ペナルティ関数法による動的接触問題の解析*

矢川 元基**, 関 東 康 祐***, 安 藤 良 夫**
Genki YAGAWA, Yasuhiro KANTO, Yoshio ANDO

Key Words: Strength of Materials, Finite Element Method, Dynamic Contact Problem, Impact, Penalty Function Method

1. 序 論

歯車をはじめとして、多くの機器において動力の伝達方式に接触が用いられる。また、地震時においては、プラントにおけるポンプ、電動機などの動的機器に地震動による動的外力が作用し、可動部と固定部、軸と軸受などが動的な接触を生じる場合がある。原子力プラントにおいては、耐震設計が、安全面のうえで極めて重要であり、また、地震時以外にも、配管の破断、パイプホイップによる破壊など、安全上重大な事故において、動的接触現象が大きく関与していると言える。このような意味で、機器や構造の設計や安全解析において、動的接触現象メカニズムの解明は、極めて有意義である。

さて、接触問題の解析は、Herz⁽¹⁾の弾性接触理論が古典として有名であるが、実際の機器における接触面形状は複雑なことが多く、解析的に解ける例は少ない。特に動的問題の場合、解析的に解析可能な範囲はさらに限られる。そこで、任意形状を容易に扱える有限要素法による数値解析が広く行われている^{(2)~(5)}。さらに、動的接触問題の解析は、Hughes ら⁽⁶⁾、Stadter ら⁽⁷⁾、Hallquist⁽⁸⁾、Johnson ら⁽⁹⁾、土肥・浅野⁽¹⁰⁾、浅野⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の研究がある。

本論文は、著者ら⁽⁵⁾⁽¹³⁾が開発したペナルティ関数法による静的接触問題の解析法を、ダランベールの原理を用いて慣性力を導入した動的接触問題の解析へ拡張したものである。ペナルティ関数法を用いる利点は文献(2)~(12)にみられる接触問題固有の困難さを取り除かれることにある。すなわち、(i)自由度の増加がない、(ii)剛性マトリックス等の大幅な変形を要しない、(iii)クーロンの摩擦条件を満足させるための繰返しを必要としない、などであり、その結果として、演算時間が比較的少ない、既存プログラムの変更が容易である、等の特長をあげることができる。

2. 理 論

ここでは、図1に示すような接触する2物体A、Bを考える。簡単のため、二次元問題を扱うが、三次元問題においても、本質的な相違はない。接触面上に局所座標系をとり、 $\bar{x}$ を接線方向、 $\bar{z}$ を法線方向とする。その他、以下で用いる記号と変数の定義を表1に示す。

2.1 接触条件式と判定条件式 接触状態には、①口開き状態(o : 接触していない状態)、②固着状態(st : 接触しており、すべりを生じていない状態)、③相対すべり状態(s : 接触しており、すべりを生じている状態)の3種があり、それぞれの状態に対して、力の平衡条件、変位・速度・加速度の連続条件からなる、接触条件式が満足される必要がある。クーロンの

表 1 記号と変数の定義

(一) 局所座標系での値	p 物体Aに作用する接触力
$d(\)$ 各時間ステップでの増分量	u 変位
$(\)_0$ 各時間ステップでの初期値	d 物体A・B間の距離
$(\)^\beta$ 物体 $\beta(\beta=A, B)$ での値	μ_s 静摩擦係数
$(\)_l$ ベクトル量の l 成分 ($l=x, z$)	μ_d 動摩擦係数
	C_i 接触状態が i である領域 ($i=o, s, st$)

図 1 接触する2物体

* 昭和 57 年 10 月 10 日 第 60 期全国大会講演会において論文講演として講演，原稿受付 昭和 57 年 4 月 5 日。

** 正員，東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

*** 学生員，東京大学大学院

摩擦条件を仮定すると、接触条件式は次式のように定義できる。

① 口開き (open) 状態

$$\bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{p}_{z0} + \Delta \bar{p}_z = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

② 固着 (sticking) 状態

$$\Delta \bar{u}_x^A - \Delta \bar{u}_x^B + \bar{d}_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\Delta \bar{u}_y^A - \Delta \bar{u}_y^B = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\dot{\bar{u}}_x^A = \dot{\bar{u}}_x^B \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\dot{\bar{u}}_y^A = \dot{\bar{u}}_y^B \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\ddot{\bar{u}}_x^A = \ddot{\bar{u}}_x^B \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\ddot{\bar{u}}_y^A = \ddot{\bar{u}}_y^B \quad \dots\dots\dots (8)$$

