引張りと面内せん断を受ける無限小屈折き裂の弾性解析と 最大エネルギー解放率破壊条件*

影 山 和 郎**, 岡 村 弘 之***
Kazuro KAGEYAMA, Hiroyuki OKAMURA

Key Words: Fracture, Energy Release Rate, Mixed Mode, Infinitesimal Kink, Stress Intensity Factors, Maximum Energy Release Rate Criterion

1. 緒 言

き裂にモード I のみならず他の変形モードを生じる荷重が作用する場合の混合モード破壊条件として, 最大周方向応力説に基づく Erdogan-Sih⁽¹⁾ の破壊条件, Sih⁽²⁾ のひずみエネルギー密度破壊条件が知られている. これらの破壊条件はき裂が進展する以前のき裂先端近傍の応力-ひずみ分布に注目して導かれたものである. 一方これとは別の考え方として, き裂進展前後のエネルギー変化に注目する方法がある. 完全弾性体のエネルギー解放率 G はき裂進展方向の関数であることから, 最大エネルギー解放率破壊条件 (以後 $G_{\max}$ 破壊条件と略す) が, このようなエネルギーバランスの考えに立って提案されている.

$G_{\max}$ 破壊条件は Griffith のエネルギー論的破壊理論の混合モードへの拡張として, 小規模降伏が満足される場合その理論的根拠は明確であるが, その適用に際しては初期き裂から無限小屈折き裂が進展した状態の弾性解が必要であり, その解析的取扱いは困難となる. $G_{\max}$ 破壊条件の理論計算はすでに Hussain ら⁽³⁾ および Wang⁽⁴⁾ によってなされているが, 彼らの弾性解が Bilby ら⁽⁵⁾, 石田・西野⁽⁶⁾ の数値解析結果と大きく異なるという問題点を指摘できる. また G の評価式についても Hussain ら⁽³⁾, Bilby ら⁽⁷⁾, Tanaka-Ichikawa⁽⁸⁾ の式, Wang⁽⁴⁾ の式, Nuismer⁽⁹⁾ の式など, 応力拡大係数を用いたいくつかの表式が, それぞれ異なった仮定ないし前提のもとに提案されている. したがって, $G_{\max}$ 破壊条件の適用に際しては, 基礎となる弾性解とエネルギー解放率の評価に関するより詳細な解析的検討が必要と思われる.

著者らは先に連続分布転位を用いてき裂とすべり線ないしすべり帯を数値的に解析する一般的手法一分布

転位法一を提案し, いくつかの問題に対して精度の高い解析結果を得ている^{(10)~(12)}. 本方法を無限小屈折き裂の弾性解析に応用することは容易であり, 高精度の結果が期待できる. さらに本方法を用いれば屈折き裂周縁全域にわたって開口変位が計算できるので, き裂面分離エネルギーの定義に基づいて原理的に正しい G の評価が行える. したがって先に述べた G の評価式の有効性ならびに前提条件についても解析的検討を加えることができる. 本論文では引張りと面内せん断を受ける等方均質弾性体中の無限小屈折き裂を分布転位法を用いて解析し, 応力拡大係数 K_I , K_{II} とエネルギー解放率 G の一般解を求め, 従来の解析結果と比較・検討するとともに, 本解析結果に基づく $G_{\max}$ 破壊条件を新たに得ている.

2. 無限小屈折き裂の弾性解

き裂進展方向 θ の関数としての完全弾性体のエネルギー解放率 G の一般解を得るためには, 図 1 のように初期き裂から無限小屈折き裂が進展した状態の弾性解が必要となる. 屈折き裂あるいは分岐き裂の解析を行ったものには, 等角写像を用いた北川・結城^{(13)~(17)} の解析, 体積力法を用いた石田ら⁽⁶⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾ と村上⁽²³⁾, 転位分布を用いた Vitek⁽²⁰⁾ の解析などがあるが, これらはき裂進展量が有限の場合の結果を与えるものである. モード I と II の混合モードにおける無限小屈折き裂の解析を行ったものには, Hussain ら⁽³⁾, Wang⁽⁴⁾, Bilby ら⁽⁵⁾ などがあり, 石田・西野⁽⁶⁾ の結果は特別な場合として無限小屈折き裂を含んでいる.

図 1 無限小屈折き裂と応力拡大係数 K_I , K_{II}

* 昭和 56 年 10 月 20 日 第 59 期全国大会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和 56 年 4 月 2 日.

** 正員, 機械技術研究所 (〒305 茨城県新治郡桜村並木 1-2).

*** 正員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1),

き裂進展前の初期き裂の応力拡大係数 K_I, K_{II} に対し, x 軸に対して θ の角度をなす図1の無限小屈折き裂先端の応力拡大係数を $\bar{K}_I, \bar{K}_{II}$ とする. このとき θ のみの関数である係数 $c_{ij}(\theta)$ を用いた次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_I &= c_{11}(\theta)K_I + c_{12}(\theta)K_{II} \\ \bar{K}_{II} &= c_{21}(\theta)K_I + c_{22}(\theta)K_{II} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$c_{ij}(\theta)$ に関して, Hussain らと Wang のいわゆる理論解と Bilby ら, 石田らの解析結果が著しく異なっていることを指摘したい. たとえば c_{11} に注目すると, $\theta=90^\circ$ では Hussain らの結果は $c_{11}=0$, Wang の値も $c_{11} \approx 0$ なのに対し, 石田らの結果は $c_{11}=0.3719$ であり, Bilby らの結果も石田らの値にほとんど一致している. Hussain らも Wang も, 得られた弾性解をもとに Q を計算しているので, 彼らの $Q_{\max}$ 破壊条件の有効性についても $\bar{K}_I, \bar{K}_{II}$ の解析結果にもどって検討する必要がある.

