き裂による平面調和弾性波の散乱*

高 久 田 和 夫**
Kazuo TAKAKUDA**Key Words:** Elasticity, Dynamic Problem, Integral Equation Method, Crack, Stress Intensity Factor, Elastic Wave

1. 緒 言

き裂を有する弾性体の応力解析は、材料の破壊強度の問題に関連して重要であり、多くの研究が発表されている。

動的問題(2次元)に関しては、無限体中のき裂にSH波、P波あるいはSV波が入射する場合について、LoeberとSih⁽¹⁾⁽²⁾およびMal⁽³⁾が扱っている。また、一直線上に並ぶ二つのき裂の問題がItou⁽⁴⁾により、き裂と境界面の干渉の問題が半澤ら⁽⁵⁾によりそれぞれ研究されている。

これらの解析ではいずれも、解をフーリエ積分形に仮定し、式中に含まれる未知関数を力学的境界条件が満足されるように決定している。さまざまな解法が工夫されている静的問題と比較して、動的問題で解析の対象とされている弾性体の形状が限定されているのは、用いられる解法がこのように限られていることにもよると思われる。

そこで本論文では、任意形状の弾性体を取り扱える積分方程式法⁽⁶⁾を、き裂を含む弾性体にも適用できるように拡張した。これは単純な形状をしたき裂の静的問題に対しては行われているが⁽⁷⁾、動的問題についての研究は見当たらないようである。そして一つ又は二つのき裂を有する無限体に、平面調和弾性波が入射する問題を解析し、応力拡大係数を求めた。

2. 解 析

2.1 一般の場合 直角座標系 $x_k (k=1, 2, 3)$ を用いる。

弾性体に生じる変位 w_k 等の物理量が、時間 t とともに角振動数 ω で調和振動しているものとするれば、各物理量は実部、虚部がそれぞれ $\cos \omega t$ 成分、 $\sin \omega t$ 成分を与える複素数値関数 u_k 等を用いて、

$$w_k(x_1, x_2, x_3, t) = R_e[u_k(x_1, x_2, x_3) \exp(-i\omega t)]$$

と表すことができる。ここで添字として使われていない場合 i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を意味するものとする。以下の解析ではこのような位置のみの関数 u_k 等を用い、時間項 $\exp(-i\omega t)$ は省略する。

λ, μ をラーメの定数とすると、弾性定数テンソル

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \dots \dots \dots (1)$$

を用いて、応力 σ_{ij} と変位 u_i の関係式は

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \dots \dots \dots (2)$$

となる。ただしカンマの後の添字は微分を表すものとし、総和規約を仮定している。弾性体内部で変位 u_i の満足すべき平衡方程式は、 ρ を密度、 f_i を体積力として

$$C_{ijkl} u_{k,lj} + f_i = -\rho \omega^2 u_i \dots \dots \dots (3)$$

である。また法線ベクトル n_i をもつ面に作用する面力の x_i 方向成分 $t_i(n)$ は

$$t_i(n) = \sigma_{ij} n_j \dots \dots \dots (4)$$

と表される。

まず基本解、無限体の1点Qに m 方向の単位集聚力が作用する場合にP点に生じる i 方向変位 $U_i^{(m)}(P, Q)$ を求める。これは、 $U_i^{(m)}$ の満足すべき偏微分方程式

$$C_{ijkl} U_{k,lj}^{(m)} + \delta_{im} \delta(P-Q) = -\rho \omega^2 U_i^{(m)} \quad (-\infty < x_i < \infty) \dots \dots \dots (5)$$

にフーリエ変換を適用することによりただちに得られ

$$U_i^{(m)}(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\mu R} e^{ik_T R} \delta_{im} + \frac{1}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{R} e^{ik_T R} - \frac{1}{R} e^{ik_L R} \right\}_{,im} \right] \dots \dots \dots (6)$$

