走査モアレ法によるひずみ計測*

森本吉春**, 林卓夫**, 山口典之***

Strain Measurement by Scanning Moire Method

by Yoshiharu MORIMOTO, Takuo HAYASHI,
and Noriyuki YAMAGUCHI

A scanning moire method is a moire method in which the master grating is replaced by the scanning lines of a television camera.

In the present paper, the principle of moire pattern appearance, the effects of thinning out of scanning lines and the relation between moire fringes and strain are studied by the sampling theorem. If a deformed model grating is sampled by a television camera and it is thinned out properly by using image processing system, the strain distribution with wide strain range can be analyzed from one picture.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Strain Measurement, Moire, Scanning Moire Method, Scanning, Sampling Theorem, Image Processing

1. 緒言

モデルグリッドのような周期関数で与えられる画像を周期的かつ離散的に標本化した場合に、モアレじまが発生することはよく知られている。このモアレじまの発生原因は、ディジタル信号処理でよく取扱われるエイリアジング(aliasing)と呼ばれる現象である。しま模様の服を着た人がテレビに映ると、服の模様とは異なる模様が動いているように見えるのもこの現象である。

著者は、以前にパソコンによる画像処理システムを開発し、しま画像解析を手がけてきた。その中でモデルグリッドをテレビカメラで取り込むことによって発生するモアレじまを解析して、ひずみ分布を求める走査モアレ法の考えを提案し、その例を示した⁽¹⁾。

本報では、この走査モアレ法によるひずみ計測を理論的に解明するために、まずディジタル信号理論を用いて画像の標本化について述べ、さらにモデルグリッド(以後、特に説明のない場合はグリッドと呼ぶ)のテレビカメラによる標本化に適用し、モアレパターン

の発生原理について述べる。次に標本化理論を発展させ、走査モアレ法の特徴の一つである走査線の間引きによるモアレパターンの発生について述べる。さらに実際にモデルグリッドとしてよく使われる白と黒の二つの濃度の線の繰返しによるパターンを標本化したときに発生するモアレパターンについても調べる。最後に、走査モアレ法によって発生したモアレじまとひずみの関係について調べる。

2. 標本化によるモアレパターンの発生⁽¹⁾⁽²⁾

この章では、3章で述べる走査モアレ法の基礎原理を導くために必要な標本化理論の基礎式すなわち標本化における原画像と再生画像との関係式について述べグリッドの標本化に適用する。

2・1 画像の標本化 画像が帯域制限された関数 $f(\vec{r})$ で与えられるものとする。ここで $\vec{r}$ は画像平面の位置ベクトルである。これを標本化格子上的点 $\vec{r}_{mn} (-\infty < m, n < \infty$ の整数) で標本化し、その標本値を $f(\vec{r}_{mn})$ とする。再生信号 $\hat{f}(\vec{r})$ は内挿関数 $g(\vec{r})$ を使って次のように書くことができる。

$$\hat{f}(\vec{r}) = \sum_m \sum_n f(\vec{r}_{mn}) g(\vec{r} - \vec{r}_{mn}) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$\hat{f}(\vec{r}), f(\vec{r}), g(\vec{r})$ をフーリエ変換可能であるとして、

* 昭和58年11月28日 第923回講演会において講演、原稿受付 昭和58年5月25日。

** 正員、大阪大学基礎工学部 (〒560豊中市待兼山町1-1)。

*** 学生員、大阪大学基礎工学部。

それぞれのフーリエ変換を $\hat{F}(\vec{\omega})$, $F(\vec{\omega})$, $G(\vec{\omega})$ で表すと、式(1)は次のように書ける。

$$\hat{F}(\vec{\omega}) = \frac{G(\vec{\omega})}{Q} \sum_p \sum_q F(\vec{\omega} - \vec{\omega}_{pq}) \dots\dots\dots (2)$$

ここで $\vec{\omega}$ は周波数ベクトル, $\vec{\omega}_{pq}$ ($-\infty < p, q < \infty$ の整数) は周波数平面上の相反ベクトルである。式(2)において Q は、 x 方向、 y 方向の標本化間隔を X, Y とすると、

$$Q = XY \dots\dots\dots (3)$$

で表される。いま $G(\vec{\omega})$ を次のような周波数スペクトルをもつ関数であると仮定する。ただし式(4)において ω_x, ω_y は $\vec{\omega}$ の x 成分、 y 成分である。

$$G(\vec{\omega}) = \begin{cases} Q \left(|\omega_x| < \frac{|\vec{\omega}_{1,0}|}{2} \text{ かつ } |\omega_y| < \frac{|\vec{\omega}_{0,1}|}{2} \right) \\ 0 \text{ (その他)} \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