無限小屈折き裂の開口変位のモード I, II 成分 δ_θ, δ_r は次式のように表示できる.

$$\left. \begin{aligned} \delta_\theta &= \frac{8}{E'} \sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}} \{c_{11}(\theta)f_{11}(r, \theta)K_I \\ &\quad + c_{12}(\theta)f_{12}(r, \theta)K_{II}\} \\ \delta_r &= \frac{8}{E'} \sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}} \{c_{21}(\theta)f_{21}(r, \theta)K_I \\ &\quad + c_{22}(\theta)f_{22}(r, \theta)K_{II}\} \\ E' &= E \text{ (平面応力)} \\ &= E/(1-\nu^2) \text{ (平面ひずみ)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに E と ν は縦弾性係数とポアソン比である. 屈折き裂先端近傍では $f_{ij}(r, \theta) \approx 1$ なので次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \delta_\theta &= \frac{8\bar{K}_I}{E'} \sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}} \\ \delta_r &= \frac{8\bar{K}_{II}}{E'} \sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}} \end{aligned} \right\} (r \approx \Delta a) \dots\dots\dots (3)$$

き裂進展前において, 図2のように初期き裂先端を原点とする極座標系の r 軸上の応力分布 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ より $\bar{K}_I, \bar{K}_{II}$ を次式で定義する.

$$\bar{K}_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta, \quad \bar{K}_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{r\theta} \dots\dots\dots (4)$$

$\bar{K}_I, \bar{K}_{II}$ は K_I, K_{II} と次式の関係にある. 係数 $d_{ij}(\theta)$ は初期き裂先端近傍の応力分布より容易に求められ

図2 $\bar{K}_I$ と $\bar{K}_{II}$ の定義

る.

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_I &= d_{11}(\theta)K_I + d_{12}(\theta)K_{II} \\ \bar{K}_{II} &= d_{21}(\theta)K_I + d_{22}(\theta)K_{II} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \\ d_{12} &= -\frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ d_{21} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ d_{22} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

3. 計 算 方 法

屈折き裂において, き裂進展量 Δa を零にすることは初期き裂長さ a を無限大にすることと等価なので, 半無限き裂から単位長さの屈折き裂が進展した場合を解析することにより, 無限小屈折き裂の解が得られる. 解析には著者らの提案した分布転位法⁽¹⁰⁾を用いた.

3.1 基本解 基本解は, 半無限き裂を有する無限板中に1本の刃状転位がある場合の合力の解である. 図3のように初期き裂先端を原点とする複素平面 $z = x + iy$ で考える. $z_0 = x_0 + iy_0$ に転位線が z 平面に垂直でバーガースベクトルの x, y 成分が b_x, b_y の刃状転位がある場合, 合力の x, y 成分 P_x と P_y の分布は森口⁽²¹⁾の鏡像の原理を用いて以下のようにして求めることができる.

図3の z 平面の半無限き裂は式(7)によって ζ 平面の虚数軸に写像される.

$$z = Z(\zeta) = \zeta^2 \dots\dots\dots (7)$$

Goursat の複素応力関数 $\varphi(z), \psi(z)$ を ζ の関数として表すとき, それぞれを $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ と書くことにする. このとき合力 P_x, P_y は次式で計算できる.

$$-P_y - iP_x = \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) + \{Z(\bar{\zeta})\Phi^I(\bar{\zeta}) + \Psi^I(\bar{\zeta})\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし, 添字 I は z に関する微分を表し, たとえば $\Phi^I(\zeta) = (d\Phi/d\zeta)/(dz/d\zeta)$ である. また共役記号 $-$ を上に付した関数は, その関数に含まれるすべての複素定数を共役にした関数を表す. き裂周縁での応力自

図3 半無限き裂と1本の刃状転位

由の条件を満たすため、補助の関数 $\chi(\zeta)$ を次式で定義する。

$$\chi(\zeta) = \bar{Z}(-\zeta)\Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

この $\chi(\zeta)$ は半無限き裂の境界 $L(\zeta = -\bar{\zeta})$ において

$$\chi(\zeta) = -\bar{\Phi}(\bar{\zeta}) \quad \dots\dots\dots (10)$$

となるように定めてある。したがって鏡像の原理を用いて L を越えての解析接続が次式のように定義できる。

$$\Phi(\zeta) = -\bar{\chi}(-\zeta), \quad \chi(\zeta) = -\bar{\Phi}(-\zeta) \quad \dots\dots\dots (11)$$

バーガースベクトル b_x, b_y を有し、転位線が z 平面に垂直な刃状転位が $z_0 = Z(\zeta_0)$ にあるときの複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ は $z = z_0$ に特異点を持ち、その主要部は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= B \log(z - z_0) \\ \psi(z) &= \bar{B}(z - z_0) \log(z - z_0) - B\bar{z}_0 \log(z - z_0) \\ B &= \frac{E'}{8\pi} (b_y - ib_x) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

z 平面の z_0 は ζ 平面の ζ_0 に対応し、 $\zeta \approx \zeta_0$ において次式が成立するから

$$\left. \begin{aligned} \Phi^I(\zeta) &\approx \frac{B}{z - z_0} \approx \frac{B}{2\zeta_0(\zeta - \zeta_0)} \\ \Psi^I(\zeta) &\approx \bar{B} \log(z - z_0) \\ &\quad - \frac{B\bar{z}_0}{z - z_0} \approx \bar{B} \log(\zeta - \zeta_0) - \frac{B\bar{\zeta}_0^2}{2\zeta_0(\zeta - \zeta_0)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$\zeta = \zeta_0$ での $\chi(\zeta)$ の主要部は式 (9) より次式で与えられる。