となる⁽⁸⁾。ここで R はP、Q点間の距離

$$R = \{[x_i(P) - x_i(Q)]\{x_i(P) - x_i(Q)\}\}^{1/2}$$

k_T, k_L はそれぞれ横波の速度 $C_T = (\mu/\rho)^{1/2}$ 、たて波の速度 $C_L = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ を用いて

$$k_T = \omega/C_T, \quad k_L = \omega/C_L \dots \dots \dots (7)$$

と表される波数である。また微分演算は、変位が与えられる点〔式(6)ではP点〕に関して行うものとする。

弾性体内部の変位は、弾性体表面における変位と表面力および弾性体内部に作用する体積力を用いて表す

* 昭和55年8月23日 第58期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和56年4月21日。

** 正員、東京工業大学(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

ことができる⁽⁹⁾。すなわち有限な弾性体の、 $\mathbf{n}$ を外向き法線ベクトルとする表面 S にわたる次の面積分

$$\int_S n_i(P) C_{ijkl} u_j(P) U_{k,l}^{(m)}(P, Q) ds(P)$$

に対してガウスの発散定理を適用し、弾性体 D にわたる体積分に変換すると

$$\int_D [C_{ijkl} u_j(P) U_{k,l}^{(m)}(P, Q)]_{,i} dv(P)$$

微分を実行し、式 (3), (5) を用いれば

$$\begin{aligned} \int_D & \{ [C_{ijkl} u_{j,i}(P) U_k^{(m)}(P, Q)]_{,l} - [-f_k(P) - \rho \omega^2 u_k(P)] U_k^{(m)}(P, Q) \\ & + u_j(P) [-\delta_{jm} \delta(P-Q) - \rho \omega^2 U_j^{(m)}(P, Q)] \} dv(P) \end{aligned}$$

第 1 項に対しては再び発散定理を適用して面積分に変換し、第 2, 3 項を整理すると

$$\int_S \{ n_i(P) C_{ijkl} u_{j,i}(P) \} U_k^{(m)}(P, Q) ds(P) + \int_D f_k(P) U_k^{(m)}(P, Q) dv(P) - C(Q) u_m(Q)$$

となる。ただし D^e を D の外側領域として

$$C(Q) = 1 \quad (Q \in D), \quad 1/2 \quad (Q \in S), \quad 0 \quad (Q \in D^e) \dots\dots\dots (8)$$

である。上の結果をまとめ、式 (2), (4) より $n_i(P) C_{ijkl} u_{j,i}(P) = t_k(\mathbf{n})(P)$ 、式 (6) より $U_k^{(m)}(P, Q) = U_m^{(k)}(Q, P)$ であることを用い、

$$T_m^{(j)}(Q, P) = n_i(P) C_{ijkl} U_{k,l}^{(m)}(P, Q) \dots\dots\dots (9)$$

とおけば、Somigliana の公式⁽⁹⁾として知られている次式を得る。

$$C(Q) u_h(Q) = \int_S t_k(\mathbf{n})(P) U_h^{(k)}(Q, P) ds(P) - \int_S u_k(P) T_h^{(k)}(Q, P) ds(P) + \int_D f_k(P) U_h^{(k)}(Q, P) dv(P) \dots\dots\dots (10)$$