③ 相対すべり (sliding) 状態

$$\Delta \bar{u}_x^A - \Delta \bar{u}_x^B + \bar{d}_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x = \pm \mu_s (\bar{p}_{z0} + \Delta \bar{p}_z) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\dot{\bar{u}}_x^A = \dot{\bar{u}}_x^B \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\ddot{\bar{u}}_x^A = \ddot{\bar{u}}_x^B \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (1), (2) は、接触面に力が働いていないこと、式 (3), (9) は接していること、式 (4) はすべりが生じていないこと、式 (5)~(8), (11), (12) は速度および加速度の連続条件、式 (10) はクーロンの摩擦条件を、それぞれ表している。ただし、式 (10) の複号はすべり方向による。

次に、接触面が3種の接触状態のいずれであるかを判定するための条件式を定めなければならない。有限要素解析では、あらかじめ接触状態を仮定しながら計算を行うことになる。そして、その結果が仮定した状態と矛盾しないかチェックをする。矛盾があれば、接

触状態を変更し、再計算を行う。このとき必要となる判定条件式をまとめると、表2 (a), (b) のようになる。(a)は接触しているか、いないか、(b)は接触している場合、さらにすべりが生じているか、いないか、の判定条件式を表している。

2.2 仮想仕事の原理⁽¹⁴⁾

接触問題では、摩擦によるエネルギーの散逸があるため、最小ポテンシャルの原理を用いることはできず、したがって、仮想仕事の原理を用いる。動的接触問題に用いることができる一般的な増分仮想仕事の原理は次式で表される。ただし、「 Δ 」は増分量を、「 δ 」は変分量を表している。また、変形は弾性範囲内であり、減衰はないものとする。

$$\delta \Delta \pi = \sum_{\beta} \{ \delta \Delta E^{\beta} - \delta \Delta T^{\beta} - \delta \Delta W^{\beta} - \delta \Delta W_c^{\beta} \} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

上式において、 $\sum_{\beta}$ は、考えている系に含まれる物体(記号 β で表す)すべてに関して加え合わせることを表している。また、 $\delta \Delta E^{\beta}$, $\delta \Delta T^{\beta}$, $\delta \Delta W^{\beta}$, $\delta \Delta W_c^{\beta}$ はそれぞれ物体 β に関する、弾性変形、慣性力、表面力および物体 β に作用する接触力による増分仮想仕事であり、次式で表される。ただし V^{β} は物体 β が占める領域、 S^{β} は表面力の作用する領域である。

$$\delta \Delta E^{\beta} = \int_{V^{\beta}} \Delta \sigma_{ij}^{\beta} \delta \Delta \varepsilon_{ij}^{\beta} dV \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\delta \Delta T^{\beta} = \int_{V^{\beta}} (-\rho^{\beta} \Delta \ddot{u}_i^{\beta}) \delta \Delta u_i^{\beta} dV \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\delta \Delta W^{\beta} = \int_{S^{\beta}} \Delta f_i^{\beta} \delta \Delta u_i^{\beta} dS \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\delta \Delta W_c^{\beta} = \sum_{\gamma} \int_{C^{\beta\gamma}} \Delta \bar{p}_i^{\beta\gamma} \delta \Delta \bar{u}_i^{\beta} dS \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 σ_{ij}^{β} , ε_{ij}^{β} は β 物体の応力とひずみ、 ρ^{β} , $\ddot{u}_i^{\beta}$ は密度と加速度、 f_i^{β} は S^{β} に作用する表面力である。

また、 γ は物体 β と接触する、またはその可能性のある物体であり、 $C^{\beta\gamma}$ は、 β と γ の間の接触領域である。 $p_i^{\beta\gamma}$ は γ から β に作用する接触力であり、 $p_i^{\beta\gamma} = -p_i^{\gamma\beta}$ の関係がある。さらに、 $\sum_{\gamma}$ は、 γ に関して加え合わせることを

表しており、特に $\beta = \gamma$ の場合、き裂面など同一物体内に接触領域が存在していることを示している。

著者らは以前に、ペナルティ関数法を用いた静的接触問題の解析を行った⁽⁵⁾⁽¹³⁾。さらに、ダランベールの原理を用いて、動的問題へと拡張した⁽¹⁵⁾。そこでは、二体問題を扱っており、変位の連続条件式 (3), (4), (9)

