だ円孔, フィレット, き裂等を有する平板の
応力集中問題の有限要素解析について*

守 屋 一 政**

Finite Element Analysis of Stress Concentration Around Elliptic Holes,
Fillets and Cracks in Plates under Stretching and Out-of-Plane Bending

by Kazumasa MORIYA

A special element that simulates elastic behavior near an elliptic hole has been developed for the finite element analysis of local stress concentrations arising from elliptic holes, notches, fillets and cracks. The formulation is based on Laurent series expansion technique and hybrid finite element model. The present element serves as a bending element as well as an in-plane one without modifying computer program. It is an efficient mesh reducer and it gives accurate stress distribution in the near field region. When one axis of elliptic hole is set to be zero, the element becomes a crack element with embedded stress singularity and the stress intensity factors K_I , K_{II} or K_{IB} , K_S are directly obtained as the sum of the internal parameters. Numerical example includes in-plane stretching and out-of-plane bending of plates with variety of holes, notches and cracks.

Key Words: Structural Analysis, Stress Concentration, Elliptic Hole, Fracture, Plate Stretching, Plate Bending, Laurent Series Expansion, FEM, Hybrid Element

1. 結 言

応力集中問題を有限要素法によって解析するには応力傾斜の激しい近領域に非常に細かい要素分割が必要のため, 多くの問題を生ずる. 近領域と遠領域の要素寸法の違いによる丸めの誤差, 極座標系の要素分割がなされる近領域と直角座標系の要素分割の遠領域との中間領域における要素の形状のゆがみによる誤差, 高次要素を用いても円孔縁に対してさえミスマッチを生ずるモデル化による誤差等が解析を困難ならしめる.

これらを克服するため, 近領域と構造全体を別に解析するステップ法⁽²⁾, 解析解の存在する類似の問題を解いて最小要素の寸法を定める方法⁽³⁾, 外そうによって応力を求める方法等が工夫されている. しかし, 実際の構造物のように多数の集中部を有する場合には大きな困難を伴う. 多円孔問題の解析法に文献(5)があるが, 極座標を用いる事以外は通常要素と全く変わらず, さしたる利点もなさそうである. 以上の観点から, 本論文では, ローラン展開法及びハイブリッド法⁽⁷⁾を

用い, だ円孔近傍の弾性挙動をシミュレートする特殊要素を開発し, この要素を用いて近領域全体を1個の有限要素とし, 粗い要素分割で高精度の解を得る方法を提案する. 要素の形状はだ円孔ないしその弧の一部を含む任意多角形(図1)で, 前者を二重連結要素, 後者を単連結要素と呼ぶ. 本要素は一つのプログラムで平面要素と板曲げ要素を兼ねる. 剛性マトリックスが, 曲率を有する孔縁を除く要素外周上の線積分のみから計算される. だ円孔の一方の径を0とすれば, そのままき裂解析用の特異要素となり, 剛性マトリックスの計算にき裂先端の特異性に対する配慮を要さない. 要素内部の応力, モーメントあるいは応力拡大係数が内部パラメータから直接求まる. 変位法要素と併用できる. 要素寸法が遠領域に用いる通常要素と同じオーダーである. 全領域が直角座標系の要素分割のみで

図1 二重連結要素(左)と単連結要素(右)

* 昭和58年11月28日 第923回講演会において講演, 原稿受付 昭和58年5月20日.

** 正員, 防衛大学校 (〒239 横須賀市走水 1-10-20).

モデル化できる等の特長を有する。

2. 応力・変位の基礎式

だ円孔周辺の応力場, 変位場は, 平面問題, 板曲げ共に複素ポテンシャル $\varphi(\zeta)$, $\chi(\zeta)$ を用いて

$$t_{11} + t_{22} = 4c_1 \operatorname{Re}\{\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)\} \quad (1 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} t_{22} - t_{11} + 2it_{12} &= 2c_2[\bar{\omega}(\bar{\zeta})\{\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)\}' \\ &+ \{\chi'(\zeta)/\omega'(\zeta)\}'/\omega'(\zeta) \quad (1 \cdot b) \end{aligned}$$

$$s_1 - is_2 = -4c_3\{\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)\}'/\omega'(\zeta) \quad (1 \cdot c)$$

$$d_0 = \operatorname{Re}\{\bar{\omega}(\bar{\zeta})\varphi(\zeta) + \chi(\zeta)\} \quad (1 \cdot d)$$

$$2c_4(d_1 + id_2) = c_5\varphi(\zeta) - \omega(\zeta)\bar{\varphi}(\bar{\zeta})/\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\chi}(\bar{\zeta})/\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \quad (1 \cdot e)$$

