無限弾性体中の介在物の最適形状*

山崎 光悦**, 尾田 十八**

On Optimum Shape of Inclusion in Infinite Elastic Solid

by Kouetsu YAMAZAKI and Juhachi ODA

A theoretical method to determine an optimum shape of inclusion within an elastic infinite solid, which is subjected uniformly to triaxial loading condition, is proposed. The Eshelby's solution on the elastic body with an ellipsoidal inclusion is used in the method and the optimum ratios between principal axes of the ellipsoid are determined so as to uniformize the distribution of the stress components, normal and tangential to the boundary, of the inclusion.

From the numerical results for the models with the typical elastic stiffness ratios of the inclusion to the matrix, it is appeared that the ellipsoid becomes slender according as the applied axial stress ratios become distant from unit.

Furthermore, optimum shape of the elliptic inclusion in the two dimensional stress field is also determined, and the relations between the optimum ratio of principal axes of the ellipse and the applied stress are shown explicitly.

Key Words: Elasticity, Infinite Solid, Ellipsoidal Inclusion, Eigen Strain, Stress Concentration, Optimum Shape

1. 緒 言

三次元物体や二次元平板中に母材とは弾性定数の異なる介在物や空孔が存在すると、一般にその接合境界に応力集中を生じやすく、破損・破壊の原因となることが多い。したがって、与えられた負荷条件に対して接合境界における応力分布を均一とする介在物の最適形状を求めておくことは、強度設計上将来にわたって有用なことから考えられる。しかし、こうした観点に立つ研究としては、2軸応力場下の平板中の空孔形状を求めた結果⁽¹⁾⁽²⁾が存在するのみである。

そこで本報では、無限弾性体(母材)中に存在する弾性介在物の最適形状を、Eshelby のだ円体介在物の解⁽³⁾⁽⁴⁾を基にして決定する。すなわち、無限遠方での3軸の一樣負荷条件と、母材と介在物の弾性定数が与えられたときに、介在物境界に発生する応力分布を一樣とする介在物の最適形状がだ円体によって達成されることを示し、その最適だ円体の形状寸法比と発生応力を求める。また代表的な数種類の介在物と母材の弾性定数比について最適形状寸法比の数値例を示す。さ

らに無限平板中のだ円形介在物や無限体中のだ円柱介在物に対する Jaswon-Bhargava の解⁽⁵⁾を用いて、二次元応力場における介在物の最適形状も決定する。

2. だ円体介在物の応力場

図1に示すように無限遠方で $\sigma_{ij}^{\infty}(i, j=1, 2, 3)$ なる一樣応力を負荷された無限弾性体(母材) D 中に、座標軸 x_1, x_2, x_3 方向に主軸(主軸半長を a_1, a_2, a_3 とする)をもつ

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1 \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

なる形状のだ円体弾性介在物 Ω を考える。無限遠方で負荷される応力 σ_{ij}^{∞} によって生ずるひずみ場は、もし介在物 Ω が存在しなければ至るところで一樣な値 $\varepsilon_{ij}^{\infty}$ となる。すなわち、

$$\sigma_{ij}^{\infty} = 2\mu\varepsilon_{ij}^{\infty} + \lambda\varepsilon_{kk}^{\infty}\delta_{ij} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここに、 μ, λ は母材のラーメの定数、 δ_{ij} はクロネツカのデルタであり、 $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ (以後同一添字は総和規約に従う)とする。ところが介在物 Ω は弾性定数(μ_1, λ_1 とする)が異なるため、同一の応力場 σ_{ij}^{∞} を生ずるのに必要なひずみ場は母材の場合と異なる。それを ε_{ij}^B とおくと

$$\sigma_{ij}^{\infty} = 2\mu_1\varepsilon_{ij}^B + \lambda_1\varepsilon_{kk}^B\delta_{ij} \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