表 2 判定条件式

(a)		
判定された状態	口開き状態	固着状態
仮定された状態		相対すべり状態
口開き状態	$\Delta \bar{u}_x^A - \Delta \bar{u}_x^B + \bar{d}_0 > 0$	$\Delta \bar{u}_x^A - \Delta \bar{u}_x^B + \bar{d}_0 \leq 0$
固着状態 相対すべり状態	$\bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x < 0$	$\bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x \geq 0$
(b)		
判定	固着状態	相対すべり状態
固着状態	$ \bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x \leq \mu_s (\bar{p}_{z0} + \Delta \bar{p}_z) $	$ \bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x > \mu_s (\bar{p}_{z0} + \Delta \bar{p}_z) $
相対すべり状態	$(\bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x)(\Delta \bar{u}_x^A - \Delta \bar{u}_x^B) > 0$	$(\bar{p}_{x0} + \Delta \bar{p}_x)(\Delta \bar{u}_x^A - \Delta \bar{u}_x^B) \leq 0$

図 2 3種の接触状態

をペナルティ関数法を用いて、近似的に緩和した増分形仮想仕事の原理を用いた。また、非線形問題も考慮するため、バランスチェックの項が付加されている。すなわち、この場合の仮想仕事の原理は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \delta \Delta \pi = & \int_{VA} \Delta \sigma_{ij}^A \delta \Delta \varepsilon_{ij}^A dV + \int_{VB} \Delta \sigma_{ij}^B \delta \Delta \varepsilon_{ij}^B dV - \int_{S_{\sigma}^A} \Delta f_i^A \delta \Delta u_i^A dS - \int_{S_{\sigma}^B} \Delta f_i^B \delta \Delta u_i^B dS \\ & + \int_{VA} \rho^A \Delta \ddot{u}_i^A \delta \Delta u_i^A dV + \int_{VB} \rho^B \Delta \ddot{u}_i^B \delta \Delta u_i^B dV + \int_{VA} \rho^A \ddot{u}_{i0}^A \delta \Delta u_i^A dV + \int_{VB} \rho^B \ddot{u}_{i0}^B \delta \Delta u_i^B dV \\ & + \int_{VA} \sigma_{ij0}^A \delta \Delta \varepsilon_{ij}^A dV - \int_{S_{\sigma}^A} f_{i0}^A \delta \Delta u_i^A dS - \int_{\bar{C}_0 + \bar{C}_s + \bar{C}_{st}} \bar{p}_{i0} \delta \Delta \bar{u}_i^A dS \\ & + \int_{VB} \sigma_{ij0}^B \delta \Delta \varepsilon_{ij}^B dV - \int_{S_{\sigma}^B} f_{i0}^B \delta \Delta u_i^B dS + \int_{\bar{C}_0 + \bar{C}_s + \bar{C}_{st}} \bar{p}_{i0} \delta \Delta \bar{u}_i^B dS \\ & - \int_{\bar{C}_{st}} \alpha (\Delta \bar{u}_x^A - \Delta \bar{u}_x^B) (\delta \Delta \bar{u}_x^A - \delta \Delta \bar{u}_x^B) dS - \int_{\bar{C}_{st} + \bar{C}_s} -\alpha (\Delta \bar{u}_z^A - \Delta \bar{u}_z^B + \bar{d}_0) (\delta \Delta \bar{u}_z^A - \delta \Delta \bar{u}_z^B) dS \\ & - \int_{\bar{C}_s} \Delta \bar{p}_x (\delta \Delta \bar{u}_x^A - \delta \Delta \bar{u}_x^B) dS + \int_{\bar{C}_0} \bar{p}_{i0} (\delta \Delta \bar{u}_i^A - \delta \Delta \bar{u}_i^B) dS = 0 \quad (i, j = x, z) \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