$f(\vec{r})$ の周波数スペクトル $F(\vec{\omega})$ の分布が $G(\vec{\omega}) = Q$ である領域内にある場合は、エイリアジングが起こらず正確に再生される。一方、 $F(\vec{\omega})$ の分布が $G(\vec{\omega}) = Q$ である領域からはみ出すと、エイリアジングが起こり元の画像は正確には再生されない。

2・2 モアレパターンの発生原理 いま次のような正弦状の濃度分布をもつグリッドを標本化する。以後これを正弦波パターンのグリッドと呼ぶ。

$$f(\vec{r}) = \cos 2\pi(\vec{\omega}' \cdot \vec{r}) \dots\dots\dots (5)$$

ここで $\vec{\omega}'$ はグリッドの周波数ベクトルである。これをフーリエ変換すると、次のようになる。

$$F(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \{ \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}') + \delta(\vec{\omega} + \vec{\omega}') \} \dots\dots\dots (6)$$

したがってこの画像のフーリエ変換は図1に示すように周波数平面において、 $\vec{\omega}'$ と $-\vec{\omega}'$ の二つのインパルスをもつ。図1において破線で囲む長方形内で $G(\vec{\omega}) = Q$ (一定)、それ以外で $G(\vec{\omega}) = 0$ とすると、ベクトル $\vec{\omega}'$ が長方形内にあるならば、式(5)に示すグリッドが再生される。一方 $\vec{\omega}'$ が破線の長方形外にあり、相反格子と $\vec{\omega}'$ の関係が図2に示すようになる場合の再生を考える。

再生画像のフーリエ変換は式(6)を式(2)に代入して次のように表される。

$$\hat{F}(\vec{\omega}) = \frac{G(\vec{\omega})}{2Q} \sum_p \sum_q \{ \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_{pq} - \vec{\omega}') + \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_{pq} + \vec{\omega}') \} \dots\dots\dots (7)$$

$G(\vec{\omega})$ は破線の長方形外で零であるから、式(7)のうち次の二つの項が残る。

$$\hat{F}(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} [\delta\{\vec{\omega} - (\vec{\omega}' + \vec{\omega}_{0,-1})\} + \delta\{\vec{\omega} - (-\vec{\omega}' + \vec{\omega}_{0,1})\}] \dots\dots\dots (8)$$

すなわち再生画像のフーリエ変換は、図2に示すように $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_{0,-1}$ と $\vec{\omega} = -\vec{\omega}' + \vec{\omega}_{0,1}$ において二つのインパルスをもつ。再生画像は式(8)の逆フーリエ変換であるから、

$$\hat{f}(\vec{r}) = \cos 2\pi \{ (\vec{\omega}' - \vec{\omega}_{0,1}) \cdot \vec{r} \} \dots\dots\dots (9)$$

で与えられ、これがモアレパターンとして見える。

3. 標本化理論の走査モアレ法への適用

3・1 間引きによるモアレパターンの発生 モアレ法において試料の変形量がある値を超えると、2種類のしま指数方程式⁽⁴⁾を満たすしまが重なって現れ、しまとして認識できなくなる。もしそれぞれのしまを独立に取り出そうとするならば、ピッチの異なるマスタグリッドをおきかえなければならないが、種々の理由により不可能な場合が多い。

走査モアレ法では、通常画素間隔を基本長さとしてグリッドを標本化するが、画像処理により画素間隔の整数倍を標本化間隔として標本化することも可能である。すなわちモアレ法におけるマスタグリッドのピッチを大きくしてミスマッチを行うことに相当し、この手法を間引き (Thinning out) と呼ぶ。間引きにより個々のしま指数方程式を満たすしまを独立に取り出すことができ、大ひずみ計測が可能となる。

いま、変形後のモデルグリッドが式(5)と同様な正弦波パターンになったとする。もし加えられた変形が

図1 グリッドの周波数ベクトル

図2 モアレパターンの周波数ベクトル

大きな引張り変形でグリッドの周波数ベクトル $\vec{\omega}'$ が図3に示す破線の長方形内に入ったとする。そのままの標本化間隔では、グリッドが再生されるのみでモアレパターンは生じない。