同様に、弾性体内部での変位こう配は、弾性体表面での変位の接線方向微分と表面力および弾性体内部に作用する体積力を用いて表される。すなわち

$$\begin{aligned} \int_S n_i(P) C_{ijkl} u_{j,m}(P) U_{k,l}^{(h)}(P, Q) ds(P) &= \int_D [C_{ijkl} u_{j,m}(P) U_{k,l}^{(h)}(P, Q)]_{,i} dv(P) \\ &= \int_D \{ [C_{ijkl} u_{j,i}(P) U_{k,m}^{(h)}(P, Q)]_{,l} - [C_{ijkl} u_{j,i}(P) U_{k,m}^{(h)}(P, Q)]_{,l} \\ &\quad - \rho \omega^2 \{ u_j(P) U_j^{(h)}(P, Q) \}_{,m} - f_k(P) U_{k,m}^{(h)}(P, Q) - u_{j,m}(P) \delta_{hj} \delta(P-Q) \} dv(P) \\ &= \int_S \{ n_m(P) C_{ijkl} u_{j,i}(P) U_{k,l}^{(h)}(P, Q) - n_i(P) C_{ijkl} u_{j,i}(P) U_{k,m}^{(h)}(P, Q) \\ &\quad - \rho \omega^2 n_m(P) u_j(P) U_j^{(h)}(P, Q) \} ds(P) - \int_D f_k(P) U_{k,m}^{(h)}(P, Q) dv(P) - C(Q) u_{h,m}(Q) \end{aligned}$$

交代テンソルを用いて

$$-n_i(P) u_{j,m}(P) + n_m(P) u_{j,i}(P) = -n_p(P) u_{j,q}(P) (\delta_{ip} \delta_{qm} - \delta_{pm} \delta_{qi}) = -n_p(P) u_{j,q}(P) \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{rim}$$

と整理し、次式を得る。

$$\begin{aligned} C(Q) u_{h,m}(Q) &= \int_S t_k(\mathbf{n})(P) U_{h,m}^{(k)}(Q, P) ds(P) - \int_S \rho \omega^2 n_m(P) u_k(P) U_h^{(k)}(Q, P) ds(P) \\ &\quad + \int_S \{ \varepsilon_{pqr} n_p(P) u_{j,q}(P) \} \{ \varepsilon_{rim} C_{ijkl} U_{h,l}^{(k)}(Q, P) \} ds(P) + \int_D f_k(P) U_{h,m}^{(k)}(Q, P) dv(P) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここでベクトル積の定義より $\{ \varepsilon_{pqr} n_p(P) u_{j,q}(P) \}$ は変位 u_j の接線方向微分である。

さて、簡単のため、無限体中にき裂が一つだけ存在しき裂面に外力が作用するものと仮定する。き裂が無限体中に複数個存在する場合、あるいはき裂を含む弾性体が有限体である場合を扱えるように拡張することは容易である。

き裂 S と半径 R_0 の球面に囲まれる有限領域に対して式 (10), (11) を適用し、変位 $u_i(P)$ の横波成分

$$u_i^T = \frac{1}{\rho \omega^2} \mu \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} u_{m,lj}$$

およびたて波成分

$$u_i^L = -\frac{1}{\rho \omega^2} (\lambda + 2\mu) u_{k,ki}$$

がそれぞれ放射条件⁽¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} u_i^T &= o(1), \quad \partial u_i^T / \partial R_0 - ik_T u_i^T = o(R_0^{-1}) \\ u_i^L &= o(1), \quad \partial u_i^L / \partial R_0 - ik_L u_i^L = o(R_0^{-1}) \end{aligned} \right\} (R_0 \rightarrow \infty) \dots \dots \dots (12)$$

を満足するものと仮定して $R_0 \rightarrow \infty$ の極限をとれば、弾性体内部の任意の点 Q における変位と変位こう配の表示式

$$u_h(Q) = \int_S [\{t_k(n)(P)\}^+ + \{t_k(n)(P)\}^-] U_h^{(k)}(Q, P) ds(P) \\ - \int_S [\{u_k(P)\}^+ - \{u_k(P)\}^-] T_h^{(k)}(Q, P) ds(P) \dots \dots \dots (13)$$

$$u_{h,m}(Q) = \int_S [\{t_k(n)(P)\}^+ + \{t_k(n)(P)\}^-] U_{h,m}^{(k)}(Q, P) ds(P) \\ - \int_S \rho \omega^2 \{n_m(P)\}^+ [\{u_k(P)\}^+ - \{u_k(P)\}^-] U_h^{(k)}(Q, P) ds(P) \\ + \int_S \{\varepsilon_{pq,r} n_p(P)\}^+ [\{u_{j,q}(P)\}^+ - \{u_{j,q}(P)\}^-] \{\varepsilon_{rim} C_{ijkl} U_{h,l}^{(k)}(Q, P)\} ds(P) \dots \dots \dots (14)$$