ただし、

$$\Delta \bar{p}_x = \pm \mu_d \{ \bar{p}_{x0} + \alpha (\Delta \bar{u}_z^A - \Delta \bar{u}_z^B + \bar{d}_0) \} - \bar{p}_{x0} \quad \text{on } \bar{C}_s \dots \dots \dots (19)$$

$$\bar{d}_0 = \bar{u}_{z0}^A - \bar{u}_{z0}^B \dots \dots \dots (20)$$

ここで、 α はペナルティ数であり、 $\alpha \gg 1$ とおかれる。式 (19) の複号はすべり方向による。

本論文の表式を用いれば、ペナルティ関数法を用いた近似的な、接触力による増分仮想仕事 $\delta \Delta W_c^\beta$ は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \delta \Delta W_c^\beta = & \sum_r \left\{ \int_{\bar{C}_{st}^{\beta r}} \alpha (\Delta \bar{u}_x^\beta - \Delta \bar{u}_x^r) \delta \Delta \bar{u}_x^\beta dS + \int_{\bar{C}_{st}^{\beta r} + \bar{C}_s^{\beta r}} \alpha (\Delta \bar{u}_z^\beta - \Delta \bar{u}_z^r + \bar{d}_0^{\beta r}) \delta \Delta \bar{u}_z^\beta dS \right. \\ & \left. + \int_{\bar{C}_s^{\beta r}} \Delta \bar{p}_x^{\beta r} \delta \Delta \bar{u}_x^\beta dS - \int_{\bar{C}_s^{\beta r}} \bar{p}_{i0}^{\beta r} \delta \Delta \bar{u}_i^\beta dS \right\} \quad (i = x, z) \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

ただし、

$$\Delta \bar{p}_x^{\beta r} = \pm \mu_d^{\beta r} \{ \bar{p}_{x0}^{\beta r} + \alpha (\Delta \bar{u}_z^\beta - \Delta \bar{u}_z^r + \bar{d}_0^{\beta r}) \} - \bar{p}_{x0}^{\beta r} \quad \text{on } \bar{C}_s^{\beta r} \dots \dots \dots (22)$$

$$\bar{d}_0^{\beta r} = \bar{u}_{z0}^\beta - \bar{u}_{z0}^r \dots \dots \dots (23)$$

ここで、式 (22) 中の $\mu_d^{\beta r}$ は、物体 β, r 間の動摩擦係数である。

浅野⁽¹⁶⁾は、変位・速度・加速度の連続条件を、ラグランジュの未定定数、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を用いて緩和した衝突弾性二体問題に対する仮想仕事の原理を導いているが、 λ_2, λ_3 の物理的意味は不明確であると述べている。本法は、浅野が示した仮想仕事の原理において、 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ としたものに、ある意味で関連している。

2.3 有限要素法定式化⁽¹⁷⁾ 式 (18) を離散化すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{VA}^e \delta \{ \Delta U_e^A \}^t [M_e^A] \{ \Delta \dot{U}_e^A \} + [K_e^A] \{ \Delta U_e^A \} + \sum_{VB}^e \delta \{ \Delta U_e^B \} ([M_e] \{ \Delta \dot{U}_e^B \} + [K_e^B] \{ \Delta U_e^B \}) \\ & + \sum_{S_{\sigma}^A}^e \delta \{ \Delta U_e^A \}^t \{ \Delta F_e^A \} + \sum_{S_{\sigma}^B}^e \delta \{ \Delta U_e^B \}^t \{ \Delta F_e^B \} \\ & - \sum_{C_0 + C_s + C_{st}} \left[\frac{\delta \{ \Delta U_e^A \}}{\delta \{ \Delta U_e^B \}} \right]^t \left([K_e^C] \left[\frac{\{ \Delta U_e^A \}}{\{ \Delta U_e^B \}} \right] + \{ R_e^C \} \right) = 0 \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

ここに、 $\{ \Delta \dot{U}_e^\beta \}, \{ \Delta U_e^\beta \} (\beta = A, B)$ は、要素ごとの増分加速度ベクトルと増分変位ベクトルを、 $[M_e^\beta]$ と $[K_e^\beta]$ は、要素質量マトリックスと要素剛性マトリックスを、 $\{ \Delta F_e^\beta \}$ は要素増分荷重ベクトルを表し、 $\sum^e$ は要素ごとに対応節点について加え合わせることを表す。また、 $[K_e^C]$ および $\{ R_e^C \}$ はそれぞれ物体間の接触面に挿入される特殊要素の要素剛性マトリックスと要素荷重ベクトルである。ここに、添字 $\beta = A, B$ は物体の区別を、 t は転置を、 e は要素ごとの値であることを示す。このとき、要素増分接触ベクトルを $\{ \Delta p_e^\beta \}$ とすると、次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \{ \Delta p_e^A \} \\ \{ \Delta p_e^B \} \end{bmatrix} = [K_e^C] \begin{bmatrix} \{ \Delta U_e^A \} \\ \{ \Delta U_e^B \} \end{bmatrix} + \{ R_e^C \} \quad \text{on } C_0 + C_{st} + C_s \dots \dots \dots (25)$$