と書ける。ここに $\omega(\zeta)$ は物理面 $z = x + iy$ 上のだ円孔を ζ 面上の単位円に写像する写像関数で $z = \omega(\zeta) = c(\zeta + m/\zeta)$, c, m はだ円の形状を表す定数で $c = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$, a, b はだ円の長短径, $(\bar{})$ は共役複素数, $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ は実部及び虚部を表す。平面問題では t_{11}, t_{22}, t_{12} は応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を, d_1, d_2 は変位 u, v を表し, s_1, s_2, d_0 は無視する。平面応力では $c_1 = c_2 = 1$, $c_4 = E/2(1+\nu)$, $c_5 = (3-\nu)/(1+\nu)$ とする。 E は板のヤング係数, ν はポアソン比を表す。平面ひずみの場合, 平面応力の c_5 を $(3-4\nu)$ で置き換える。板曲げでは t_{11}, t_{22}, t_{12} はモーメント M_x, M_y, M_{xy} を, s_1, s_2 はせん断力 Q_x, Q_y を, d_0 は中央面の面外変位 w を, d_1, d_2 はそれぞれ $-\partial w/\partial x, -\partial w/\partial y$ を表し, $c_1 = -D(1+\nu)$, $c_2 = D(1-\nu)$, $c_3 = D$, $c_4 = 1/2$, $c_5 = -1$, D は板の曲げ剛性である。

複素ポテンシャルを ζ のローラン級数展開で

$$\varphi(\zeta) = \sum_{j=1}^N (\alpha_j \zeta^{-j} + \delta_j \zeta^j) \quad (2 \cdot a)$$

$$\chi'(\zeta) = \sum_{j=1}^{N+2} \gamma_j \zeta^{-j} + \sum_{j=1}^N \eta_j \zeta^j \quad (2 \cdot b)$$

とおく。 δ_1 は実数, 他の係数はすべて複素数とする。式(2)を式(1)に代入して応力の表示

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} t_{11} \\ t_{22} \end{matrix} \right\} &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^N \{(a_j \mp b_j)\alpha_j + (d_j \mp e_j)\delta_j \right. \\ &\quad \left. \mp g_j \eta_j\} \mp \sum_{j=1}^{N+2} f_j \gamma_j \right] \quad (3 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{12} &= \operatorname{Im} \left[\sum_{j=1}^N (b_j \alpha_j + e_j \delta_j + g_j \eta_j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N+2} f_j \gamma_j \right] \quad (3 \cdot b) \end{aligned}$$

$$s_1 - is_2 = \sum_{j=1}^N (h_j \alpha_j + p_j \delta_j) \quad (3 \cdot c)$$

を得る。ここに

$$a_j = -2jc_1 \zeta^{-(j+1)}/\omega' \quad (4 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} b_j &= j(j+1)c_2 \zeta^{-(j+2)} \bar{\omega}/(\omega')^2 \\ &+ jc_2 \zeta^{-(j+1)} \bar{\omega} \omega''/(\omega')^3 \quad (4 \cdot b) \end{aligned}$$

$$d_j = 2jc_1 \zeta^{j-1}/\omega' \quad (4 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} e_j &= j(j-1)c_2 \zeta^{j-2} \bar{\omega}/(\omega')^2 \\ &- jc_2 \zeta^{j-1} \bar{\omega} \omega''/(\omega')^3 \quad (4 \cdot d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_j &= -jc_2 \zeta^{-(j+1)}/(\omega')^2 \\ &- c_2 \zeta^{-j} \omega''/(\omega')^3 \quad (4 \cdot e) \end{aligned}$$

$$g_j = jc_2 \zeta^{j-1}/(\omega')^2 - c_2 \zeta^j \omega''/(\omega')^3 \quad (4 \cdot f)$$

$$\begin{aligned} h_j &= -4c_3 \{j(j+1)\zeta^{-(j+2)} \omega' \\ &+ j\zeta^{-(j+1)} \omega''\}/(\omega')^3 \quad (4 \cdot g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_j &= -4c_3 \{j(j-1)\zeta^{j-2} \omega' \\ &- j\zeta^{j-1} \omega''\}/(\omega')^3 \quad (4 \cdot h) \end{aligned}$$