図 4 屈折き裂境界の分割

$$\chi(\zeta) = \frac{B(\zeta_0^2 - \bar{\zeta}_0^2)}{2\zeta_0(\zeta - \zeta_0)} + \bar{B} \log(\zeta - \zeta_0) \quad \dots\dots\dots (14)$$

また $\zeta = \zeta_0$ での $\Phi(\zeta)$ の主要部は式 (12) より

$$\Phi(\zeta) = B \log(\zeta - \zeta_0) \quad \dots\dots\dots (15)$$

式 (11) によって L を越えて解析接続を行うと、 $\zeta = -\bar{\zeta}_0$ に特異点が現れ、その主要部は

$$\Phi(\zeta) = -\frac{\bar{B}(\zeta_0^2 - \bar{\zeta}_0^2)}{2\bar{\zeta}_0(\zeta + \bar{\zeta}_0)} - B \log(\zeta + \bar{\zeta}_0) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\chi(\zeta) = -\bar{B} \log(\zeta + \bar{\zeta}_0) \quad \dots\dots\dots (17)$$

内部き裂の場合⁽¹⁰⁾と異なり、無限遠方でのくいちがいは応力に寄与しない。以上の結果をまとめると

$$\Phi(\zeta) = B \log \left\{ \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta + \bar{\zeta}_0} \right\} - \frac{\bar{B}(\zeta_0^2 - \bar{\zeta}_0^2)}{2\bar{\zeta}_0(\zeta + \bar{\zeta}_0)} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\chi(\zeta) = \bar{B} \log \left\{ \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta + \bar{\zeta}_0} \right\} - \frac{B(\zeta_0^2 - \bar{\zeta}_0^2)}{2\zeta_0(\zeta - \zeta_0)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\Psi^I(\zeta) = \chi(\zeta) - \bar{Z}(-\zeta)\Phi^I(\zeta) \quad \dots\dots\dots (20)$$

すなわち、半無限き裂と刃状転位の複素応力関数は式 (18)~(20) で与えられる。これらを式 (8) に代入し、さらに式 (7) を用いて $\zeta, \bar{\zeta}_0$ の代わりに z, z_0 を用いて表すと合力 P_x, P_y を次式で得る。

$$\begin{aligned} -P_y - iP_x &= 2\bar{B} \log \left| \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \right| + B \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2\sqrt{z_0}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}} + \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \right\} \\ &\quad - \frac{z - \bar{z}}{2\sqrt{z}} \left[B \left\{ \frac{1}{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}} - \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \right\} + \bar{B} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2\sqrt{z_0}(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})^2} \right] \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

3.2 計算手順 図4のように屈折き裂となる境界を N 等分割し、初期き裂先端の ZP_1 から屈折き裂先端の ZP_{N+1} まで分割点に番号を付ける。 ZP_i と ZP_{i+1} を端点に持つ区間を区間 i とする。区間 i に作用する区間合力の x, y 成分 $\Delta P_{xi}, \Delta P_{yi}$ を端点の合力の差 $[P_x]_{ZP_i, ZP_{i+1}}, [P_y]_{ZP_i, ZP_{i+1}}$ で定義する。区間合力は境界に作用する応力を区間で積分したものに等しい。転位密度は区間内一様の階段状の分布を仮定する。区間 j の転位密度の x, y 成分を ρ_{xj}, ρ_{yj} とするとき、この転位密度によって生じる区間合力 $\Delta P_{xi}^{in}, \Delta P_{yi}^{in}$ を与える影響係数マトリックスを式 (21) を用いて計算する。ただし、式 (21) は 1 本の転位に対する解なので、区間内で一様に分布する転位の場合には式 (21) をその区間上で積分する必要があるが、それにはガウスの積分公式の 3 分割法を用いた⁽²²⁾⁽¹⁰⁾。さらに区間合力と転位密度は極座標表示した方が便利なので、次式のような座標変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_{ri} &= \Delta P_{xi} \cos \theta + \Delta P_{yi} \sin \theta \\ \Delta P_{\theta i} &= -\Delta P_{xi} \sin \theta + \Delta P_{yi} \cos \theta \\ \rho_{ri} &= \rho_{xi} \cos \theta + \rho_{yi} \sin \theta \\ \rho_{\theta i} &= -\rho_{xi} \sin \theta + \rho_{yi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$i, j = 1, \dots, N$ の場合を考えることにより、転位密度 ρ_{xj}, ρ_{yj} と転位による区間合力 $\Delta P_{ri}^{in}, \Delta P_{\theta i}^{in}$ の関係を与える全体影響係数マトリックスが作成される。

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{r1}^{in} \\ \Delta P_{\theta1}^{in} \\ \vdots \\ \Delta P_{rN}^{in} \\ \Delta P_{\theta N}^{in} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{TIM} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{r1} \\ \rho_{\theta1} \\ \vdots \\ \rho_{rN} \\ \rho_{\theta N} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(23)$$