以下に、二次元問題について具体的な形を示す⁽⁵⁾。

物体A, Bを図3に示すように接触面で節点に対応するように要素分割する. 対応する節点が結びつくように, 体積および質量のない特殊要素 (m_A, n_A, m_B, n_B) を接触面に挿入する. 接触条件の導入や, 接触状態の判定は, この対応する節点の組 (m_A, m_B), (n_A, n_B) ごとに行う. このとき, $\{\Delta p_e^\beta\}$, $\{\Delta U_e^\beta\}$, $\beta=A, B$ は次式で表される.

$$\{\Delta p_e^A\}^t = -\{\Delta p_e^B\}^t = [\Delta p_x^m \ \Delta p_x^n \ \Delta p_x^n \ \Delta p_x^n] \dots \dots \dots (26)$$

$$\{\Delta U_e^\beta\}^t = [\Delta u_x^{m\beta} \ \Delta u_x^{n\beta} \ \Delta u_x^{n\beta} \ \Delta u_x^{n\beta}] \dots \dots \dots (27)$$

また, $[L_e]$ を全体座標系 $x-z$ から局所座標系 $\bar{x}-\bar{z}$ への要素方向余弦マトリックスとすれば,

$$[K_e^C] = [L_e]^t [\bar{K}_e^C] [L_e] \dots \dots \dots (28)$$

$$\{R_e^C\} = [L_e]^t \{\bar{R}_e^C\} \dots \dots \dots (29)$$

であり, さらに,

$$[\bar{K}_e^C] = \begin{bmatrix} k_m^C & 0 & -k_m^C & 0 \\ 0 & k_n^C & 0 & -k_n^C \\ -k_m^C & 0 & k_m^C & 0 \\ 0 & -k_n^C & 0 & k_n^C \end{bmatrix} \dots \dots \dots (30)$$

$$\{\bar{R}_e^C\} = [\{r_m^C\}^t \ \{r_n^C\}^t \ -\{r_m^C\}^t \ -\{r_n^C\}^t] \dots \dots \dots (31)$$

ただし,

$$k_l^C = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{on } \bar{C}_0 \\ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, & \text{on } \bar{C}_{st} \\ \begin{bmatrix} 0 & \pm \mu_d \alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, & \text{on } \bar{C}_s \end{cases} \dots \dots \dots (32)$$

$$\{r_l^C\}^t = \begin{cases} [-\bar{p}_{z0}^l \ -\bar{p}_{z0}^l] & , \text{ on } \bar{C}_0 \\ [0 \ \alpha \bar{d}_0^l] & , \text{ on } \bar{C}_{st} \\ [-\bar{p}_{z0}^l \pm \mu_d(\bar{p}_{z0}^l + \alpha \bar{d}_0^l) \ \alpha \bar{d}_0^l] & , \text{ on } \bar{C}_s \end{cases} \dots \dots \dots (33)$$

ここに, 添字 l は節点の組を表し, m または n である. $\bar{p}_{k0}^l$ は l_B が l_A に及ぼす k 方向 ($k=\bar{x}, \bar{z}$) の接触力の今考えている特殊要素からの寄与分の各増分段階での初期値を示す. $\bar{d}_0^l$ は, l_A と l_B の間の距離の各増分段階での初期値である. また, 式 (32), (33) の複号はすべり方向による.

2.4 速度・加速度に関する接触条件の考慮 有限要素法の動的解析では, 通常, 変位・速度・加速度のうちいずれか一つを未知変数として扱い, 他の2変数は, それから導かれるものとして表している. その意味で, 変位・速度・加速度に関する条件をすべて方程式

に組み込んで解析するのは困難である⁽¹⁶⁾. そのため, いずれか1変数の条件のみを組み込み, 後の条件は別に考慮する必要がある. 本法では, 変位に関する条件をペナルティ関数法を用いて方程式に組み込んでいるので, 速度, 加速度に関する接触条件式(5)~(8), (11), (12)を別に考慮しなければならない. ここでは, 速度に関する条件について考察し, 加速度はそれに準ずるものとする. その理由は, 速度が系の運動エネルギーや運動量など重要な物理量の算出に不可欠だからである.