式(4·e)を除き $j=1, 2, \dots, N$, 式(4·e)では $j=1, 2, \dots, (N+2)$ とする。又, 変位成分は

$$\begin{aligned} d_0 &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^N (\bar{\omega} \zeta^{-j} \alpha_j + \bar{\omega} \zeta^j \delta_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{j+1} \zeta^{j+1} \eta_j) + (\ln \zeta) \gamma_1 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=2}^{N+2} \frac{1}{j-1} \zeta^{-j+1} \gamma_j \right\} \quad (5 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 + id_2 &= \frac{1}{2c_4} \left\{ \sum_{j=1}^N \left\{ c_5 (\zeta^{-j} \alpha_j + \zeta^j \delta_j) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega}{\bar{\omega}} (j \zeta^{-(j+1)} \bar{\alpha}_j - j \zeta^{j-1} \bar{\delta}_j) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega'} \left(\sum_{j=1}^{N+2} \zeta^{-j} \bar{\gamma}_j + \sum_{j=1}^N \zeta^j \bar{\eta}_j \right) \right\} \quad (5 \cdot b) \end{aligned}$$

となる。ここに $\bar{\omega}' = \bar{\omega}'(\bar{\zeta})$ とする。

孔縁が自由縁となるための条件は, 平面問題では $\sigma_\nu = \tau_{\nu s} = 0$, 板曲げでは $M_\nu = Q_\nu + \partial M_{\nu s}/\partial s = 0$ で与えられる。 ν は孔縁での外向き法線, s は縁に沿う座標を表す。この条件は $\varphi(\zeta)$, $\chi(\zeta)$ を用い

$$\begin{aligned} c_6 \varphi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\bar{\varphi}'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}(\bar{\zeta})} + \bar{\chi}'(\bar{\zeta}) \\ = ic_7 \omega(\zeta) + c_8 \quad (6) \end{aligned}$$

と書ける。平面問題では $c_6 = 1$, 板曲げでは $c_6 = -(3+\nu)/(1-\nu)$, c_7, c_8 はそれぞれ任意の実数及び複素数を表す。式(2)の両式を式(6)に代入し γ_j, η_j を α_j, δ_j によって表せば

$$\gamma_1/c = mc_6 \bar{\alpha}_1 + m\alpha_1 - c_6 \bar{\delta}_1 - \delta_1 \quad (7 \cdot a)$$

$$\gamma_2/c = 2m\alpha_2 + m^2 c_6 \bar{\alpha}_2 - 2m\delta_2 - c_6 \bar{\delta}_2 \quad (7 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_j/c &= j m \alpha_j + (j-2) \alpha_{j-2} + m c_6 \bar{\delta}_{j-2} - c_6 \bar{\delta}_j \\ &\quad (3 \leq j \leq N+2) \quad (7 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_j/c &= m c_6 \bar{\alpha}_{j+2} - c_6 \bar{\alpha}_j - (j+2) \delta_{j+2} - j m \delta_j \\ &\quad (1 \leq j \leq N) \quad (7 \cdot d) \end{aligned}$$