き裂進展前の r 軸上の応力分布は、半無限き裂の場合任意の r に対して式 (5) の $\hat{K}_I$, $\hat{K}_{II}$ を用いて

$$\sigma_{\theta} = \hat{K}_I / \sqrt{2\pi r}, \quad \tau_{r\theta} = \hat{K}_{II} / \sqrt{2\pi r} \dots\dots\dots(24)$$

となるので、外力による区間合力 ΔP_{ri}^{ap} , $\Delta P_{\theta i}^{ap}$ は $r_i = |ZP_i|$ として次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_{ri}^{ap} &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} -\tau_{r\theta} dr = \hat{K}_{II} R_i \\ \Delta P_{\theta i}^{ap} &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} -\sigma_{\theta} dr = \hat{K}_I R_i \\ R_i &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{r_{i+1}} - \sqrt{r_i}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

き裂の条件は

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_{ri}^{in} + \Delta P_{ri}^{ap} &= 0 \\ \Delta P_{\theta i}^{in} + \Delta P_{\theta i}^{ap} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, N) \dots\dots\dots(26)$$

であるから、式 (25), (26) を式 (23) に代入して、式 (23) の連立一次方程式を解けば、き裂と等価な転位密度分布が得られる。 $r=r_i$ におけるき裂開口変位は、その分布 ρ_{rk} , $\rho_{\theta k}$ を用いて次式で計算できる。

$$\delta_{\theta}(r_i) = \sum_{k=i}^N \rho_{\theta k} \Delta r, \quad \delta_r(r_i) = \sum_{k=i}^N \rho_{rk} \Delta r \dots\dots\dots(27)$$

このように本解析では、初期き裂周縁の応力自由の条件を式 (21) を用いることにより厳密に満足させている。また進展き裂においても合力法の採用により、各区間で応力の平均値は正しく零となっている。数値解と分割数の逆数 $1/N$ の間には良い直線関係があるので、 $N_1, N_2 = 2N_1$ の二とおりの分割数について $1/N = 0$ の値を外そうすることにより、ほとんど分割数によらない結果が得られる⁽¹⁰⁾。さらに本解析では $N = 64, 128, 256$ について外そうを行っている⁽¹²⁾。

4. 応力拡大係数の結果

得られた開口変位分布を式 (3) に代入し、次式で無限小屈折き裂先端の応力拡大係数を計算する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{K}_I &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta a - r_i}} \delta_{\theta}(r_i) \\ \hat{K}_{II} &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta a - r_i}} \delta_r(r_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

開口変位としては、屈折き裂先端から $\Delta a/16$ および $\Delta a/32$ 離れた点 ($r_i/\Delta a = 0.9375, 0.96875$) の値を用い、両者の結果が異なる場合には外そうにより屈折き裂先端の値を推定した。表 1 に $\theta = 60^\circ$, $K_{II} = 0$ の場合の δ_{θ} , δ_r に対して、式 (3) の第一近似値を

$\delta_{\theta}^\circ \delta_r^\circ$ として両者の比を示してあるが、それぞれは式 (2) の f_{11} , f_{21} の分布の結果に相当している。 $r/\Delta a = 0.875$ でも式 (28) は 0.02% の誤差範囲で有効であり、さらに本解析ではさらに屈折き裂先端に近い点で開口変位を評価していることを考えれば、式 (28) の適用は十分妥当なものと考ええる。

表 2 と図 5 に式 (1) の c_{ij} の本解析結果を示す。表 2 には比較のため石田ら⁽⁶⁾の結果もあわせて示してあるが両者は非常に良く一致し、四けためがわずかに異なる程度である。図 5 には、式 (6) の d_{ij} の値も破線で示してある。さらに本論文では解析結果をもと

表 1 開口変位の分布

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{\theta}^\circ \\ \delta_r^\circ \end{aligned} \right\} = \frac{8\pi}{E'} \sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}} \left\{ \begin{aligned} \hat{K}_I \\ \hat{K}_{II} \end{aligned} \right\} \quad \theta = 60^\circ, \quad K_{II} = 0$$

$r/\Delta a$	$\delta_{\theta}/\delta_{\theta}^\circ$	δ_r/δ_r°
0.0	0.973 6	1.078
0.062 5	0.994 1	1.037
0.125	0.997 7	1.025
0.25	1.000 1	1.014
0.375	1.000 8	1.008
0.5	1.001 0	1.005
0.625	1.000 8	1.002 4
0.75	1.000 5	1.001 1
0.875	1.000 1	1.000 2
0.937 5	1.000 0	1.000 0

表 2 $c_{ij}(\theta)$ の本解析結果および石田ら⁽⁶⁾の結果との比較

θ	c_{11}		c_{21}	
	本 解 析	石 田 ら	本 解 析	石 田 ら
0	1.000 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0
15	0.974 6	0.974 6	0.128 1	0.128 1
30	0.901 7	0.901 8	0.240 3	0.240 2
40	0.831 3		0.299 5	
45	0.791 0	0.790 9	0.323 3	0.323 2
50	0.747 9		0.343 0	
60	0.655 9	0.655 7	0.369 3	0.369 1
70	0.559 7		0.378 3	
75		0.511 3		0.376 1
80	0.463 8		0.370 7	
90	0.372 1	0.371 9	0.348 2	0.348 0

θ	c_{12}		c_{22}	
	本 解 析	石 田 ら	本 解 析	石 田 ら
0	0.000 0	0.000 0	1.000 0	1.000 0
15	-0.385 6	-0.385 6	0.947 4	0.947 3
30	-0.730 0	-0.729 9	0.797 5	0.797 5
40	-0.919 3		0.654 3	
45		-0.998 3		0.573 5
50	-1.067 0		0.487 4	
60	-1.168 5	-1.168 2	0.308 0	0.308 6
70	-1.222 3		0.127 1	
75		-1.231 3		0.040 3
80	-1.229 6		-0.044 3	
90	-1.194 0	-1.193 8	-0.196 7	-0.196 0

