the Green's functions for two-phase transversely isotropic piezoelectric media", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.34, No.23 (1997), pp.3041-3057.
- (10) Pan, E., "Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic bimetals", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, Vol.53, (2002), pp.815-838.
- (11) Ting, T. C. T., *Anisotropic Elasticity*, (1996), pp.520-536, Oxford.