を得る。ここで $\{ \}^+, \{ \}^-$ はそれぞれき裂の二つの面のうち $S^+ (=S)$ 面と S^- 面における値を示す。

式 (13) で与えられる変位 $u_h(Q)$ は任意の $[\{t_k(n)(P)\}^+ + \{t_k(n)(P)\}^-]$, $[\{u_k(P)\}^+ - \{u_k(P)\}^-]$ に対して、弾性体内部で変位の方程式、無限遠で放射条件を満足する。従って、き裂面上での力学的境界条件式

$$\{n_j(P) C_{ijkl} u_{k,l}(P)\}^\pm = \{t_k(n)(P)\}^\pm \quad (\text{複号同順}, P \in S) \dots \dots \dots (15)$$

を満足するように未知関数 $[\{u_k(P)\}^+ - \{u_k(P)\}^-]$ を決定し、式 (13) に代入すれば求める解が得られる。

このためには式 (14) を用いる。き裂面に作用する外力が、本報で扱う問題のように

$$\{t_k(n)(P)\}^+ = -\{t_k(n)(P)\}^- \quad (P \in S) \dots \dots \dots (16)$$

であれば、式 (13), (14) 右辺第 1 項は零となる。そして式 (14) において、点 Q を S に近づけて極限をとり、式 (2), (4) を用いれば境界条件式 (15) より微積分方程式

$$- \int_S \rho \omega^2 \{n_k(Q)\}^+ \{n_m(P)\}^+ C_{stkm} [\{u_k(P)\}^+ - \{u_k(P)\}^-] U_h^{(k)}(Q, P) ds(P) \\ + \int_S \{n_k(Q)\}^+ C_{stkm} \{\varepsilon_{pqr} n_p(P)\}^+ [\{u_{j,q}(P)\}^+ - \{u_{j,q}(P)\}^-] \{\varepsilon_{rim} C_{ijkl} U_{h,l}^{(k)}(Q, P)\} ds(P) = \{t_k(n)(Q)\}^+ \\ (Q \in S) \dots \dots \dots (17)$$

を得る。

実際に、変位 (13) よりき裂面に生じる表面力は、式 (17) 左辺で与えられるので、弾性問題の解が一意的に定まることから式 (17) の解は一意的に決定されることが分かる。

本報での解析の対象である平面問題は、三次元問題の特殊な場合、弾性体形状、外力が一定方向 (x_3 軸とする) に一樣である場合として扱うことができる。その場合問題は変位が x_3 軸方向のみに生じる面外せん断の問題と、変位が x_1 - x_2 平面内のみに生じる面内問題の二つに分けられる。

図 1 1 き裂を有する無限体

2.2 1 き裂を有する無限体に SH 波が入射する場合

図 1 に示すような幅が $2a$, x_3 軸方向には無限に長いき裂を有する無限体に、 x_1 - x_2 平面に垂直な波面をもつ調和 SH 波が無限遠方から、 x_1 軸に対して角度 θ_i で入射する問題を考える。

き裂がない場合に、入射波から生じる変位、応力は

$$\left. \begin{aligned} u_3^i &= u_H e(k_T, x_1, x_2) \\ \sigma_{13}^i &= -i\sigma_H \cos \theta_i e(k_T, x_1, x_2) \\ \sigma_{23}^i &= -i\sigma_H \sin \theta_i e(k_T, x_1, x_2) \\ e(k, x_1, x_2) &= \exp \{-ik(x_1 \cos \theta_i + x_2 \sin \theta_i)\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