となる。ただし $\alpha_{N+1} = \alpha_{N+2} = \delta_{N+1} = \delta_{N+2} = 0$ とする。式(7)を式(3), (5)に代入し

$$\alpha_j = \beta_j + i\beta_{2N+j} \quad (1 \leq j \leq N)$$

$$\delta_1 = \beta_{N+1}, \quad \delta_j = \beta_{N+j} + i\beta_{3N+j-1}$$

$$(2 \leq j \leq N) \quad \dots\dots\dots (8)$$

とおけば t_{ij} , s_i , d_i がすべて実数パラメータ β_j によって表される。

3. だ円要素の定式化

3.1 剛性マトリックス だ円要素のはん関数 Π_e は

$$\begin{aligned} \Pi_e = & \int_{\partial A_e} (t_{ij}\nu_j \bar{d}_i + s_i \nu_i \bar{d}_0) ds \\ & - \frac{1}{2} \int_{\partial A_e} (t_{ij}\nu_j d_i + s_i \nu_i d_0) ds \\ & - \int_{\partial A_{e0}} (\bar{t}_{ij}\nu_j \bar{d}_i + \bar{s}_i \nu_i \bar{d}_0) ds \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

と書ける⁽⁸⁾⁽⁹⁾。ここに $i, j=1, 2$ で $1, 2$ は各々 x, y に対応し総和規約に従う。 ∂A は要素の境界、 ∂A_e は力学的境界条件の与えられた境界、 $(\cdot)_e$ はだ円要素、 $(\bar{\cdot})$ は既知量、 $(\cdot)$ は要素境界上で仮定される量、 ν_j は要素境界での外向き法線の方向余弦、 t_{ij} , s_i , d_i は式 (3), (5), (7) で与えられる応力及び変位を示す。遠領域の通常要素に対するはん関数 Π_f は変位法から導く。全体のはん関数 Π は $\Pi = \Pi_e + \Pi_f$ となる。式 (9) はマトリックスを用いて

$$\Pi_e = \int_{\partial A_e} T^T \bar{u} ds - \frac{1}{2} \int_{\partial A_e} T^T u ds - \int_{\partial A_{e0}} \bar{T}^T \bar{u} ds \quad \dots\dots\dots (10)$$

と書ける。平面問題については $T = \{t_{1j}\nu_j, t_{2j}\nu_j\}$, $u = \{d_1, d_2\}$, $\bar{u} = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ 。板曲げでは、 $T = \{s_j\nu_j, t_{1j}\nu_j, t_{2j}\nu_j\}$, $u = \{d_0, d_1, d_2\}$, $\bar{u} = \{\bar{d}_0, \bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ とする。 T , u は式 (3), (5), (7), (8) を用いて

$$T = R\beta, \quad u = U\beta \quad \dots\dots\dots (11)$$

と書ける。ここに $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{4N-1}\}$ 。境界変位 $\bar{u}$ は次式で与える。

$$\bar{u} = Lq \quad \dots\dots\dots (12)$$

q は節点変位ベクトルで、節点 i では平面問題の場合 $q_i = \{u, v\}_i$ 、板曲げの場合 $q_i = \{w, w_x, w_y\}_i$ を表す。 L は孔縁を除く要素境界上で定義される内そう関数行列で、平面問題では各辺上の $\bar{u}$, $\bar{v}$ を s の一次式で、板曲げについては $\bar{w}$ を三次式で、 $\bar{w}_\nu$ を一次式で近似する。式 (11), (12) を式 (10) に代入し、右辺の第 3 項を省略すれば

$$\Pi_e = \beta^T Gq - \frac{1}{2} \beta^T H\beta \quad \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。ここに

$$G = \int_{\partial A_e} R^T L ds \quad \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$H = \frac{1}{2} \int_{\partial A_e} (R^T U + U^T R) ds \quad \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

である。式 (13) の β に関する停留条件から

$$\beta = H^{-1} Gq \quad \dots\dots\dots (15)$$

を得る。式 (15) を式 (13) に代入すれば Π_e は

$$\Pi_e = (1/2) q^T Kq \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここに K はだ円要素の剛性マトリックスで

$$K = G^T H^{-1} G \quad \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。

3.2 孔縁での積分と内部応力の計算

剛性マトリックスを求めるには要素外周を一周する式 (14) の二つの線積分の計算が必要である。平面要素では、孔縁はその上で被積分関数が 0 となるため積分路から除かれる。板曲げでは、自由縁条件 $M_\nu = M_{\nu s} = Q_\nu = 0$ のかわりに $M_\nu = Q_\nu + \partial M_{\nu s} / \partial s = 0$ を用いているため孔縁での被積分関数は必ずしも 0 でない。式 (10) の第 1 項は、図 1 の単連結要素の孔縁に沿って