* 昭和 58 年 11 月 29 日 第 923 回講演会において講演、原稿受付 昭和 58 年 5 月 25 日。

** 正員、金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)。

そこで一様な応力場 σ_{ij}^0 、ひずみ場 ϵ_{ij}^0 からの乱れ分に相当する応力およびひずみを $\sigma_{ij}^1, \epsilon_{ij}^1$ とすると、介在物内で σ_{ij}^0 はひずみ $\epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}^1 - \epsilon_{ij}^B$ によって生ずると考えられる。よって式(3)を用いると

$$\sigma_{ij}^C = 2\mu_1(\varepsilon_{ij}^C + \varepsilon_{ij}^A) + \lambda_1(\varepsilon_{ii}^C + \varepsilon_{ii}^A)\delta_{ij} - \sigma_{ii}^\infty \cdots (4)$$

この問題は次のような等価介在物を考えることによって解くことができる⁽³⁾。すなわち、形状は介在物 Ω に等しく、弾性定数は母材に等しいある適当な固有ひずみ ϵ_0 (変形拘束がなければ応力を生じない一様ひずみ) であり、変形拘束を受ける場合それによって生ずる変位、ひずみ、応力場はだ円体介在物内で一様性が保証される) をもった等価な介在物によって実際の介在物の作る変位、ひずみおよび応力の乱れ分を再現することができる。つまり、

$$\sigma_{ij}^c = 2\mu(\varepsilon_{ij}^c - \varepsilon_{ij}^0) + \lambda(\varepsilon_{ii}^c - \varepsilon_{ii}^0)\delta_{ij} \dots\dots\dots (5)$$

そこで式(2), (4), (5)より

$$\begin{aligned}
& 2(\mu - \mu_1)\varepsilon_{ij}^e + (\lambda - \lambda_1)\varepsilon_{ii}^e \delta_{ij} \\
& - 2\mu\varepsilon_{ij}^o - \lambda\varepsilon_{ii}^o \delta_{ij} \\
& = \left(\frac{\mu_1}{\mu} - 1 \right) \sigma_{ij}^o + \frac{\mu\lambda_1 - \mu_1\lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \sigma_{ii}^o \delta_{ij} \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

外力負荷がなく、母材と等しい弾性定数をもつた円体領域に固有ひずみ ε_{ij}^0 が存在する場合のひずみ場 ε_{ij} は、Eshelby テンソル S_{ijkl} を用いて次式で与えられる⁽³⁾

$$\varepsilon_{ij}^c = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \dots\dots\dots (7)$$

ここに、母材のポアソン比を ν として

$$S_{III} = Qa_1^2 I_{II} + RI_1.$$

$$S_{1122} = Qa_2^2 I_{12} - RI_1,$$

$$2S_{1212} = Q(a_1^2 + a_2^2)I_{12} + R(I_1 + I_2).$$

$$Q = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}, \quad R = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)},$$

$$I_1 = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)\Delta},$$

$$I_{11} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)^2 A},$$

$$I_{12} = \frac{2\pi a_1 a_2 a_3}{3} \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)A},$$

$$\Delta = \{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)\}^{1/2}$$

ここに u は積分変数とする。他の S_{ijkl} は指標を順に交換して得られる。また S_{1112}, S_{1223} のように一つの指標が奇数回含まれる成分は零である。以上により、式 (6)、(7) より無限遠方負荷応力に対応する ε_{ij}^0 が決定でき、式 (4) あるいは式 (5) より介在物に生ずる応力場が求まる。

さて、負荷応力 σ_{ij}^0 として主応力 $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$ を考え、主応力場での介在物の最適だ円体形状を決定すれば、その解はすべての応力場に対して適用可能であ