簡単のため, 図4に示すような一次元棒の縦衝突を考える⁽¹⁸⁾. 棒 $i(i=1, 2)$ の密度, ヤング係数をそれぞれ ρ_i, E_i とする. また, 接触端の有限要素分割長を l_i とする. 衝突直前, $t=-0$ においてそれぞれ, V_1, V_2 の速度であったとすると, 衝突直後, $t=+0$ で接触点の速度は次の形で与えられる.

$$Vc = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} \dots \dots \dots (34)$$

ただし,

$$\begin{cases} \text{一次元連続体理論では, } a_i = \sqrt{\rho_i E_i} & (35 \cdot a) \\ \text{運動量の保存を考えると, } a_i = \rho_i l_i & (35 \cdot b) \\ \text{力の平衡を考えると, } a_i = E_i / l_i & (35 \cdot c) \end{cases}$$

要素分割を, $l_1/l_2 = C_1/C_2$ (ただし, $C_i = \sqrt{E_i/\rho_i}$) にとると, 式 (35) の3種類の係数を式 (34) に代入し

図3 4節点特殊要素

でも、等しい速度が得られる。この速度を衝突直後の接触点の速度として採用する。

この場合でも離散化モデルでは、運動エネルギーが保存されない。このとき、接触端有限要素の持つ運動エネルギーのうち、一次近似要素では約66%、二次近似要素では、10%のエネルギーが失われる(図5)。しかし、このエネルギーロス、接触端の要素長を小さくすることによって、減少させることができるとして、認めることとする。

2.5 解析手順 解析のフローチャートを図6に示す。時間増分内ではまず、剛性マトリックス、質量マ

図4 衝突する一次元弾性棒

(a) 一次近似 (b) 二次近似

図5 速度分布

図6 フローチャート

トリックスおよび右辺ベクトルが作成される。接触条件は、特殊要素の形で剛性マトリックスと右辺ベクトルに導入される。適当な時間積分法(ここでは Newmark- β 法, $\beta=1/4$ を用いる)を用いて次ステップの変位、速度、加速度を求める。必要なら、応力の計算を行う。また、非線形問題の場合、そのためのループが別に必要となる。接触状態の判定を行い、状態が収束するまで試行演算を行う。接触状態が収束すると、次の時間増分に移る。

3. 解析結果と考察

3.1 角棒の縦衝突問題と一次元理論解 縦衝突問題には、対称衝突と非対称衝突とがある。対称衝突とは、等価な2物体が等速で対向衝突するもので、接触面が対称面になるため、対称の境界条件を考慮するのみで解析でき、接触挙動に関する検討は不必要である。それに対し、非対称衝突では、そのような簡単な取扱いができないため、動的接触問題の手ごろな例題となり得る。

図7に、角棒の縦衝突問題の一次元波動伝ば理論を

$$\sigma = EV/2c, \quad c = \sqrt{E/\rho}$$

図7 一次元波動伝ば理論解

図8 要素分割(1)

用いた解を示す。ただし寸法は図8に対するものと同じであり、ヤング係数 $E=201 \text{ GPa}$ 、密度 $\rho=7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とした。応力波が伝ば、反射して、 $78.1 \mu\text{s}$ で完全に分離している。 $31.3 \sim 46.9 \mu\text{s}$ の間、接触力が0になって接している状態があることが、特徴的である。また、 $78.1 \mu\text{s}$ 以降、両棒のひずみエネルギーは0であり、静止あるいは並進運動を行っているのみである。このように簡単な例題でも、現実の現象と異なり、理想化した一次元理論の限界を示している。しかし、接触時間や接触応力の大きさに関しては、実験値との良い一致をみているので⁽¹⁹⁾、一応の目安とすることができる。

3.2 有限要素法による数値解 図8に本解析に用

図9 各時刻における応力分布

図10 端面近傍の応力の時間変化

いた有限要素分割を示す。計算条件は3.1節と同じであり、衝突速度 $V=1 \text{ m/s}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。図9に各時刻における応力分布を、図10に棒の端面近傍での長手方向応力の時間変化を、図11に接触力の時間変化を示す。それぞれ、一次元理論による解を実線あるいは破線で示している。時間増分は $\Delta t=0.5 \mu\text{s}$ である。