となる。 $u_H, \sigma_H (= \rho \omega c_T u_H)$ はそれぞれ変位、応力の振幅である。

従って散乱波 u_3^s を、き裂面での入射波の応力 σ_{23}^i を打ち消すように決定し、入射波と重ね合わせれば解が得られる。

き裂上下面の間の変位差は

$$d_3(x_1) = u_3^s(x_1, +0) - u_3^s(x_1, -0) \quad (|x_1| < a) \dots \dots \dots (19)$$

と x_1 のみの関数であるから、変位の表示式 (13) の

右辺において x_3 に関する積分を実行し、散乱波は

$$u_3^s(x_1, x_2) = -\frac{i}{4} \int_{-a}^a d_3(y) H_0^{(1)}(k_T r) dy \quad (20)$$

と表される。ここで $r = [(x_1 - y)^2 + x_2^2]^{1/2}$, $H_n^{(1)}(kr)$ は n 次の第 1 種ハンケル関数である。同様にして変位差 d_3 を決定する微積分方程式は式 (17) より

$$\frac{i}{4} \rho c_T^2 \int_{-a}^a [d_3'(y) \{-k_T \operatorname{sgn}(x_1 - y) H_1^{(1)}(k_T r)\} + d_3(y) \{k_T^2 H_0^{(1)}(k_T r)\}] dy = -\sigma_{23}^i(x_1, 0) \quad (|x_1| < a) \quad (21)$$

となる。ここで $r = |x_1 - y|$, $d_3'(x_1) = d/dx_1[d_3(x_1)]$, また, $\operatorname{sgn}(x_1 - y)$ は $x_1 - y$ が正のとき +1, 負のとき -1 をとる関数である。

特異積分の評価式⁽¹¹⁾より, 式 (21) が成立するためには未知関数 $d_3'(x_1)$ は一般に $x_1 \rightarrow \pm a$ で $-1/2$ のオーダーで発散しなくてはならない。そこで

$$d_3'(x_1) = [1 - (x_1/a)^2]^{-1/2} d_3^*(x_1) \quad (22)$$

とおき, き裂先端近傍での応力を評価すると

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^s(x_1, 0) &= \frac{1}{2\pi} \rho c_T^2 \int_{-a}^a \frac{d_3'(y)}{y - x_1} dy + \text{有界項} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \rho c_T^2 d_3^*(a) \{(x_1/a) - 1\}^{-1/2} + \text{有界項} & (x_1 \rightarrow a+0) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho c_T^2 d_3^*(-a) \{-(x_1/a) - 1\}^{-1/2} + \text{有界項} & (x_1 \rightarrow -a-0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。従って応力拡大係数 K_{II}

$$K_{\text{II}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23} \quad (r \text{ はき裂先端からの距離})$$

はき裂右端, 左端でそれぞれ次式で与えられる。

$$K_{\text{II}}, \text{右端} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho c_T^2 \sqrt{a} d_3^*(a), \quad K_{\text{II}}, \text{左端} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho c_T^2 \sqrt{a} d_3^*(-a) \quad (23)$$

2.3 1 き裂を有する無限体に P 波あるいは SV 波が入射する場合 図 1 に示すようなき裂を有する無限体に P 波あるいは SV 波が入射する問題を考える。入射波により生じる変位, 応力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_1^i &= u_P \cos \theta_i e(k_L, x_1, x_2) + u_V \sin \theta_i e(k_T, x_1, x_2) \\ u_2^i &= u_P \sin \theta_i e(k_L, x_1, x_2) - u_V \cos \theta_i e(k_T, x_1, x_2) \\ \sigma_{11}^i &= -i\sigma_P (1 - 2\kappa^{-2} \sin^2 \theta_i) e(k_L, x_1, x_2) - i\sigma_V \sin 2\theta_i e(k_T, x_1, x_2) \\ \sigma_{22}^i &= -i\sigma_P (1 - 2\kappa^{-2} \cos^2 \theta_i) e(k_L, x_1, x_2) + i\sigma_V \sin 2\theta_i e(k_T, x_1, x_2) \\ \sigma_{12}^i &= -i\sigma_P \kappa^{-2} \sin 2\theta_i e(k_L, x_1, x_2) + i\sigma_V \cos 2\theta_i e(k_T, x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで $\kappa = c_L/c_T$, また u_P , $\sigma_P (= \rho \omega c_L u_P)$, u_V , $\sigma_V (= \rho \omega c_T u_V)$ はそれぞれ P 波, SV 波の変位, 応力の振幅である。