図 1 無限遠方負荷を受けるだ円体介在物

る。そこで固有ひずみ ε_{ij}^0 として垂直ひずみ $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{33}^0$ のみが存在する場合に限定して以後の理論展開を進め、最適形状決定の準備をする。式(7)より

$$2(\varepsilon_{11}^c \mp \varepsilon_{22}^c) = (Q - R)(I_1 \mp I_2)(\varepsilon_{11}^o + \varepsilon_{22}^o) \\ + \{Q(a_1^2 I_{11} - a_2^2 I_{12} \mp a_1^2 I_{21} \pm a_2^2 I_{22}) \\ + 2R(I_1 \pm I_2)\}(\varepsilon_{11}^o - \varepsilon_{22}^o) - \{Qa_3^2(I_{13} \mp I_{23}) \\ - R(I_1 \mp I_2)\}(\varepsilon_{11}^o + \varepsilon_{22}^o - 2\varepsilon_{33}^o),$$

$$\begin{aligned}
& 2(\epsilon_{11}^c + \epsilon_{22}^c - 2\epsilon_{33}^c) \\
&= (Q - R)(I_1 + I_2 - 2I_3)(\epsilon_{11}^o + \epsilon_{22}^o) + \{Q(a_1^2 I_{11} \\
&- a_2^2 I_{12} + a_1^2 I_{21} - a_2^2 I_{22} - 2a_1^2 I_{31} + 2a_2^2 I_{32}) \\
&+ 2R(I_1 - I_2)\}(\epsilon_{11}^o - \epsilon_{22}^o) \\
&- \{Qa_3^2(I_{13} + I_{23} - 2I_{33}) - R(I_1 + I_2 - 2I_3)\} \\
&\times (\epsilon_{11}^o + \epsilon_{22}^o - 2\epsilon_{33}^o) \quad (\text{複号同順}) \dots\dots\dots (8)
\end{aligned}$$

他の $\varepsilon_{ij}^0 (i \neq j)$ はすべて零となる。このときの介在物に生ずる応力は式(5)より

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c &= 2\mu\{(\epsilon_{11}^c - \epsilon_{22}^c) - (\epsilon_{11}^0 - \epsilon_{22}^0)\}, \\ \sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c &= (2\mu + 3\lambda)\{(\epsilon_{11}^c + \epsilon_{22}^c) - (\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0)\} \\ &\quad - \lambda\{(\epsilon_{11}^c + \epsilon_{22}^c - 2\epsilon_{33}^c) - (\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0 - 2\epsilon_{33}^0)\}, \\ \sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c - 2\sigma_{33}^c &= 2\mu\{(\epsilon_{11}^c + \epsilon_{22}^c - 2\epsilon_{33}^c) \\ &\quad - (\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0 - 2\epsilon_{33}^0)\} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となり、せん断応力成分は零となる。また介在物の境界面での法線方向に ξ 軸、 x_1 - x_2 平面に平行な面内の接線方向に η 軸、それらと直交する子午線方向に ζ 軸を取り、図 1 に示すように角度 θ, φ を定義すると ξ - η - ζ 座標系での応力成分は

$$\begin{aligned}
4\sigma_{\xi\xi}^{\varepsilon} &= (\sigma_{11}^{\varepsilon} + \sigma_{22}^{\varepsilon} + 2\sigma_{33}^{\varepsilon}) - (\sigma_{11}^{\varepsilon} + \sigma_{22}^{\varepsilon} - 2\sigma_{33}^{\varepsilon}) \cos 2\varphi \\
&\quad + (\sigma_{11}^{\varepsilon} - \sigma_{22}^{\varepsilon})(1 - \cos 2\varphi) \cos 2\theta, \\
2\sigma_{\eta\eta}^{\varepsilon} &= (\sigma_{11}^{\varepsilon} + \sigma_{22}^{\varepsilon}) - (\sigma_{11}^{\varepsilon} - \sigma_{22}^{\varepsilon}) \cos 2\theta, \\
4\sigma_{\xi\eta}^{\varepsilon} &= (\sigma_{11}^{\varepsilon} + \sigma_{22}^{\varepsilon} + 2\sigma_{33}^{\varepsilon}) + (\sigma_{11}^{\varepsilon} + \sigma_{22}^{\varepsilon} - 2\sigma_{33}^{\varepsilon}) \cos 2\varphi \\
&\quad + (\sigma_{11}^{\varepsilon} - \sigma_{22}^{\varepsilon})(1 + \cos 2\varphi) \cos 2\theta, \\
2\sigma_{\xi\eta}^{\varepsilon} &= -(\sigma_{11}^{\varepsilon} - \sigma_{22}^{\varepsilon}) \sin \varphi \sin 2\theta, \\
2\sigma_{\eta\xi}^{\varepsilon} &= -(\sigma_{11}^{\varepsilon} - \sigma_{22}^{\varepsilon}) \cos \varphi \sin 2\theta, \\
4\sigma_{\xi\xi}^{\varepsilon} &= (\sigma_{11}^{\varepsilon} + \sigma_{22}^{\varepsilon} - 2\sigma_{33}^{\varepsilon}) \sin 2\varphi \\
&\quad + (\sigma_{11}^{\varepsilon} - \sigma_{22}^{\varepsilon}) \sin 2\varphi \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