に $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲で有効な c_{ij} の内そう式を得ている。

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) (1 + 0.051\xi^4) \\ c_{12} &= -\frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta (1 + 0.060\xi^2 + 0.064\xi^4) \\ c_{21} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta (1 - 0.048\xi^2 + 0.033\xi^4) \\ c_{22} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) + 0.242\xi^2 - 0.085\xi^4 \\ &\dots\dots\dots(29) \end{aligned} \right\}$$

$\xi = \theta/90$ (度), $2\theta/\pi$ (ラジアン) $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
解析解との差は c_{11} , c_{12} , c_{21} に関して 0.3% 以内,
 c_{22} に関して 0.1% または絶対値で 0.001 以内である。

5. エネルギー解放率の評価式

モード I と II の混合モード状態において θ 方向にき裂が進展したときの等方均質な弾性体のエネルギー解放率 $\mathcal{G}$ を計算するに際して、応力拡大係数と $\mathcal{G}$ の関係式がいくつか提案されている。Hussain ら⁽³⁾, Bilby ら⁽⁷⁾, Tanaka ら⁽⁸⁾は式 (30), Wang⁽⁴⁾は式 (31), Nuismer⁽⁹⁾は式 (32) で $\mathcal{G}$ が与えられると考えた。

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} (\bar{K}_I^2 + \bar{K}_{II}^2) \dots\dots\dots(30)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} (\bar{K}_I \hat{K}_I + \bar{K}_{II} \hat{K}_{II}) \dots\dots\dots(31)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} (\hat{K}_I^2 + \hat{K}_{II}^2) \dots\dots\dots(32)$$

図 5 無限小屈折き裂の応力拡大係数 $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ の係数 $c_{ij}(\theta)$

式 (30) は無限小屈折き裂が生じた後さらにき裂がその延長方向に進展したときのエネルギー解放率であって、エネルギーの連続性を仮定して初期き裂からのき裂進展に適用したものと考えられる⁽⁸⁾。式 (31) は無限小屈折き裂の開口変位がその全域において式 (3) の分布をすると仮定して導かれたものであるが、式 (3) が有効なのは $r = \Delta a$ 近傍であって、 Δa 全域において Wang の仮定が成立する保証はなく、表 1 の本解析結果もそのことを示している。式 (32) はき裂進展前後の応力の連続性を仮定して導かれたが図 5 の結果より一般には $c_{ij} \neq d_{ij}$ であり、この仮定は満足されていないことがわかる。このように $\mathcal{G}$ の評価式としての式 (30)~(32) は何らかの仮定ないし前提を設けており、特に式 (31), (32) に関してはその仮定の成立を疑問とする解析結果を得ている。ところで $\mathcal{G}$ はき裂面分離エネルギーであるから、その定義にもとって次式を計算すれば、原理的に正しく $\mathcal{G}$ を評価したことになる。

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} (\sigma_\theta \delta_\theta + \tau_{r\theta} \delta_r) dr \dots\dots\dots(33)$$

分布転位法を用いれば開口変位分布が計算できるので、エネルギー解放率の定義に忠実に式 (33) による $\mathcal{G}$ の評価が可能となる。そこで本論文では次式を用いて $\mathcal{G}$ を数値的に計算した。

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2\Delta a} \sum_{i=1}^N \left\{ -\Delta P_{\theta i}^{ap} \frac{\delta_\theta(r_i) + \delta_\theta(r_{i+1})}{2} - \Delta P_{r i}^{ap} \frac{\delta_r(r_i) + \delta_r(r_{i+1})}{2} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

ここに、 $\Delta P_{\theta i}^{ap}$, $\Delta P_{r i}^{ap}$ および $\delta_\theta(r_i)$, $\delta_r(r_i)$ は式 (25), (27) で与えられる。また半無限き裂の場合はすでに $\Delta a/a = 0$ なので、 $\lim$ の記号は省略できる。

6. エネルギー解放率の一般解

初期き裂の応力拡大係数 K_I , K_{II} を用いた $\mathcal{G}$ の一般解

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} \{ h_1(\theta) K_I^2 + 2h_{12}(\theta) K_I K_{II} + h_2(\theta) K_{II}^2 \} \dots\dots\dots(35)$$

表 3 h_1 , h_2 , $2h_{12}$ の結果

θ	h_1	h_2	$2h_{12}$
0	1.0000	1.0000	0.0000
15	0.9661	1.0459	-0.5088
30	0.8708	1.1681	-0.9331
40	0.7806	1.2719	-1.1359
50	0.6767	1.3747	-1.2607
60	0.5662	1.4589	-1.3042
70	0.4559	1.5088	-1.2709
80	0.3521	1.5124	-1.1723
90	0.2594	1.4629	-1.0244

における係数 $h_1(\theta)$, $h_{12}(\theta)$, $h_2(\theta)$ を計算し (手順の詳細は付録参照), 結果を表 3 および図 6 に示す. さらにこれらの結果をもとに $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲で有効な内そう式を得た.