前節と同様に式 (13) より, き裂上下面の間の変位差

$$d_i(x_1) = u_i^s(x_1, +0) - u_i^s(x_1, -0) \quad (i=1, 2, |x_1| < a) \quad (25)$$

を用いて, 散乱波の変位 $u_m^s (m=1, 2)$ は

$$\begin{aligned} u_m^s(x_1, x_2) &= -\frac{i}{4} \int_{-a}^a d_n(y) [(1 - 2\kappa^{-2}) H_0^{(1)}(k_L r) {}_m\delta_{2n} + H_0^{(1)}(k_T r) {}_2\delta_{mn} \\ &\quad + H_0^{(1)}(k_T r) {}_n\delta_{2m} - 2k_T^{-2} \{H_0^{(1)}(k_L r) - H_0^{(1)}(k_T r)\} {}_{2mn}] dy \quad (26) \end{aligned}$$

と表され, d_n を決定する微積分方程式は式 (17) から

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \rho c_T^2 \int_{-a}^a [d_m'(y) \{4(-1)^m \operatorname{sgn}(x_1 - y)\} \left\{ \frac{1}{r} H_2^{(1)}(k_T r) - \kappa^{-2} \frac{1}{r} H_2^{(1)}(k_L r) \right. \\ \left. - k_L (1 - \kappa^{-2}) H_1^{(1)}(k_L r) \delta_{2m} \right\} + d_m(y) \{k_T^2 H_0^{(1)}(k_T r) \delta_{1m} + k_T^2 H_0^{(1)}(k_L r) \delta_{2m}\}] dy = -\sigma_{2m}^i(x_1, 0) \end{aligned} \quad (|x_1| < a) \quad (27)$$

となる。ここで $m=1, 2$ であり, m に関する総和はとらないものとする。

また d_m^* を有界な関数として

$$d_m'(x_1) = [1 - (x_1/a)^2]^{-1/2} d_m^*(x_1) \quad (m=1, 2) \dots \dots \dots (28)$$

と表すことができ、き裂右端、左端での応力拡大係数はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{\text{I}}, \text{ 右端} &= -\sqrt{\pi \rho c_T^2 (1 - \kappa^{-2})} \sqrt{a} d_2^*(a), & K_{\text{I}}, \text{ 左端} &= \sqrt{\pi \rho c_T^2 (1 - \kappa^{-2})} \sqrt{a} d_2^*(-a) \\ K_{\text{II}}, \text{ 右端} &= -\sqrt{\pi \rho c_T^2 (1 - \kappa^{-2})} \sqrt{a} d_1^*(a), & K_{\text{II}}, \text{ 左端} &= \sqrt{\pi \rho c_T^2 (1 - \kappa^{-2})} \sqrt{a} d_1^*(-a) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

3. 数 値 計 算

3.1 微積分方程式の数値解法 微積分方程式 (21), (27) の厳密解を得ることは困難であるので、数値的に解を求めなければならない。

面外せん断問題に対する式 (21) においてまず、

$$X_1 = x_1/a, \quad Y = y/a, \quad R = r/a, \quad Q = a\omega/c_T, \quad D_3(X_1) = d_3(x_1)/a, \quad S_H = \sigma_H/\mu$$