一方、境界上における母材応力 s_{ij}^c は、 ξ, η, ζ 軸の方向余弦を n_i として次式で与えられる⁽³⁾。

$$s_{ij}^c = \sigma_{ij}^c + \frac{2\mu}{1-\nu} \varepsilon_{kk}^0 n_k n_i (n_i n_j - \nu \delta_{ij}) - \frac{2\nu\mu}{1-\nu} \varepsilon_{mm}^0 (n_i n_j - \delta_{ij}) + 2\mu \varepsilon_{ij}^0 - 2\mu \varepsilon_{ik}^0 n_k n_j - 2\mu \varepsilon_{jk}^0 n_k n_i \quad \cdots (11)$$

上式より境界面の接線および法線方向の母材応力成分は

$$\begin{aligned} s_{\xi\xi}^c &= \sigma_{\xi\xi}^c, s_{\xi\eta}^c = \sigma_{\xi\eta}^c, s_{\xi\zeta}^c = \sigma_{\xi\zeta}^c, s_{\eta\xi}^c = \sigma_{\eta\xi}^c, s_{\eta\eta}^c = \sigma_{\eta\eta}^c, \\ s_{\eta\zeta}^c &= \sigma_{\eta\zeta}^c + \frac{\mu}{1-\nu} \{(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) - (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) \cos 2\theta\} + \frac{\nu\mu}{2(1-\nu)} \{(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + 2\varepsilon_{33}^0) \\ &\quad + (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 - 2\varepsilon_{33}^0) \cos 2\varphi + (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0)(1 + \cos 2\varphi) \cos 2\theta\}, \\ s_{\zeta\xi}^c &= \sigma_{\zeta\xi}^c + \frac{\mu}{2(1-\nu)} \{(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + 2\varepsilon_{33}^0) + (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 - 2\varepsilon_{33}^0) \cos 2\varphi \\ &\quad + (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0)(1 + \cos 2\varphi) \cos 2\theta + 2\nu(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) - 2\nu(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) \cos 2\theta\} \quad \cdots (12) \end{aligned}$$

3. だ円体介在物の最適形状

無限遠方での負荷条件 $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$ が与えられたときの一般的な介在物の最適形状を、境界面の接線および法線方向の介在物のすべての応力成分が角度 θ, φ によらず一様となる形状と定義する。境界に生ずる実際のだ円体介在物の応力 σ_{ij} は式(10)に無限遠方負荷応力を重ね合わせて求まるから、最適の必要十分条件は同式より

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c &= -(\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0), \\ \sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c - 2\sigma_{33}^c &= -(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 - 2\sigma_{33}^0) \quad \cdots (13) \end{aligned}$$

上式が満足される時、式(10)、(12)より $\sigma_{\xi\xi}^c = \sigma_{\eta\eta}^c = \sigma_{\zeta\zeta}^c = s_{\xi\xi}^c$ は一様となり、また $\sigma_{\xi\eta}^c = \sigma_{\eta\xi}^c = \sigma_{\xi\zeta}^c = s_{\xi\eta}^c = s_{\xi\zeta}^c = 0$ となる。すなわち、式(13)を満足するようにだ円体介在物の寸法比を決定すれば、介在物の最適形状が達成される。そこで式(13)を式(9)の第1, 3式に代入すると