そこで y 方向の標本化間隔を N 倍にする ($N \geq 1$ の整数)。これを $N-1$ 本間引きと呼ぶことにする。言い換えれば標本化周波数を $1/N$ にすることである。その時の相反格子は、図4に示すように y 方向に $1/N$ に縮められている。

$N-1$ 本間引きの時、再生画像のフーリエ変換は式(2)において変数 $G(\vec{\omega})$, $Q, \vec{\omega}_{pq}$ の左下に添字 N をつけたもので表し、これを式(2)'とする。 NQ は $N-1$ 本間引きの時の y 方向の標本化間隔が N 倍になっていることから、

$${}_NQ = NQ \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。式(6)を式(2)'に代入して以後の式の変形は式(7)~(9)において変数 $G(\vec{\omega})$, $Q, \vec{\omega}_{pq}$ の左下に添字 N をつけたもので表し、これを式(7)'~(9)'とする。すなわち ${}_NG(\vec{\omega})$ は図4に示す間引き後の相反格子における太破線の長方形内で ${}_NQ$ の値を取り、その長方形内の $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + N\vec{\omega}_{0,-1}$ と $\vec{\omega} = -\vec{\omega}' + N\vec{\omega}_{0,1}$ において二つのインパルスをもつ。したがって、周波数スペクトルが $\vec{\omega}' - N\vec{\omega}_{0,1}$ であるモアレパターンが発生する。

図5に正弦波パターンのグリッドの間引きなしから5本間引きのシミュレーションを示す。 N が1から3の時はグリッドが再生され、 $N=4$ ではグリッドもモアレしまも認識できず、 N が5から6になるとモアレしまが発生している。

3.2 グリッドとモアレパターンの位相の関係

式(5)に示す正弦波パターンのグリッドの位相が ϕ だけずれたとする。この時、グリッドは

$$f(\vec{r}) = \cos\{2\pi(\vec{\omega}' \cdot \vec{r}) + \phi\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と表される。これをフーリエ変換する。

$$F(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \{ \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \exp(j\phi) + \delta(\vec{\omega} + \vec{\omega}') \exp(-j\phi) \} \quad \dots\dots\dots (12)$$

図3 グリッドの周波数ベクトル

式(12)を式(2)に代入すると零でない2項が残る。

$$\begin{aligned} \hat{F}(\vec{\omega}) = & \frac{1}{2} \{ \delta\{\vec{\omega} - (\vec{\omega}' + \vec{\omega}_{0,-1})\} \exp(j\phi) \\ & + \delta\{\vec{\omega} + (\vec{\omega}' - \vec{\omega}_{0,1})\} \exp(-j\phi) \} \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

これを逆フーリエ変換すると

$$\hat{f}(\vec{r}) = \cos\{2\pi(\vec{\omega}' - \vec{\omega}_{0,1}) \cdot \vec{r} + \phi\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となり、グリッドの位相が ϕ だけずれた時の再生画像が与えられる。式(14)よりグリッドの位相が ϕ だけずれると、モアレパターンの位相も ϕ だけずれることがわかる。間引きの手法にこれを応用すれば、間引きの位相を ϕ だけずらすと、モアレパターンの位相も ϕ だけずれる。2本間引き以上の場合には、この位相のずれからしま次数の増減を判断するのに利用できる。例として2本間引きの場合について説明する。この場合走査線の間引き方には $3n$ 本め、 $3n+1$ 本め、 $3n+2$ 本め ($n=0,1,2,\dots$) を採用する3とおりがある。それぞれの間引き方により、位相が $2\pi/3$ ずつずれた3種類のモアレしまが発生する。3種類のモアレしまの並び方からしま次数の増減が判断できる。

3.3 方形波グリッドとモアレパターンの関係

実際にモアレ法に用いるグリッドは白黒の2値濃度の繰返しパターンであることが多い。以後これを方形波パターンのグリッドと呼ぶ。ここでは走査モアレ法において方形波パターンのグリッドを用いた場合のモアレ