$$\begin{aligned} \int_n T^T \bar{u} ds &= \int_n (-Q_\nu \bar{w} + M_{\nu s} \bar{w}_{,s}) ds \\ &= - \int_n \left(Q_\nu + \frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s} \right) \bar{w} ds + M_{\nu s} \bar{w}|_n \\ &= M_{\nu s} \bar{w}|_n \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。式 (10) の第 2 項も同様に

$$\int_n T^T u ds = M_{\nu s} w|_n \quad \dots\dots\dots (19)$$

と書ける。従って板曲げの場合も、孔縁での積分は式 (18), (19) をそれぞれ G, H に加えるだけでよい。複連結要素については、式 (18), (19) は周回積分で 0 となる。いずれの場合も、曲率を有する孔縁は実質的に積分路から除かれ、境界変位 $\bar{u}$ の仮定を要しない。

だ円要素内の任意の点の応力 σ は式 (3), (4), (7), (8) からパラメータ β_j を用いて

$$\sigma = \{t_{11}, t_{22}, t_{12}, s_1, s_2\} = P\beta \quad \dots\dots\dots (20)$$

と書ける。式 (15), (20) の両式から次式を得る。

$$\sigma = PH^{-1} Gq \quad \dots\dots\dots (21)$$

節点変位 q が与えられれば、要素内の任意の点の応力が、式 (21) を用いて直接求まる。

3.3 き裂への応用 だ円要素はだ円の方の径を 0 とすれば、そのままき裂解析のための特異要素(図 7)となる。この場合も 3.2 節の議論がそのまま成り立ち、き裂縁が積分路から除かれるため剛性マトリックスの計算にき裂先端での応力の特異性に対する配慮を要しない。応力拡大係数 K_I , K_{II} は応力値同様パラメータ β_j から直接計算できる。平面問題では

$$\begin{aligned} K_I - iK_{II} &= 2\sqrt{2\pi} \lim_{z_1 \rightarrow a} \sqrt{z_1 - a} \varphi'(z_1) \\ &= 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \varphi'(\xi)|_{\xi=1} \end{aligned}$$

$$= -2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{j=1}^N j(\alpha_j - \delta_j) \quad \dots\dots\dots(22)$$

の関係がある。ただし $z_1 = x_1 + iy_1$ 。式(22)を式(8)、(15)を用いてマトリックスで表せば

$$\{K_I, K_{II}\} = c_9 S H^{-1} G q \quad \dots\dots\dots(23)$$

となる。ここに $c_9 = -2\sqrt{\pi/a}$ 、

$$S = \begin{bmatrix} J, -J, & 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, & -J, M \end{bmatrix}$$

$$J = [1, 2, 3, 4, \dots, N-1, N]$$

$$M = [1, 2, 4, 5, \dots, N-1, N]$$

である。板曲げの場合は式(23)の c_9 を $c_9 = 12\sqrt{\pi/a}(3 + \nu)D/h^2$ とする。 h は板厚を表す。

4. 数 値 例

4.1 だ円孔を有する長方形板の引張りと面外曲げ

図2に示す半径 $2a$, $2b$ のだ円孔を有する幅 $2W$ 長さ $2L$ の長方形板の縁に、引張力 σ_x^* , σ_y^* , 面に垂直な曲げモーメント M_x^* , M_y^* が一様に作用する。 $a/b=2$, $L=W=10a$ とし、全体の1/4を図2のように分割する。総要素数 395, 総節点数 437 で、影を付けた部分は8節点だ円要素を示す。分割パターンの単純化のため、節点数が必要以上に多くなっている。遠領域には、平面問題、板曲げについてそれぞれ4節点変位法平面要素, 4節点ハイブリッド曲げ要素を用いる。だ円要素のパラメータ β の数を平面問題では $N=2$ から8まで、板曲げでは3から9まで変位させ、ローラン展開の打ち切り次数が解に与える影響を調べる。図3は σ_x^* 及び M_x^* がそれぞれ単独で作用する場合の最大周応力, 最大周モーメントの計算結果を無限板に対する解析解⁽¹⁾で無次元化したものである。図4は、平面問題の場合の縁応力及び y 軸上の直応力の分布で、T1, T2 はそれぞれ σ_x^* , σ_y^* が単独で作用する場合の計算結果 ($N=5$)、実線は無限板に対する厳密解⁽¹⁾を示す。 $|y| > 2b$ での σ_x の計算結果は、だ円要素外の応力値を式(21)を用いて求めたものである。