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) (1 - 0.003 \xi^2 + 0.041 \xi^4) \\ 2h_{12} &= -2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta (1 - 0.003 \xi^2 + 0.027 \xi^4) \\ h_2 &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (5 - 3 \cos \theta) [1 + \sin^2 \theta (0.168 + 0.02 \cos 3\theta)] \\ \xi &= \theta/90 \text{ (度)}, \quad 2\theta/\pi \text{ (ラジアン)} \end{aligned} \right\} \quad (-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ) \quad \dots\dots\dots (36)$$

解析解との差は h_1 , h_{12} に関して 0.1% 以内, h_2 に関して 0.2% 以内である.

$\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ とエネルギー解放率の定義に忠実な式 (33) による $\mathcal{Q}$ の解析解が得られたので, $\mathcal{Q}$ と $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ の関係式 (30) の有効性を数値的に検討することができる. 式 (30) より得られる値を式 (33) に基づく $\mathcal{Q}$ と区別するため $\bar{\mathcal{Q}}$ と書くことにする. 式 (1) を式 (30) に代入すれば $\bar{\mathcal{Q}}$ に関しても式 (35) と同様な K_I , K_{II} を用いた次式が成立する.

$$\bar{\mathcal{Q}} = \frac{1}{E'} (\bar{K}_I^2 + \bar{K}_{II}^2) = \frac{1}{E'} \{ \bar{h}_1(\theta) K_I^2 + 2\bar{h}_{12}(\theta) K_I K_{II} + \bar{h}_2(\theta) K_{II}^2 \} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\bar{h}_1 = c_{11}^2 + c_{21}^2, \quad \bar{h}_{12} = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22}, \quad \bar{h}_2 = c_{12}^2 + c_{22}^2 \quad \dots\dots\dots (38)$$

c_{ij} の解析結果より $\bar{h}_{ij}$ を計算し, それを表 3 に示した. $\mathcal{Q}$ の h_{ij} の結果と比較したのが表 4 である. $\bar{h}_{ij}$ と h_{ij} の差は最大 0.1% であり, 関係式 (30) の成立を解析誤差の範囲内で確認した.

7. $\mathcal{Q}_{\max}$ 破壊条件

き裂はエネルギー解放率を最大とする方向に, その最

大値が材料の限界値に達したとき伝ばを開始するという, 最大エネルギー解放率に基づく $\mathcal{Q}_{\max}$ 破壊条件を考える. モード I の場合に $\mathcal{Q}$ の限界値は K_{Ic}^2/E' (K_{Ic} : 平面ひずみ破壊じん性値) に一致することから, この破壊条件は次式のように表される. ただしき裂面の分離力 σ_0 は正でなければならないから, 付帯条件として式 (40) が必要である.

$$\max_{\theta} \mathcal{Q}(\theta) = K_{Ic}^2/E' \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\bar{K}_I > 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

本解析により $\mathcal{Q}$ の内そう式が式 (35), (36) で得られているので, K_I と K_{II} の任意の組合わせに対して $\mathcal{Q}$ の最大値とその方向 θ が容易に計算できる. K_I と K_{II} の組合せの比を表すパラメータ β を次式で定義する.

$$\beta = \tan^{-1}(K_I/K_{II}) \quad \dots\dots\dots (41)$$

図 7 に示す単軸引張りを受ける無限板中の傾斜き裂の場合, β はき裂と荷重軸のなす角に等しい.

本論文では $K_I \geq 0$ の引張り荷重の場合を考える. すき間が零の理想き裂の場合, 圧縮荷重下ではき裂が

図 6 エネルギー解放率の一般解, 式 (35) の係数 $h_{ij}(\theta)$

図 7 無限板中の傾斜き裂

閉口し $K_I = 0$ となるので, $\beta = 0$ と置けばよい. ただしき裂面に摩擦力が作用する場合にはその寄与を差引いた実効的な K_{II} を用いる必要がある. 有限なすき間を有するき裂では $K_I < 0$ の場合, き裂面が部分的に接触する状態が想定され, 初期き裂の解析を複雑な接触問題として取扱う必要があるので, 本論文では考えないことにする.

$G_{\max}$ 破壊条件の本解析結果を図 8, 9 に示す. 図 8 には β とき裂進展方向 $-\theta$ の関係を, 図 9 には K_I と K_{II} に関する破壊限界曲線を, Erdogan-Sih の破壊条件⁽¹⁾と $\nu = 0.3$ の場合のひずみエネルギー密度 (S_{min}) 破壊条件⁽²⁾とともに示してある. 本論文で得られた $G_{\max}$ 破壊条件の結果は Erdogan-Sih の破壊条件と比較的良く似た傾向にあり, 両者の差は θ の絶対値が小さいほど小さい. 本論文の結果は Hussain ら⁽³⁾および Wang⁽⁴⁾ の $G_{\max}$ 破壊条件の結果と一致しないが, それは先に指摘したように彼らの弾性解と G の評価式に問題があるためと考えられる. Bilby ら⁽⁷⁾は $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ の解析解をもとに式 (30) の関係式を用いて $G_{\max}$ 破壊条件, より厳密に言えば $\bar{G}_{\max}$ 破壊条件を計算しているが, 本解析結果より G の評価

式としての式 (30) の有効性が確認されており, 本論文と Bilby らの結果は良く一致する.

$\bar{K}_{II} = 0$, すなわち無限小進展き裂先端がモード I のみとなる方向と $G_{\max}$ の方向を比較したのが図 10 である. 解析した β の全範囲で両者の差は 1° 未満となった. したがって G を最大にする方向は内そう式 (29) を用いて式 (1) の $\bar{K}_{II}$ を零とする θ を計算することによっても評価できる. すなわち $G_{\max}$ 破壊条件で支配される破壊過程はモード I のみの開き形の変形モードでき裂が進展する過程であり, そこでの破壊条件は $\bar{K}_I = K_I$ と等価になっている.