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{22}^c) - (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0), \\ = -\frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{2\mu} \\ (\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c - 2\varepsilon_{33}^c) - (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 - 2\varepsilon_{33}^0), \\ = -\frac{\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 - 2\sigma_{33}^0}{2\mu} \quad \cdots (14) \end{aligned}$$

一方、式(6)より

$$\begin{aligned} 2(\mu - \mu_1)(\varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{22}^c) - 2\mu(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) \\ = \left(\frac{\mu_1}{\mu} - 1\right)(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0), \\ (\alpha - \alpha_1)(\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c) - (\lambda - \lambda_1)(\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c - 2\varepsilon_{33}^c) \\ - \alpha(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) + \lambda(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 - 2\varepsilon_{33}^0) \\ = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} - 1\right)(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) \\ + \frac{\mu_1\lambda - \mu\lambda_1}{\mu\alpha}(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 - 2\sigma_{33}^0) \\ 2(\mu - \mu_1)(\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c - 2\varepsilon_{33}^c) - 2\mu(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 - 2\varepsilon_{33}^0) \\ = \left(\frac{\mu_1}{\mu} - 1\right)(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 - 2\sigma_{33}^0) \quad \cdots (15) \end{aligned}$$

ただし、 $2\mu + 3\lambda = \alpha, 2\mu_1 + 3\lambda_1 = \alpha_1$ とおいた。式(14)を式(15)の第1, 3式に代入すると最適条件の固有ひずみによる表示が得られる。

$$\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0 = 0, \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 - 2\varepsilon_{33}^0 = 0 \quad \cdots (16)$$

よって上式を式(8)に代入すると

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{22}^c) &= (Q - R)(I_1 - I_2)(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0), \\ 2(\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c) &= (Q - R)(I_1 + I_2)(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0), \\ 2(\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c - 2\varepsilon_{33}^c) \\ &= (Q - R)(I_1 + I_2 - 2I_3)(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) \quad \cdots (17) \end{aligned}$$

そこで式(17)の第1式を式(15)の第1式に代入すると

$$\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 = \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{\mu(Q - R)(I_2 - I_1)} \quad \cdots (18)$$

上式を式(17)、式(15)の第2, 3式に代入して得られる I_1, I_2, I_3 に関する式を $I_1 - I_2, I_2 - I_3$ について解くと(ただし、定義により $I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi$)、

$$\begin{aligned} \frac{I_2 - I_1}{4\pi} &= \frac{\alpha(4\mu + \alpha_1)}{2\mu(\alpha - \alpha_1)} \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0}, \\ \frac{I_3 - I_2}{4\pi} &= \frac{\alpha(4\mu + \alpha_1)}{2\mu(\alpha - \alpha_1)} \frac{\sigma_{22}^0 - \sigma_{33}^0}{\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0} \quad \cdots (19) \end{aligned}$$

したがって、上式を連立させて寸法比 $a_2/a_1, a_3/a_1$ などについて解けば、与えられた負荷応力および弾性定数に対する最適寸法比が決定できる。なお、式(7)で与えられた I_1, I_2, I_3 の積分は a_1, a_2, a_3 の大小関係によってその評価法が異なってくる。すなわち、

(1) たとえば $a_1 > a_2 > a_3$ とするとだ円積分となり、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} (F - E), \\ I_3 &= \frac{4\pi a_2^2}{a_2^2 - a_3^2} - \frac{4\pi a_1 a_2 a_3 E}{(a_2^2 - a_3^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}, \\ I_2 &= 4\pi - I_1 - I_3 \end{aligned}$$

ここに E, F は第1種および第2種のだ円積分であり、 $\sin \phi = (1 - a_3^2/a_1^2)^{1/2}$, $\bar{k} = \{(a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 - a_3^2)\}^{1/2}$ として

$$E(\phi, \bar{k}) = \int_0^\phi \sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

$$F(\phi, \bar{k}) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi}}$$

他の $a_2 > a_1 > a_3$ などの場合についても指標を交換して同様に得られる。

(2) たとえば, $a_1 = a_2 > a_3$ の場合

$$I_1 = I_2 = \frac{2\pi a_1^2 a_3 \cos^{-1}(a_3/a_1)}{(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} - \frac{2\pi a_3^2}{a_1^2 - a_3^2},$$