図2 中央にだ円孔を有する長方形板と有限要素分割例

図5は板曲げにおけるモーメント分布の計算結果 ($N=5$) で、B1, B2 はそれぞれ M_x^* , M_y^* が単独で作用する場合、B12 は M_x^* , M_y^* が同時に働く場合の計算結果、実線は無限板に対する厳密解⁽¹⁾を表す。計算結果の精度は平面問題、板曲げ共に良好で、ボールペン式のXYプロットで描く場合、厳密解との区別がつかないほどである。

4.2 円孔を有する長方形板の引張りと面外曲げ

ボルト穴、窓わく等円孔ないし円弧を一部に含む穴が応力集中の要因となる例は非常に多い。円孔に対する適用性を明らかにするため、図2で $a/b=1$, $W=L=10a$, σ_x^* , M_x^* が働く場合を97要素, 119節点, 7節点だ円要素を用いて解析する。引張りの場合の応力分布 ($N=3$) と板曲げの場合のモーメント分布 ($N=4$) を図6に示す。要素外の値まで厳密解(実線)と良好に一致している。

4.3 き裂を有する長方形板の引張りと面外曲げ

中央に全長 $2c$ のき裂を有する図7の長方形板が両端に引張り力 σ_y^* , 曲げモーメント M_y^* を受ける場合を $a=c$, $b=0$ の9節点だ円要素を用いて解析する。図8は $W=L=10c$ に対する応力拡大係数の計算結

図3 だ円孔縁に生ずる最大縁応力及びモーメント

図4 平面問題の場合の応力分布

果を無限板に対する解析解 K_I' で無次元化したもので、すべての N について、平面問題では誤差 2% 以下、板曲げでは 0.5% 以下の精度が得られている。解析モデルの総要素数は 197、節点数は 231 である。 $c=2$ のき裂に $a=1$ のだ円要素を用いる場合の要素分割の一例を図 7 に示す。

4.4 U 字形切欠きを有する長方形板の引張り

図 9 に示す切欠き底半径が a の U 字形切欠きを有する長方形板の形状係数 α を求める。切欠き深さを d 、最小断面の板幅を $2b=8a$ 、長方形板の長さを $2L=20a$ 及び $40a$ とする。 $d=4a$ 、 $L=10a$ に対する 74 要素、94 節点の要素分割を図 9 に示す。図 10 は形状係数（最大応力を最小断面の平均応力で除した値）の計算結果で、U1 は図 9 の 7 節点だ円要素を用いたモデル、U2 は 13 節点のだ円要素を用い、 xy 方向の分割を 2 倍に細分化したモデルによる値である。 Δ 印は

実験式⁽¹⁾、 $\times$ 印は両側に半円切欠きを有する帯板の解析解⁽⁶⁾を表す。ちなみに文献(3)には $L=10a$ 、 $d=a$ の半円切欠きを有する長方形板について、最小要素の寸法を石田の解析解⁽⁶⁾に一致するように $0.01a$ とした要素数 579、節点数 332 の変位法モデルが示されている。

4.5 すみに丸みを有する長方形孔を持つ長方形板の引張り

すみを丸めた長方形孔の応力集中は、ハッチ、窓わく等に関連して工学的に重要な問題であるが、直線と円弧の二つの線素から成るため解析的な取扱いが難しい。図 11 で $b/w=0.4$ 、 $a/b=0.25$ 、 $L/W=3$ として、全体の $1/4$ を 7 節点だ円要素を含む総節点数 91、要素数 82 の要素分割を用いて解析する。図 11 の $\circ$ 印が縁応力の計算結果、実線はハイポトロコイド孔による近似を用いた解析解⁽⁴⁾である。 $\square$ 印は板厚 6 mm、板幅 200 mm、有効部長さ 600 mm のジュラル