図4 間引きによるモアレパターンの周波数ベクトル

図5 正弦波グリッドの間引きシミュレーション

レパターンとグリッドの関係について述べる。

方形波パターンのグリッドは周期を p 、黒い部分の幅を d とすると、次のようにフーリエ展開できる。

$$f(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\{j2\pi n(\vec{\omega}' \cdot \vec{r})\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{cases} C_0 = \frac{2d}{p} - 1 \\ C_n = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi d}{p} \quad (n \neq 0) \end{cases}$$

ただし $|\vec{\omega}'| = 1/p$ なる関係がある。

いま、簡単のため $d = p/2$ で、 x 方向均一ひずみの場合を考えると、グリッドは式(16)で表される。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(j \frac{2\pi n}{p} x\right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_n = \text{sinc} \frac{n\pi}{2} \quad (n \neq 0) \end{cases}$$

これをフーリエ変換すると次のようになる。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta\left(\omega - \frac{n}{p}\right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

一方、式(2)'を一次元の式に書きかえると

$$\hat{F}(\omega) = \frac{NG(\omega)}{NX} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F(\omega - N\omega_q) \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。ここで X は x 方向の標準化間隔、 N は間引き数に1を加えた数である。

図6は、グリッドの描かれた試料がグリッドに垂直な方向のみの変形を受け、グリッドの周期が8画素間隔になった時の間引きのシミュレーションである。間引き数の違いによる再生画像の特徴が異なるものを3種類示す。

図6の(a)~(c)について周波数スペクトルの状態を図7に示し、再生画像の周波数スペクトルを調べる。ただし図7において、実線で示すスペクトルは $F(\omega)$ を、破線で示すスペクトルは $F(\omega \pm N\omega_1)$ を、さらに一点鎖線で示すスペクトルは $F(\omega \pm N\omega_2)$ を表し、再生画像のスペクトルは太実線で表す。

(1) 間引きなし(標準化周期 $p/8$) 再現可能な周波数範囲は $(-4/p, 4/p)$ であり、その範囲内で式(18)における $NG(\omega)$ は NX の値をとり、それ以外で零となる。エイリアジングの結果、その範囲内に現れる各周波数スペクトルは式(17)を式(18)に代入して次のように表される。周波数スペクトルの位置は変わらないのでグリッドが再生される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}\left(\pm \frac{1}{p}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{8l-1} \\ \hat{F}\left(\pm \frac{3}{p}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{8l-3} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(2) 4本間引き(標準化周期 $5p/8$) 再現可能な周

波数範囲は $(-4/5p, 4/5p)$ であり、その範囲内に現れる各周波数スペクトルは式(18)を用いて、次のように表される。その位置は $\omega = \pm 1/5p, \pm 3/5p$ であるが、大きさは前記(1)の間引きなしの場合に比べ高周波側と低周波側が逆転している。したがってグリッドは再生されない。

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}\left(\pm \frac{1}{5p}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{8l-3} \\ \hat{F}\left(\pm \frac{3}{5p}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{8l-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

(3) 6本間引き(標準化周期 $7p/8$) 再現可能な周波数範囲は $(-4/7p, 4/7p)$ であり、 $\omega = \pm 1/7p, \pm 3/7p$ に次のような周波数スペクトルが現れ、方形

(a) 間引きなし (b) 4本間引き (c) 6本間引き

図6 方形波グリッドの間引きシミュレーション

(a) 間引きなし

(b) 4本間引き

(c) 6本間引き

図7 間引きによって現れる周波数スペクトル

波状のモアレパターンが発生する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}\left(\pm\frac{1}{7p}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{8l-1} \\ \hat{f}\left(\pm\frac{3}{7p}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{8l-3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

図7において再生された周波数スペクトルから再生画像を理論的に描いてみると、図8のようになる。図8に示す標本点からは実線で示す曲線は破線で示す方形波パターンの再生画像として見える。

図8からわかるように間引き方によってはグリッドのピッチが一定であるにもかかわらず、モアレじまの間隔が一定にならない場合がある。次に示すしま間隔からひずみを求める手法では、このようなしまが現れないよう、適切な間引き数を選ばなければならない。