と無次元化し、さらに特異核を分離すると

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \int_{-1}^1 \left[D_3'(Y) \left[\frac{2}{\pi} i \frac{1}{X_1 - Y} - \left\{ Q H_1^{(1)}(QR) + \frac{2}{\pi} i \frac{1}{R} \right\} \operatorname{sgn}(X_1 - Y) \right] + D_3(Y) \left[\frac{2}{\pi} i Q^2 \ln R \right. \right. \\ \left. \left. + Q^2 \left\{ H_0^{(1)}(QR) - \frac{2}{\pi} i \ln R \right\} \right] \right] dY = i S_H \sin \theta_i \exp(-i Q X_1 \cos \theta_i) \quad (|X_1| < 1) \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

となる。いま未知関数 $D_3'(X_1)$ の特異性を考慮し、 A_n を未知係数として第1種のチェビシエフ多項式 $T_n(x_1)$ を用い

$$D_3'(X_1) = (1 - X_1^2)^{-1/2} \sum_{n=1}^N A_n T_n(X_1) \dots \dots \dots (31)$$

とおく⁽¹²⁾。 $D_3(\pm 1) = 0$ に注目して、上式を積分すれば $D_3(X_1)$ は $U_n(X_1)$ を第2種チェビシエフ多項式として

$$D_3(X_1) = -(1 - X_1^2)^{1/2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} A_n U_{n-1}(X_1) \dots \dots \dots (32)$$

と表される。そして式 (31), (32) を式 (30) の左辺に代入し、特異核に対しては積分公式

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(Y)}{\sqrt{1-Y^2}} \frac{dY}{X-Y} &= \begin{cases} 0 & (n=0) \\ -\pi U_{n-1}(X) & (n \geq 1) \end{cases} \\ \int_{-1}^1 \sqrt{1-Y^2} U_n(Y) \ln |X-Y| dY &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[X^2 - \ln 2 - \frac{1}{2} \right] & (n=0) \\ \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{n+2} T_{n+2}(X) - \frac{1}{n} T_n(X) \right] & (n \geq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

有界な核に対してはガウス・チェビシエフおよびロバート・チェビシエフの数値積分公式

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f(Y)}{\sqrt{1-Y^2}} dY &\cong \frac{\pi}{M} \sum_{i=1}^M f\left(\cos \frac{2i-1}{2M} \pi\right) \\ \int_{-1}^1 \sqrt{1-Y^2} f(Y) dY &\cong \frac{\pi}{M} \sum_{i=1}^M \left(1 - \cos^2 \frac{2i-1}{2M} \pi\right) f\left(\cos \frac{2i-1}{2M} \pi\right) \end{aligned}$$

を用いて積分し、方程式の両辺が $U_N(X)$ の N 個の零点 $X_j = \cos j\pi/(N+1)$ ($j=1, 2, \dots, N$) で等しいものとして N 元連立一次方程式を得、これを解いて A_n を決定した。ただし、けた落ちをさけるため、 $R \cong 0$ では核に含まれるハンケル関数を級数展開し、特異項を消去してから数値計算を行った。

数値解の精度を確かめるために、 $Q=1$, $\theta_i=\pi/2$, $\nu=0.25$ の場合について項数 N , 積分点数 M を $N=M$ として4から16まで増して、応力拡大係数を計算して得た結果を表1に示す。 $N=M=12$ 程度で十分な精度が得られることが分かる。

面内問題に対する式 (27) の数値解も同様にして求められる。

3.2 数値計算結果 ポアソン比 $\nu=0.25$ として前節の方法に従い、応力拡大係数を求めた。以下の図中で σ_0 は入射波に応じて σ_H , σ_P あるいは σ_V である。

図2はき裂が一つの場合、き裂に対して垂直に SH 波、P 波および SV 波が入射する場合の角振動数に

表 1 応力拡大係数の計算値に及ぼす項数 (= 積分点数) の影響

$N(=M)$	$ K/\sigma_H \sqrt{a} $	$N(=M)$	$ K/\sigma_H \sqrt{a} $
4	2.243	12	2.258
6	2.256	14	2.258
8	2.256	16	2.258
10	2.257		