$$I_3 = 4\pi - 2I_1$$

このとき式(19)の第1式より $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty}$ となる。

(3) たとえば, $a_1 > a_2 = a_3$ の場合

$$I_2 = I_3 = \frac{2\pi a_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{2\pi a_1 a_2^2 \cosh^{-1}(a_1/a_2)}{(a_1^2 - a_2^2)^{3/2}},$$

$$I_1 = 4\pi - 2I_2.$$

このとき式(19)の第2式より $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{33}^{\infty}$ となる。

(4) $a_1 = a_2 = a_3$, すなわち球の場合

$$I_1 = I_2 = I_3 = 4\pi/3$$

このとき剛性比に関係なく $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{33}^{\infty}$ となる。

次に式(19)が満足されときの応力場を求める。式(17), (9)より σ_{ij}^c を ε_{ij}^0 で表し, 式(18), (19)の関係を用いると

$$\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c = -\frac{4\mu(\alpha - \alpha_1)}{\alpha(4\mu + \alpha_1)}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty})$$

$$-\frac{\alpha_1(2\mu + \lambda)}{\alpha(4\mu + \alpha_1)}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} - 2\sigma_{33}^{\infty}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

よって式(10), (13), (20)より

$$\sigma_{ee} = \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\zeta\zeta} = (\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c)/2 + (\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty})/2$$

$$= \frac{\alpha_1(2\mu + \lambda)}{\alpha(4\mu + \alpha_1)}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty}),$$

$$\sigma_{e\eta} = \sigma_{\eta\zeta} = \sigma_{\zeta e} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

また, 母材に生ずる応力は式(12), (16)より

$$s_{\eta\eta} = s_{\zeta\zeta} = \frac{2\mu\alpha + \lambda\alpha_1}{\alpha(4\mu + \alpha_1)}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty})$$

$$s_{ee} = \sigma_{ee}, s_{e\eta} = s_{\eta\zeta} = s_{\zeta e} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

すなわち, 境界の接線および法線方向の応力成分は, 介在物内, 母材境界いずれもすべて一様な分布をなし, しかも $\sigma_{ee}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\zeta\zeta}$ および $s_{ee}, s_{\eta\eta}, s_{\zeta\zeta}$ はそれぞれ主応力に一致する。

さて, 特別な場合として介在物が空孔の場合を考察する。形状寸法比の決定方程式は, 式(19)に $\mu_1 = \lambda_1 = 0$ を代入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_2 - I_1}{4\pi} &= \frac{2(\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty})}{\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty}}, \\ \frac{I_3 - I_2}{4\pi} &= \frac{2(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{33}^{\infty})}{\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

このとき零でない応力成分は式(21), (22)より

$$s_{\eta\eta} = s_{\zeta\zeta} = (\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty})/2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

一方, 介在物が剛体の場合, $\mu_1 = \lambda_1 \rightarrow \infty$ を式(19)に代入して形状寸法比の決定方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_2 - I_1}{4\pi} &= -\frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty}}{\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty}}, \\ \frac{I_3 - I_2}{4\pi} &= -\frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{33}^{\infty}}{\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

このとき零でない応力成分は式(21), (22)より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ee} &= \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\zeta\zeta}, \\ &= \frac{1-\nu}{1+\nu}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty}) \\ s_{\eta\eta} &= s_{\zeta\zeta} = \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + \sigma_{33}^{\infty}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

4. 二次元応力場の最適形状

本章では二次元応力場における介在物の最適形状を決定する。だ円体介在物の1軸が無限大($a_3 \rightarrow \infty$)となるとだ円状柱体を形成する。このとき $\sigma_{33}^{\infty} = \nu(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty})$ を仮定すれば平面ひずみ状態となる。また無限平板中にだ円形介在物が存在する場合, $\sigma_{33}^{\infty} = 0$ とすると平面応力状態となる。これら二次元的な応力, ひずみ場に対しても3章までと同様の理論展開が可能である。