有限要素解は、一次元理論と同様の接触挙動を示し、応力レベル、接触時間に関して、良く一致しているが、高次振動があり、一次元理論解を中心に大きく振動している。図12に、さらに小さい時間増分、 $\Delta t=0.1 \mu\text{s}$ を用いた解との比較を示す。 $\Delta t=0.1 \mu\text{s}$ は、

図11 接触力の時間変化

図12 接触力に対する時間増分の影響

図13 接触力 ($\Delta t=0.2 \mu\text{s}$, $\nu=0$)

系の最小固有振動周期の約1/10にあたり、ほぼ離散化モデルの応答の限界を示している。 $\Delta t=0.5\mu\text{s}$ の解は、オーバーシュート（過応答）を起こしているが、その後の挙動は、 $\Delta t=0.1\mu\text{s}$ の解とあまり変わらない。このことは、この振動が離散化に伴う本質的な誤差であることを示唆している。

一次元理論解と有限要素解との間に差異がある原因として、横慣性の影響がある。そこでこの影響を除くため、ポアソン比 $\nu=0.0$ とした場合の接触力変化を図13に示す。 $\Delta t=0.2\mu\text{s}$ である。この結果においても高次振動がのっており、この振動の原因が離散化誤差であることが確かめられた。さらに、この振動の周期は約 $1\mu\text{s}$ であり、系の最小固有振動周期と一致している。

次に横慣性の影響を調べるため、棒の横方向にも細

図 14 要素分割 (2)

図 15 応力の計算点

図 16 応力分布の時間変化

分した要素分割（図14）を用い、図15に示した線上の応力分布と、接触力分布の時間変化を三次元的に表すことにする。図16の棒の横幅が40 mmのときの長手方向応力 σ_x と横方向応力 σ_y を示す。 $y=0$ mmが棒の端で、 $y=20$ mmが棒の中心線である。時間増分は $\Delta t=0.5\mu\text{s}$ であるが、最初の5ステップはオーバーシュートを防ぐため、 $\Delta t=0.1\mu\text{s}$ としている。まず、 σ_y をみると、棒の端の方で、0になり、中心線上では大きく振動している。これが横慣性による振動である。 σ_x では、高次振動を平均化すると、棒の中心線上ではほぼ一定であり、端で σ_y の振動に同期した振動を起こしている。すなわち、 σ_y が引張りになれば小さく、圧縮になれば大きくなっている。この振

図 17 接触圧力分布の時間変化

図 18 応力分布の時間変化

図 19 接触圧力分布の時間変化

動の周期は、横方向自由振動周期、約 $16 \mu\text{s}$ と一致しており、横慣性による振動であることをよく表している。このときの接触圧力分布を図17に示す。高次振動を平均化すると、棒の中心線上ではほぼ一定、端では σ_z にみられたのと同様な横慣性による振動がみられる。次に棒の幅を半分の 20 mm にしたときの解析例を図 18, 19 に示す。これによると、図16, 17にみられた振動の周期が半分の約 $8 \mu\text{s}$ になっており、この振動が横慣性によるものであることをよく表している。横慣性による振動には、低次モードだけではなく、高次モードの振動も含まれると考えられるが、離散化誤差による高次振動が現れるので、この判別は困難になっている。

4. 結 論

本論文において、次の結論を得た。

- (1) ペナルティ関数法による動的接触問題の有限要素法定式化を行った。
- (2) 例題として、角棒の縦衝突問題を取り上げ、妥当な結果を得た。
- (3) 結果にあらわれる高次振動が離散化誤差によるものであることが確かめられた。
- (4) 横慣性による振動が存在し、その周期が横方向自由振動周期に対応していることが数値的に確かめられた。

なお、本論文の方法は、文献(5)および(12)に示されるような薄肉部材の動的接触問題にも適用が可

能であると考えられる。

本論文は、高温構造安全技術研究組合が受けた電力共研の成果の一部であり、貴重なご助言をいただいた。柴田 碧、岡村弘之両東京大学教授をはじめとする ISES 1512 グループ各委員に感謝する。また、東芝(株)平山 浩氏、(株)間組、三好昭生氏には、個別に貴重なご意見をいただいたことを記する。

