539.384.4 :: 539.373 : 539.4.012

弾 塑 性 柱 の 最 適 設 計*

甘 利 昌 彦**, 奥 村 敦 史**
Masahiko AMARI, Atsubumi OKUMURA

軸力を受ける柱の座屈を考慮した最適設計問題に関しては、柱の重量と弾性座屈に着目した研究が古くから扱われてきたが、実際の構造部材として重要と思われる塑性座屈をも考慮したものは少ない。

本論文では、全長と重量が定められた柱の、弾性および塑性座屈荷重を最大とする最適形状を求める問題を対象として、有限要素法と傾斜投影法を用いた能率の良い解法を示し、それを用いた数値計算の結果を述べる。

弾塑性柱の座屈問題は、Shanley らの接線係数理論を導入して、次式のような微分方程式によって特徴づけられる非線形の弾性問題として解析を行う。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ E_t(x) I(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $E_t(x)$ は接線係数、 $I(x)$ は断面二次モーメント、 P は軸圧縮力である。

柱の材料は、次のような Ramberg-Osgood の応力-ひずみ関係に従うものと仮定する。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \beta \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 E はヤング係数、 n はひずみ硬化指数 (加工硬化指数) の逆数、 β 、 σ_0 は定数である。接線係数 $E_t(x)$ は式 (2) を微分することによって次のように得られる。

$$E_t(x) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \left/ \left\{ 1 + \frac{\beta n E}{\sigma_0^n} \left(\frac{P}{A(x)} \right)^{n-1} \right\} \right. \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $A(x)$ は断面積である。

上式を式 (1) に代入し、通常のはり要素に対する有限要素法の定式化を用いて系を離散化し、ガレルキン法によって要素の剛性マトリックス、および軸力に対する幾何学的剛性マトリックスを求める。本論文では、座屈荷重、および座屈モードの計算は、伝達マトリックスを作成して、境界条件から座屈条件式を導き、試索によって求める。

最適化の計算には、非線形計画法の一つで、はん用性があると考えられる Rosen の傾斜投影法を用いる。計算に必要な、目的関数 (座屈荷重) の設計変数 (断面積分布) に関する傾斜は、離散化された系の平衡方程式を設計変数で微分することによって求められる。

図 1 弾塑性柱の最適設計例

数値計算例として、種々の材料、形状、境界条件を有する柱について、その最適形状を求めた。Rasmussen によって解析解の得られている、相似断面、両端単純支持の柱に対し比較を行った結果、図 1 に示すような良好な一致が得られた。図中の記号は、それぞれ以下に示すような無次元量である。

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \alpha = \frac{A(\xi)L}{V}, \quad A = \frac{PL^2}{EI_0}$$

$$\kappa = \frac{\beta n E^n}{\sigma_0^n} \left(\frac{L}{i_0} \right)^{2(1-n)}$$

ここに、 I_0 は定められた全長 L 、体積 V を有する規準となる均一柱の断面二次モーメント、 i_0 はその断面二次半径である。 A に付されている添字 opt, uni は、最適形状柱、均一柱の意味である。

断面が相似以外の場合や、両端固定、固定-支持などの境界条件についても妥当な解が得られ、材料の特性 (n および κ) を変化させて最適化計算を試みた結果、それぞれ均一柱に対して座屈荷重の増加が示された。

また、一部の境界条件下の柱では、最適形状の一部がくびれる兆候があり、材料の強度と工作上の問題を考慮して、設計変数の最小値をあらかじめ規定した最適化計算をも行った。

数値計算結果より、本解析手法の弾性および塑性座屈を考慮した柱の最適設計問題に対する有効性が確認された。

文 献

- (1) Rasmussen, S.H., *J. Struct. Mech.*, 4-3 (1976), 307.
- (2) Keller, J.B., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5 (1960), 275.

* 昭和 53 年 9 月 29 日 日立地方講演会において講演、原稿受付
昭和 54 年 3 月 2 日。本論文の詳細は Bull. 23 巻 178 号に掲載。

** 正員、早稲田大学理工学部 (〒160 東京都新宿区大久保 3-4-1)。