まず, 式(6)を二次元問題に対して書き下ろし, 垂直ひずみ $\varepsilon_{11}^c, \varepsilon_{22}^c$ に関する2式の和と差をとると

$$\left(\frac{4G}{\kappa - 1} - \frac{4G_1}{\kappa_1 - 1} \right) (\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c) - \frac{4G}{\kappa - 1} (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0)$$

$$= \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa_1 - 1} \frac{G_1}{G} - 1 \right) (\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}),$$

$$2(G - G_1)(\varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{22}^c) - 2G(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0)$$

$$= \left(\frac{G_1}{G} - 1 \right) (\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty}),$$

$$2(G - G_1)\varepsilon_{12}^c - 2G\varepsilon_{12}^0 = \left(\frac{G_1}{G} - 1 \right) \sigma_{12}^{\infty} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに, G, G_1 は母材および介在物のせん断弾性係数であり, $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ) または $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面応力) とする。また κ_1 についても同様に定義するものとする。

次に, $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0$ が存在する場合 ($\varepsilon_{12}^0 = 0$), Jaswon-Bhargava の定式化⁽⁵⁾によれば

$$(\kappa + 1)(\varepsilon_{11}^c + \varepsilon_{22}^c) = 2(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0)$$

$$- \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} (\kappa - 1)(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0),$$

$$(\kappa + 1)(\varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{22}^c) = -\frac{2(a_1 - a_2)}{a_1 + a_2} (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0)$$

$$+ \left\{ \kappa - \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 \right\} (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0),$$

$$\varepsilon_{12}^c = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

このとき介在物に生ずる応力 σ_{ij}^c は次式で与えられる。

$$\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c$$

$$= -\frac{4G}{\kappa+1} \left\{ (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) \right\},$$

$$\sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c = -\frac{4G}{\kappa+1} \left\{ \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) \right.$$

$$\left. + \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1 + a_2)^2} (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) \right\},$$

$$\sigma_{12}^c = 0, \dots\dots\dots (29)$$

また境界の接線，法線方向の応力 $\sigma_{\theta\theta}^c, \sigma_{\theta\eta}^c, \sigma_{\eta\eta}^c$ は式(10)に $\varphi = \pi/2$ を代入して得られる。さらに境界上の母材応力は式(12)に $\varphi = \pi/2$ を代入し， $\mu/(1-\nu) \rightarrow 4G/(\kappa+1)$ と置き換え， $\varepsilon_{33}^0 = 0$ とすることによって次式となる。

$$2s_{\theta\theta}^c = 2\sigma_{\theta\theta}^c = (\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c) + (\sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c) \cos 2\theta,$$

$$2s_{\theta\eta}^c = 2\sigma_{\theta\eta}^c = -(\sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c) \sin 2\theta,$$

$$s_{\eta\eta}^c = \sigma_{\eta\eta}^c + \frac{4G}{\kappa+1} \{ (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) - (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) \cos 2\theta \}$$

$$\dots\dots\dots (30)$$

そこでだ円形介在物の最適形状を，境界に沿った応

力成分 $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\eta}, \sigma_{\eta\eta}$ が角度 θ によらず一様となる形状と定義すると，最適条件は式(13)の第1式と一致する。よって同式に式(29)の第2式を代入すると

$$2k(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) + (1+k^2)(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0)$$

$$= \frac{\kappa+1}{2G} (\sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c), \dots\dots\dots (31)$$

ただし， $(a_1 - a_2)/(a_1 + a_2) = k$ とおいた。式(27)の第2式に式(28)の第2式を代入し，式(31)を用いると式(16)の第1式が導ける。このとき式(27)，(28)，(31)より

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} = \frac{(\kappa_1 - 1)G + 2G_1}{(\kappa_1 - 1)G - (\kappa - 1)G_1} \frac{\sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c}{\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c},$$

$$\dots\dots\dots (32)$$

また上式が満足されるとき境界の接線および法線方向応力は式(10)，(30)より

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\eta\eta} = s_{\theta\theta} = s_{\eta\eta} = \frac{(\kappa+1)G_1}{(\kappa_1 - 1)G + 2G_1} \frac{\sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c}{2},$$