文 献

- (1) Herz, H., *Gesammelte Werke*, T. 1 (1895), 179.
- (2) 大手, 機論, 38-313 (昭 47), 2210.
- (3) 薦・山地, 機誌, 76-651 (昭 48), 348.
- (4) 岡本, 機論, 43-374 (昭 46), 3716.
- (5) 矢川・ほか 2 名, 機論, 46-411, A (昭 55), 1220.
- (6) Hughes, T.J., ほか 4 名, *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 8 (1976), 249.
- (7) Stadter, J.T. and Weiss, R. O., *Comp. Struct*, 10 (1979), 867.
- (8) Hallquist, J.O., *Computational Techniques for Interface Problems*, AMD-Vol.30 (1978), 117.
- (9) Johnson, G.R., *Trans. ASME, Ser. E*, 99-1(1977), 95.
- (10) 土肥・浅野, 機論, 46-407, A (昭 55), 826.
- (11) 浅野, 機論, 46-411, A (昭 55), 1249.
- (12) 浅野, 機論, No.820-1 (昭 57-4), 83.
- (13) 矢川・ほか 2 名, 鋼構造協会第 13 回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, (昭 56), 215.
- (14) Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, (1965), Pergamon Press.
- (15) 矢川・ほか 2 名, 機論, No.810-10 (昭 56-10), 134.
- (16) 浅野, 機論, No.810-1 (昭 56-4), 219.
- (17) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, (1977), McGraw-Hill.
- (18) 秋田, 第 29 回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭 54), 71.
- (19) 浅野, 機論, No.800-9 (昭 55-7), 95.

討 論

〔質問〕 尾田十八〔金沢大学工学部〕

非常に有意義な研究で興味深く拝見した。次の点についてご教示願いたい。

(1) 諸言で本法の特徴を三つ挙げられており、その(iii)の点と、2章の理論の部分で述べられている本法が接触状態を仮定しつつ表2の判定を行い再計算も実行しながら行うということとは一見矛盾しているように思うがいかがか。

(2) 数値計算例の精度についてであるが、従来 FEM で動的問題を解析すると、時間増分 Δt のみならず、要素の分割の仕方によっても、かなり解が影響されるように聞いているが、この点本法の例題ではどのようなものであったのか。

〔回答〕 (1) 特長の(iii)に挙げたのは、クーロンの摩擦条件を満足させるための繰返しが必要であ

るということであり、2章の理論で述べているのは、接触状態の変化という接触問題特有の非線形性を収束させるための繰返し計算を行うということで、両者は全く別のものを意味している。

有限要素法による接触問題の解法は接触条件の取扱い方により、次の四つに分類できる。①接触条件を剛性方程式に組み込まず、繰返し計算を行って接触条件を満足させる方法、②非常に薄い接触特殊要素を用いる方法、③剛性方程式の変形により、直接、接触条件を組み込む方法、④ラグランジュの未定数法、ペナルティ関数法を用いる方法、である。

このうち①は摩擦条件に限らず、すべての接触条件について繰返しが必要であり、②は摩擦条件を満足させるための繰返しが必要である。③、④の方法は、本手法と同様、摩擦条件を満足させるための繰返しが必要

であるが、(i)～(iii)の特長を同時に有するのは、ペナルティ関数法を用いる方法のみである。

接触状態の収束のための繰返しは、 $t \sim t + \Delta t$ 間の接触状態の仮定により、必要または不要となる。時刻 t における接触状態を用いて $t \sim t + \Delta t$ 間の計算を行えば、繰返しは不要である。しかし、時刻 $t + \Delta t$ における接触状態を用いるよう試行計算を行えば、時刻 $t + \Delta t$ における力の平衡を達成することができ、解の収束性に関し、有利と考えられるので、本法ではこれを用いた。前ステップと接触状態が変化していなければ、当然、この繰返しは不要となる。

(2) 本解析では、要素分割の違いによる解への影響については検討していないが、他の有限要素法による動的解析の場合と同様であると思われる。衝突方向に対し垂直な方向の分割の違いについては、図8の要素分割を用いた結果の図12と、図14の要素分割を用いた結果の図17及び図19との比較により、大きな差異はないといえる。衝突方向については、他の分割で解析していないが、細かく分割すれば、解にあらわれる高次振動の周期は短くなり、その振幅も小さくなると思われる。