4. モアレじまとひずみの関係⁽⁴⁾

ここでは、モアレじまの y 方向のしま間隔とひずみの関係式を得る。

変形前のグリッドのピッチを p_0 、その周波数ベクトルの方向 $\theta_0 = \pi/2$ 、変形後のそれらを p' 、 θ' とすると、 θ' 方向の真ひずみ ε は次式で表される。

$$\varepsilon = \frac{p' - p_0}{p'} \dots\dots\dots (22)$$

ひずみが一定であるような微小部分を取り出し、その部分のグリッドとモアレパターンの周波数ベクトルの関係が、図9のようになっていたとすると、変形前のグリッドの周波数ベクトル $\vec{\omega}_0$ 、変形後のそれ $\vec{\omega}'$ は、 p_0, p' を使って次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}_0 &= \frac{1}{p_0}(0, 1) \\ \vec{\omega}' &= \frac{1}{p'}(\cos \theta', \sin \theta') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

また y 方向の画素間隔すなわち走査線のピッチを p とし、 p と p_0 との間にはミスマッチ係数 λ を介して次のような関係があるとすると、

$$p = \lambda p_0 \dots\dots\dots (24)$$

$N-1$ 本間引きを行って現れるモアレパターンは、

$$\hat{f}(\vec{r}) = \cos\{2\pi(\vec{\omega}' - N\vec{\omega}_{0,1}) \cdot \vec{r} + \phi\} \dots\dots\dots (25)$$

で表される。ここで $N-1$ 本間引きの時の標本化の周波数ベクトルは次式で表される。

$$N\vec{\omega}_{0,1} = \frac{1}{Np}(0, 1) \dots\dots\dots (26)$$

式(25)より、モアレじまの周波数ベクトルは、

$$\vec{\omega} = \pm(\vec{\omega}' - N\vec{\omega}_{0,1}) \dots\dots\dots (27)$$

となる。またモアレパターンのピッチを p_M とするとモアレパターンの周波数ベクトルは、

$$\vec{\omega} = \pm \frac{1}{p_M}(\cos \theta_M, \sin \theta_M) \dots\dots\dots (28)$$

と表される。さらに p_M と y 方向のしま間隔 δ_y との関係は次のようになる。

$$p_M = \delta_y \sin \theta_M \dots\dots\dots (29)$$

式(27)に式(22)、(23)、(26)、(28)を代入して p, p' および θ' を消去し、さらに式(29)を使うと δ_y と ε との関係式が導かれる。

$$\delta_y = \frac{N\lambda p_0}{\sin^2 \theta_M - \sin \theta_M \sqrt{N^2 \lambda^2 (1 - \varepsilon)^2 - \cos^2 \theta_M}} \dots\dots\dots (30)$$

y 方向均一ひずみであるならばモアレパターンの周波

(a) 間引きなし

(b) 4本間引き

(c) 6本間引き

図8 理論的に得た再生画像

図9 グリッドとモアレパターンの周波数ベクトル

数ベクトルは y 軸に平行となる。すなわち $\theta_M = \pi/2$ となるから式(30)は次のようになる。

$$\delta_y = \frac{N\lambda p_0}{1 - N\lambda(1 - \varepsilon)} \dots\dots\dots (31)$$

上式よりしま間距離の測定によって、ひずみが計算できる。なおしま間距離の測定において大きくて間引き後の標本化間隔分の測定誤差が生じる。それゆえしま間隔が標本化間隔と同じ程度小さい場合には、しま間隔の測定誤差がひずみの誤差に大きく影響する。したがって、間引き数を変えてしま間隔を大きくし、これからひずみを計算するほうがよい。さらに間引きの位相を変えたものを用いるとしまの本数が増え誤差の少ないひずみが多くの特で求められる。

5. 結 言

本報の結果として、次のように結論づけることができる。

- (1) 走査モアレ法によるひずみ計測を、標本化理

論を用いて説明することができた。この理論は従来のモアレ法にも適用できる。すなわちマスタグリッドの役割は、モデルグリッドの描かれた試料表面を等間隔に標本化することである。

(2) 走査モアレ法では、間引きにより1枚の画像から、大ひずみも小ひずみも測定することができる。したがって応力集中など広い範囲のひずみが分布している試料についても測定が簡単である。

(3) 走査モアレ法では、間引き数と間引きの位相を変えることによって、測定精度を上げることができる。

文 献

- (1) Rosenfeld, A. and Kak, A. C., *Digital Picture Processing*, 1 (1981), Academic Press.
- (2) 前田, デジタル信号処理の基礎, (昭55), 53, オーム社.
- (3) 森本・白石, 材料, 33-367 (昭59).
- (4) 村上・村上, 材料, 23-255 (昭49), 1075.