8. 結 言

K_I と K_{II} の組合せ変形モードにおける初期き裂先端から θ 方向に無限小屈折き裂が進展した場合の弾性解析を分布転位法を用いて行い以下の結果を得た.

(1) 無限小屈折き裂先端の応力拡大係数 $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ の一般解を求め, $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲で有効な内そう式を得た.

(2) θ の関数としてのエネルギー解放率 G を, その定義に従って計算し, G の一般解を求めるとともに, $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ において有効な内そう式を得た.

(3) G と応力拡大係数の間の次式の関係が 0.1% の解析誤差の範囲内で成立することを確認した.

$$G = \frac{1}{E'} (\bar{K}_I^2 + \bar{K}_{II}^2)$$

(4) 本解析結果をもとに $G_{\max}$ 破壊条件を計算し, き裂進展方向と破壊限界曲線の結果を得た. 本論文の結果は Hussain ら, Wang の結果と一致しないが, これは彼らの弾性解と G の評価式に問題があるためと考えられる.

(5) $\bar{K}_{II}$ が零となる方向と G が最大となる方向はほぼ完全に一致した. すなわち $G_{\max}$ 破壊条件に従う場合, き裂はモード I のみの開き形の変形モードで進展することになる.

図 8 き裂進展方向の結果

図 9 破壊限界曲線の結果

図 10 G を最大とする方向と $\bar{K}_{II}$ を零とする方向の比較

〔付録〕

Q の一般解の係数を求める手順

式 (33) において Q をモード I と II の変形モードに分離する.

$$Q = Q_I + Q_{II} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$Q_I = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{1}{2da} \int_0^{da} \sigma_\theta \delta_\theta dr, \quad Q_{II} = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{1}{2da} \int_0^{da} \tau_{r\theta} \delta_r dr \quad \dots\dots\dots (43)$$

ここで、無限小屈折き裂の δ_θ , δ_r および σ_θ , $\tau_{r\theta}$ がそれぞれ式 (2), (24) のように表されるから、式 (5), (6) の関係を用いると Q_I と Q_{II} が結局次式で与えられることがわかる.

$$\left. \begin{aligned} Q_I &= \frac{1}{E'} \left\{ g_{11} K_I^2 + \left(\frac{d_{11}}{d_{12}} g_{12} + \frac{d_{12}}{d_{11}} g_{11} \right) K_I K_{II} + g_{12} K_{II}^2 \right\} \\ Q_{II} &= \frac{1}{E'} \left\{ g_{21} K_I^2 + \left(\frac{d_{21}}{d_{22}} g_{22} + \frac{d_{22}}{d_{21}} g_{21} \right) K_I K_{II} + g_{22} K_{II}^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

ただし、 g_{ij} は K_I または K_{II} のみが単独に作用する場合の Q_I , Q_{II} より次式で定義されるものである.

$$\left. \begin{aligned} Q_I &= g_{11} \frac{K_I^2}{E'}, \quad Q_{II} = g_{21} \frac{K_I^2}{E'} & (\text{モード I}) \\ Q_I &= g_{12} \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad Q_{II} = g_{22} \frac{K_{II}^2}{E'} & (\text{モード II}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

式 (44) より h_{ij} は次式で与えられる.

$$h_1 = g_{11} + g_{21}, \quad 2h_{12} = \frac{d_{11}}{d_{12}} g_{12} + \frac{d_{12}}{d_{11}} g_{11} + \frac{d_{21}}{d_{22}} g_{22} + \frac{d_{22}}{d_{21}} g_{21}, \quad h_2 = g_{12} + g_{22} \quad \dots\dots\dots (46)$$

すなわち、 Q を Q_I と Q_{II} に分離し、 K_I のみまたは K_{II} のみが単独に作用する場合の Q_I , Q_{II} より g_{ij} を計算すれば、 d_{ij} はすでにわかっているから式 (46) より $h_{ij}(\theta)$ が計算できる. このようにすれば各 θ に対してそれぞれ 2 回の弾性解析を行うだけで Q の一般解の 3 個の未知係数を決定できる.

文 献

- (1) Erdogan, F. and Sih, G.C., *Trans. ASME, Ser. D*, 85-4 (1963), 519.
- (2) Sih, G.C., 編, *Mechanics of Fracture I*, (1973), XXI, Noordhoff Int. Publ.
- (3) Hussain, M.A., ほか 2 名, *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 560 (1974), 2.
- (4) Wang, T.C., *Proc. 4th Int. Conf. Fract.*, Waterloo, 4 (1977), 135.
- (5) Bilby, B.A., ほか 2 名, *Proc. 4th Int. Conf. Fract.*,