よる応力拡大係数の変化を示したものであるが、それぞれ文献 (1)~(3) の結果とよく一致している。

図 3, 4 には一直線上に並ぶ二つの等長き裂に対して、図 5, 6 にはき裂の向きと直角な方向に並ぶ二つの等長き裂に対して、それぞれ SH 波, P 波が入射

図 2 1 き裂, SH, P, SV 波が入射する場合

図 3 2 き裂, SH 波が入射する場合 (1)

図 4 2 き裂, P 波が入射する場合 (1)

する場合の、応力拡大係数と角振動数の関係を示した。図 4 の場合については Itou⁽⁴⁾ の解析があるが、本結果はそれとグラフ上では完全に一致している。いずれの場合でも、応力拡大係数は角振動数の増大とともに静的な場合の値から次第に増大し、極大値をとった後再び減少する。き裂が一直線上に並んでいる場合にはき裂相互の干渉は小さいのに対して、き裂がその向きに直角な方向に並んでいる場合には応力拡大係数の最大値は、き裂が 1 個の場合に比べて著しく大きくなる。またこの場合、入射側のき裂の応力拡大係数の最大値の方が、影側のそれよりも大きい。

4. 結 言

き裂を含む弾性体の境界値問題を微積分方程式として定式化した。そして一つ又は二つのき裂を有する無限体に平面調和弾性波が入射する問題について数値計算を行い、応力拡大係数を求めた。

本研究を遂行するにあたり、東京工業大学小泉堯教授ならびに渋谷寿一教授より有益なご助言をいただいた。また当時学部学生、古賀英隆、広井高志の両氏には数値計算においてご協力をいただいた。ここに記して感謝の意を表する。

図 5 2 き裂, SH 波が入射する場合 (2)

図 6 2 き裂, P 波が入射する場合 (2)

文 献

- (1) Loeber, J.F. and Sih, G.C., *J. Acoust. Soc. Am.*, 44-1 (1968), 90.
- (2) Sih, G.C. and Loeber, J.F., *Q. Appl. Math.*, 27-2 (1969), 193.
- (3) Mal, A.K., *Int. J. Eng. Sci.*, 8-9 (1970), 763.
- (4) Itou, S., *J. Appl. Mech.*, 45-4 (1978), 803.
- (5) 半澤, ほか2名, 機論, 46-410, A (昭 55), 1081.
- (6) Kupradze, V.D., *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, (1965), Ch. X, IPST.
- (7) Cruse, T.A., *Developments in Boundary Element Methods-1*, (1979), 103, Applied Science Pub.
- (8) 文献 (6) の 12 ページ.
- (9) 文献 (6) の 24 ページ.
- (10) 文献 (6) の 43 ページ.
- (11) Muskhelishvili, N.I., *Singular Integral Equations*, (1958), Ch. 4, Noordhoff.
- (12) Erdogan, F., ほか2名, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, (1973), Ch. 7, Noordhoff.

討 論

〔質問〕 伊 藤 勝 悦 (八戸工業大学)

き裂の動弾性問題に対して境界要素法を適用し、フーリエ変換等の手法では解析が困難となる問題に対して解を得ている。この点に関して敬意を表したい。

2 個のき裂が平行に存在する場合についての動的応力拡大係数の最大値は通常予想される値をはるかに越えている。この事からも、種々のき裂の配置に対する結果を与えておく事は破壊力学的に重要と思われる。

研究を継続して計算結果を積み増して欲しいと思うがいかがか。

〔回答〕 境界要素法を応用した本報の手法は、静的問題における転位の連続分布の手法の動的問題への拡張でもあり、様々な問題を定式化することに用いることができる。今後は二次元の定常動弾性問題のみならず、非定常動弾性問題や三次元問題の解析も試みたいと思う。