図 5 板曲げの場合のモーメント分布

図 6 円孔周辺の応力及びモーメント分布

図 7 き裂を有する長方形板と有限要素モデルの一例

図 8 応力拡大係数 K_I の計算結果

図 9 U 字形切欠きを有する長方形板と要素分割例

図 10 U 字形切欠きを有する長方形板の形状係数

ミン製試験片による実験結果で、孔縁の応力分布は 5 素子ひずみゲージを用いて測定した。だ円要素による計算結果は実験値に極めて近く、ハイポトロコイド孔による解析よりも約 30% 大きい集中率を示す。

5. 結 語

だ円孔, フィレット等の応力集中問題の有限要素解析のため, だ円孔周辺の弾性挙動をシミュレートする特殊要素をローラン展開法及びハイブリッド法を用いて開発し, 要素の特性, 利便性を明らかにした。本要素は一つのプログラムで平面要素と曲げ要素を兼ね, 形状, 節点数が任意である。要素外周の線積分のみから剛性マトリックスが求まる境界形要素で, 曲率を有する孔縁が積分路から除かれるため, 計算時間が極めて短い。要素内部の応力値は, 要素パラメータから直接計算され, 精度は非常に高い。だ円孔の一方の径を 0 とすれば, そのままき裂解析のための特異要素となり, き裂先端の応力の特異性を配慮することなく K 値が直接求まる。変位法に基づく通常要素と併用できる。

図 11 すみに丸みを有する長方形孔を持つ長方形板

要素寸法が遠領域に用いる通常要素と同じオーダで, 全領域を直角座標系の要素分割のみでモデル化できる等の特長を有する。だ円要素を汎用プログラムの要素メニューの一つに組み込めば, 有限要素法をブラックボックスとするユーザも, 粗い要素分割で, 簡単かつ高精度に応力集中及びき裂の問題を解析できる。多孔問題に対する有用性はさらに大きいと考えられる。

文 献

- (1) 西田, 応力集中, (昭 42), 352, 552, 森北出版.
- (2) 宮本, 破壊の力学, (昭 47), 35, コロナ社.
- (3) 三好・ほか 3 名, 有限要素法, (昭 51), 109, 実教出版.
- (4) 石田, 機論, 25-159 (昭 34), 1110.
- (5) Orringer, O. and Stalk, G., *Eng. Fract. Mech.*, 8(1976), 719.
- (6) 石田, 機論, 19-83 (昭 28), 5.
- (7) Pian, T.H.H., *Numerical and Computer Meth. in Struct. Mech.*, (1973), 59.
- (8) Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, (1975), 345, Pergamon Press.
- (9) 守屋, 機論, 47-424, A (昭 56), 1309.

討 論

〔質問〕 植 村 益 次 [東京大学工学部]

き裂を含む超要素を考え, 三次元き裂などの応力拡大係数を簡単かつ精度よく求められたことは興味深くおもう。以下蛇足の質問をする。

(1) だ円孔やき裂を含まない通常の二次元ないし板曲げ要素についてもこのような定式化 (ローラン展開とハイブリッド法による定式化) が可能と思われるが, いかがか。

(2) 直交異方性についても, 特殊要素を導入すること

が可能と思われるが, いかがか。

〔回答〕 (1) だ円孔を含まない通常要素についても, 同様な定式化が可能である。この場合, 複素ポテンシャル ϕ および χ を $z = x + iy$ のべき級数で表し,

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^N (\beta_j + i\beta_{N-j}) z^j \dots\dots\dots (i \cdot a)$$

$$\chi(z) = \sum_{j=1}^N (\beta_{2N+j} + i\beta_{3N+j}) z^{j+1} \dots\dots\dots (i \cdot b)$$

とおく。 β_{N+1} は応力に寄与しないため除く。剛性マト

リクスは式(17), 内部応力は式(21)から計算される.