- Waterloo, 3 (1977), 197.
- (6) 石田・西野, 機講論, No. 790-3 (昭 54-4), 134.
- (7) Bilby, B.A. and Cardew, G.E., *Int. J. Fract.*, 11-4 (1975), RCR 708.
- (8) Tanaka, S. and Ichikawa, M., *Int. J. Fract.*, 15-2 (1979), RCR 49; 15-5 (1979), RCR 183.
- (9) Nuismer, R.J., *Int. J. Fract.*, 11-2 (1975), 245.
- (10) 宮本・ほか 2 名, 機論, 45-395, A (昭 54), 750.
- (11) 岡村・ほか 2 名, 機講論, No. 790-2 (昭 54-4), 26.
- (12) 岡村・ほか 2 名, 機講論, No. 800-1 (昭 55-4), 61.
- (13) 北川・結城, 機論, 41-346 (昭 50), 1641.
- (14) 北川・結城, 機講論, No. 750-1 (昭 50-4), 223.
- (15) 北川・結城, 機講論, No. 750-11 (昭 50-10), 183.
- (16) 北川・結城, 機論, 44-386 (昭 53), 3346.
- (17) 北川・結城, 機講論, No. 780-3 (昭 53-4), 164.
- (18) 石田, 機論, 44-380 (昭 53), 1122.
- (19) 石田・野口, 機講論, No. 800-2 (昭 55-4), 131.
- (20) Vitek, V., *Int. J. Fract.*, 13-4 (1977), 481.
- (21) 森口, 現代応用数学, B.7-a (昭 32), 岩波書店.
- (22) 村上・西谷, 機論, 41-348 (昭 50), 2255.
- (23) 村上, 機講論, No. 790-12 (昭 54-10), 85.

討 論

〔質問〕 西谷 弘 信 (九州大学工学部)

(1) 屈折き裂の応力拡大係数 $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ を式 (27), (28) から計算しておられるが、 K はき裂先端で無限大となる弾性応力を測る尺度だから、き裂先端の転位密度 $\rho_{\theta N}$, ρ_{rN} を用いて決めることはできないか [実用上は式 (28) で何ら問題はないと思うが、 $\rho_{\theta N}$, ρ_{rN} を用いる方がより合理的ではないか].

(2) 式 (4) の $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ の物理的意味はどのようにお考えか.

〔回答〕 (1) 本論文では式 (33) を用いて原理的に正しくエネルギー解放率を評価しているが、この場合 σ_θ と $\tau_{r\theta}$ はすでにわかっているから、開口変位 δ_θ と δ_r を精度良く計算することが重要となる. そこで表 1 に示すような開口変位分布を求めるとともに、その数値解の精度を検討することを一つの目的として δ_θ と δ_r から $\bar{K}_I$ と $\bar{K}_{II}$ を計算した. それが本論文において特に式 (27), (28) を用いて $\bar{K}_I$ と $\bar{K}_{II}$ を評価した理由である. $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ を精度良く計算

付表 1 $N=8, 16$ の場合

θ	C_{11}	C_{21}	C_{12}	C_{22}
30	0.9003	0.2398	-0.7286	0.7957
60	0.6546	0.3684	-1.1654	0.3068
90	0.3714	0.3469	-1.1893	-0.1969

することだけを考えた場合にはご指摘のようにき裂先端区間の転位密度を用いる方がより合理的と考えるが、その場合にはき裂先端の特異性を考慮した転位密度を仮定することにより、さらに精度の改善が期待できると思われる。

(2) き裂進展前の応力分布は θ の関数としての $\hat{K}_I(\theta)$, $\hat{K}_{II}(\theta)$ を用いて、

$$\sigma_\theta = \hat{K}_I(\theta)/\sqrt{2\pi r}, \quad \tau_{r\theta} = \hat{K}_{II}(\theta)/\sqrt{2\pi r} \quad (r \ll a)$$

と表されるので、初期き裂先端近傍の θ 方向における応力の特異性の大きさを表す一つのパラメータと考えている。なお、Erdogan-Sih の破壊条件は

$$\hat{K}_I(\theta) = K_{Ic}, \quad \hat{K}_{II}(\theta) = 0$$

と等価になっている。

〔質問〕 村上 敬 宜 (九州大学工学部)

本論文の詳細な数値計算により、これまであいまいであった問題点がかなり明確になったと思う。

数値計算の方法についてうかがいたい。786 ページ左欄 26 行めに述べられた分割数 64, 128, 256 というのは、質問者らのこれまでの方法から予想するとかかなり大きいと思う。これは、転位分布を区間内一様の階段状にしたために必要になったものと考えられる。

転位分布を無限板中に一つのき裂が存在するときの解析的な解に重みをつける形にして決定すれば、重みは区間内で一定となるが、転位分布は区間内でも変化するので分割区間が減少し、かつ精度が向上すると思うがいかがか。そのようにすれば、先端の区間の重みから K_I , K_{II} を決定できる利点もある。本論文では、先端の区間の転位密度はどのような値をとっているか。

〔回答〕 有意義なご指摘に感謝する。西谷氏への回答と関連するが、式 (33) に基づいてエネルギー解放率 G を評価する場合には屈折き裂全域で開口変位分布を精度良く計算する必要があると考え、比較的大きな分割数を用いた。本論文で用いた分割数では G の数値解に関しては小数点以下三けたまで一致する結果が得られ、さらにそれらの外そう値として表 2 の結果を示してある。 $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ を評価するためだけであれば、分割数がわずか 8, 16 であっても、 $r_i/a=0.75$ と 0.875 に対して式 (28) を適用した場合、付表 1 のようになり、本論文の結果と比較しても 0.1~0.4% の誤差範囲内の結果が得られ、精度的にも実用上問題はないと思う。しかしご質問にもあるき裂先端区間の転位密度から直接 $\bar{K}_I$, $\bar{K}_{II}$ を求めるためには階段状の転位密度分布では不十分な点もあり、この場合にはご指摘のようなき裂先端の特異性を考慮した取扱いも必要になると思う。またこの方法は開口変位分布の評価においても有効と考えられ、今後検討を加えていきたいと思う。