図2 だ円体介在物の最適形状寸法比 ($\nu = \nu_1 = 1/3$)

図3 だ円形介在物の最適形状寸法比 (平面応力, $\nu = \nu_1 = 1/3$)

$$s_{\eta\eta} = \frac{2(\kappa_1 - 1)G - (\kappa - 3)G_1}{(\kappa_1 - 1)G + 2G_1} \frac{\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}}{2},$$

$$s_{\eta\eta} = s_{\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

すなわち、母材応力も一様となり、しかも $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $s_{\xi\xi}$, $s_{\eta\eta}$ はそれぞれ主応力に一致する。

さて介在物が空孔の場合、式(32), (33)に $G_1 = 0$ を代入すると形状寸法および零でない応力成分は

$$a_2/a_1 = \sigma_{22}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$s_{\eta\eta} = \sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} \quad \dots\dots\dots (35)$$

同様に介在物が剛体の場合、 $G_1 \rightarrow \infty$ とすると

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} = -\frac{2}{\kappa - 1} \frac{\sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty}}{\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

また零でない応力成分は

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\eta\eta} = s_{\xi\xi} = s_{\eta\eta} = (\kappa + 1)(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty})/4,$$

$$s_{\eta\eta} = (3 - \kappa)(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty})/4 \quad \dots\dots\dots (37)$$

5. 数 値 計 算

だ円体介在物の最適な形状寸法比は式(19)を解いて得られる。ポアソン比 $\nu = \nu_1 = 1/3$ とし、剛性比 $G_1/G = 0$ (空孔), 0.5, 2.0, ∞ (剛体) の代表的な場合についての最適寸法比の決定線図を図2に示す。同図は、縦軸、横軸に負荷応力比をとり、 $0.01 \leq a_2/a_1, a_3/a_1$

≤ 100 の範囲における最適寸法比一定の曲線を描いたものである。したがって、各剛性比に対する線図において、与えられた負荷応力比に対応する寸法比を読取れば最適形状が決定できる。また同図より、負荷応力比が1から遠ざかるほど最適寸法比も1から遠ざかり、扁平なだ円体形状となることが明らかである。その寸法比は、 $G_1/G < 1$ の場合には負荷応力比の増大に伴って増大するのに対し、 $G_1/G > 1$ の場合には逆に減少する。さらに同線図より明らかなように最適形状が存在するのは負荷応力比が同符号のときであり、かつそれら応力比の範囲は式(19)が解をもつ範囲に限定される。

次に二次元平面応力状態($\nu = \nu_1 = 1/3$)の場合の最適寸法比決定線図を図3に示す。同図は負荷応力比 $\sigma_{22}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$ に対する最適寸法比 a_2/a_1 を、剛性比をパラメータとして示したものである。最適寸法比は三次元の場合と同様の傾向を示している。

なお、最適形状の応力は式(21), (22)あるいは式(33)より容易に決定できる。その一般的傾向として、母材と介在物のうち剛性の高いほうに高応力を生じ、剛性比が1から遠ざかるほどその応力差は増大する。

6. 結 言

本報では、一様な3軸応力場下の無限体中の弾性介在物の応力分布を一様とする最適形状がだ円体によって与えられることを解析的に明らかにし、その応力場も求めた。また代表的な剛性比に対して数値例を示し、最適形状の一般的傾向を考察した。さらに二次元応力場での介在物の最適形状も示した。

文 献

- (1) Kristensen, E. S. and Madsen, N. F., *Int. J. Num. Methods Eng.*, 10-5 (1976), 1007.
- (2) Bjorkman, G. S. and Richards, R., *Trans. ASME, Ser. E*, 43-3 (1976), 414.
- (3) Eshelby, J. D., *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 241 (1957), 376.
- (4) 村・森, マイクロメカニクス, (昭51), 23, 培風館.
- (5) Jaswon, M. A. and Bhargava, R. D., *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 57 (1961), 669.