(2) 直交異方性平板についても, だ円要素を導くことが可能である. スペースの都合上, 面内問題に限り概略を示す. Hooke 則を

$$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\} = (C_{ij})\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\} \quad \cdots \cdots \cdots (ii)$$

と書き, 特性方程式

$$C_{11}s^4 - 2C_{13}s^3 + (2C_{12} + C_{33})s^2 - 2C_{23}s + C_{22} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (iii)$$

の4根を s_j , $\bar{s}_j \{I_m(s_j) > 0, j=1, 2\}$ とおく. 応力および変位は, 複素ポテンシャル $\varphi(\zeta_1)$, $\chi(\zeta_2)$ を用いて

$$\sigma_x = 2\text{Re}\{s_1^2 \varphi'(\zeta_1)/\omega_1'(\zeta_1) + s_2^2 \chi'(\zeta_2)/\omega_2'(\zeta_2)\} \quad \cdots \cdots \cdots (iv \cdot a)$$

$$\sigma_y = 2\text{Re}\{\varphi'(\zeta_1)/\omega_1'(\zeta_1) + \chi'(\zeta_2)/\omega_2'(\zeta_2)\} \quad \cdots \cdots \cdots (iv \cdot b)$$

$$\tau_{xy} = -2\text{Re}\{s_1 \varphi_1(\zeta_1)/\omega_1'(\zeta_1) + s_2 \chi'(\zeta_2)/\omega_2'(\zeta_2)\} \quad \cdots \cdots \cdots (iv \cdot c)$$

$$u = 2\text{Re}\{p_1 \varphi(\zeta_1) + p_2 \chi(\zeta_2)\} \quad \cdots \cdots \cdots (v \cdot a)$$

$$v = 2\text{Re}\{q_1 \varphi(\zeta_1) + q_2 \chi(\zeta_2)\} \quad \cdots \cdots \cdots (v \cdot b)$$

と書ける. ここに

$$x + s_j y = \omega_j(\zeta_j) = c_j(\zeta_j + m_j/\zeta_j) \quad \cdots \cdots \cdots (vi \cdot a)$$

$$c_j = (a - is_j b)/2 \quad \cdots \cdots \cdots (vi \cdot b)$$

$$m_j = (a + is_j b)/(a - is_j b) \quad \cdots \cdots \cdots (vi \cdot c)$$

$$p_j = C_{11}s_j^2 + C_{12} - C_{13}s_j \quad \cdots \cdots \cdots (vi \cdot d)$$

$$q_j = (C_{12}s_j^2 + C_{22} - C_{23}s_j)/s_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots \cdots (vi \cdot e)$$

である. また, $x + jy = \omega(\zeta) = c(\zeta + m/\zeta)$, $c = (a + b)/2$, $m = (a - b)/(a + b)$ とすれば, だ円縁上の点は $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta = e^{ie}$ によって与えられる. 複素ポテンシャルを

$$\varphi(\zeta_1) = \sum_{j=1}^N (\alpha_j \zeta_1^{-j} + \delta_j \zeta_1^j) + \delta_0 \ln \zeta_1 \quad \cdots \cdots \cdots (vii \cdot a)$$

$$\chi(\zeta_2) = \sum_{j=1}^N (\gamma_j \zeta_2^{-j} + \eta_j \zeta_2^j) + \eta_0 \ln \zeta_2 \quad \cdots \cdots \cdots (vii \cdot b)$$

とおき, 自由縁の条件

$$(1 + is_1)\varphi(\zeta_1) + (1 + i\bar{s}_1)\bar{\varphi}(\zeta_1) + (1 + is_2)\chi(\zeta_2) + (1 + i\bar{s}_2)\bar{\chi}(\zeta_2) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (viii)$$

に代入すれば, γ_j, η_j が α_j, δ_j によって表される. 剛性マトリックスおよび内部応力は等方性平板の場合と同様に計算できる. き裂解析のため, 特異要素 ($b=0$) とする場合の応力拡大係数 K_I, K_{II} は

$$K_I + \frac{K_{II}}{s_2} = -2\sqrt{\frac{I}{a}} \frac{s_2 - s_1}{s_2} \left\{ \sum_{j=2}^N j(\alpha_j - \delta_j) + \delta_0 \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (ix)$$

で与えられる.