単純重ね継手の二次元応力解析*

永 弘 太 郎**, 能 野 謙 介**

Two Dimensional Stress Analysis of Single Lap Joints

by Taro NAGAHIRO and Kensuke NONO

This paper is concerned with two dimensional stress analysis (lengthwise and widthwise) of single lap joints in consideration of adherends bending. Partial differential equations of stresses in adhesive layer are found and on the assumption that solutions of these partial differential equations are obtained in the form of separable solutions of variables, shear and normal stress distributions are analyzed.

Key Words: Elasticity, Single Lap Joint, Two Dimensional Stress Analysis, Tensile-Shear Load, Stress Distribution

1. 結 言

単純重ね継手の応力解析は色々で行われているが、幅方向の影響について考慮した二次元解析は少ない。Adams ら⁽¹⁾や網島ら⁽²⁾が解析したものがあるが、両者とも被着体の曲げを考慮に入れていない。最近、網島ら⁽³⁾は曲げのみを考えた場合について解析を行っているが、せん断応力を無視している。

また、Wah⁽⁴⁾や Dickson⁽⁵⁾は被着体を積層板と考え、三次元モデルで解析を行っているが、最終的に幅方向に応力は変化しないと仮定して、荷重の加わった軸方向のみをとりあつかっている。

本報告は、単純重ね継手に引張荷重を加えた場合の荷重軸方向及び幅方向の二次元応力分布を被着体の曲げまで考慮して解析を行ったものである。

2. 理 論

主な記号を表 1 に示す。添字として、上の被着体に関するものは u を、下の被着体に関するものには l を使用して区別している。

また、被着体の板厚に比較してラップ長さや幅は十分大きく、板の曲げ理論が使用できるものと考え、接着層において層厚さ方向について応力が変化しないと仮定して解析する。これは Goland ら⁽⁶⁾が単純重ね継手の解析に用いた基本的な考え方であり、以下の解析

においても、式の誘導、その他を Goland らの考え方や方法を応用して行っている部分が多い。

2.1 微分方程式 図 1 に示すような単純重ね継手の微小要素を取り出し、上の被着体を図 2 (a) に、下の被着体を図 2 (b) に示す。また、これらに作用している力及びモーメントの正の方向を図中の矢印で示す。

上下の被着体に作用する x , y , z 方向の力及び x 軸, y 軸まわりのモーメントの釣り合いより、式 (1) ~ (3) 及び式 (4), (5) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial S_u}{\partial y} - \tau_x &= 0 \\ \frac{\partial T_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial S_l}{\partial y} + \tau_x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial S_u}{\partial x} - \tau_y &= 0 \\ - \frac{\partial T_{ly}}{\partial y} + \frac{\partial S_l}{\partial x} + \tau_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial V_{uy}}{\partial y} - \sigma_0 &= 0 \\ \frac{\partial V_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{ly}}{\partial y} + \sigma_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_{uy}}{\partial y} - \frac{\partial T_u^*}{\partial x} - V_{uy} + \frac{t}{2} \tau_y &= 0 \\ \frac{\partial M_{ly}}{\partial y} - \frac{\partial T_l^*}{\partial x} - V_{ly} + \frac{t}{2} \tau_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_{ux}}{\partial x} - \frac{\partial T_u^*}{\partial y} - V_{ux} + \frac{t}{2} \tau_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{lx}}{\partial x} - \frac{\partial T_l^*}{\partial y} - V_{lx} + \frac{t}{2} \tau_x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

* 昭和 58 年 11 月 29 日 第 923 回講演会において講演、原稿受付 昭和 58 年 5 月 24 日。

** 正員、九州芸術工科大学芸術工学部 (〒815 福岡市南区塩原 226)。

z 軸まわりのモーメントは自動的に釣り合っている。

上の被着体の下面 ($z = \eta/2$) 及び下の被着体の上面 ($z = -\eta/2$) での x, y, z 方向の変位を u_u, v_u, w_u 及び u_l, v_l, w_l とし、同様にひずみを $\varepsilon_{ux}, \varepsilon_{uy}, \gamma_{uxy}$ 及び $\varepsilon_{lx}, \varepsilon_{ly}, \gamma_{lix}$ とすると、弾性論⁽⁶⁾により次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ux} &= \frac{\partial u_u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{uy} = \frac{\partial v_u}{\partial y}, \quad \gamma_{uxy} = \frac{\partial u_u}{\partial y} + \frac{\partial v_u}{\partial x} \\ \varepsilon_{lx} &= \frac{\partial u_l}{\partial x}, \quad \varepsilon_{ly} = \frac{\partial v_l}{\partial y}, \quad \gamma_{lix} = \frac{\partial u_l}{\partial y} + \frac{\partial v_l}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

平板の曲げ理論⁽⁷⁾によれば $\varepsilon_{ux}, \varepsilon_{lx}$ 及び $\varepsilon_{uy}, \varepsilon_{ly}$ は単位幅当たりの引張力 T_{ux}, T_{lx} 及び T_{uy}, T_{ly} が作用するためのひずみと板が曲がるためのひずみの和となり、次の式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ux} &= \frac{1}{Et} (T_{ux} - \nu T_{uy}) + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{lx} &= \frac{1}{Et} (T_{lx} - \nu T_{ly}) - \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{uy} &= \frac{1}{Et} (T_{uy} - \nu T_{ux}) + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w_u}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{ly} &= \frac{1}{Et} (T_{ly} - \nu T_{lx}) - \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

同様にせん断ひずみ $\gamma_{uxy} (z = \eta/2)$, $\gamma_{lix} (z = -\eta/2)$ はせん断力 S_u, S_l と被着体のねじれによる項の和となる。被着体のねじれによるせん断ひずみは、

$$\frac{\partial u_u}{\partial y} + \frac{\partial v_u}{\partial x} = t \frac{\partial^2 w_u}{\partial x \partial y}$$

で表され⁽⁷⁾, γ_{uxy} 及び γ_{lix} は、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{uxy} &= \frac{1}{Gt} S_u + t \frac{\partial^2 w_u}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{lix} &= \frac{1}{Gt} S_l - t \frac{\partial^2 w_l}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。また、モーメント、せん断力と変位の関係は

表 1 主な記号

E, G, ν	: Young's modulus, shear modulus and Poisson's ratio of adherend.
E_c, G_c, ν_c	: Young's modulus, shear modulus, Poisson's ratio of adhesive.
t, η	: Thickness of adherend and thickness of adhesive.
$2c, 2c'$	: Lap length and width of joint.
$T_{ux}, T_{lx}, T_{uy}, T_{ly}$	: Tensile forces in the directions in upper lower adherends.
$V_{ux}, V_{lx}, V_{uy}, V_{ly}, S_u, S_l$	: Shearing forces in upper and lower adherends.
$M_{ux}, M_{lx}, M_{uy}, M_{ly}$	: Bending moments of sections in upper and lower adherends to x and y axes, respectively.
T_u^*, T_l^*	: Twisting moments in upper and lower adherends.

次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ux} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_u}{\partial y^2} \right) \\ M_{lx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} \right) \\ M_{uy} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_u}{\partial x^2} \right) \\ M_{ly} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} T_u^* &= (1-\nu) D \frac{\partial^2 w_u}{\partial x \partial y} \\ T_l^* &= (1-\nu) D \frac{\partial^2 w_l}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{ux} &= -D \left(\frac{\partial^3 w_u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_u}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{t}{2} \tau_x \\ V_{lx} &= -D \left(\frac{\partial^3 w_l}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_l}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{t}{2} \tau_x \\ V_{uy} &= -D \left(\frac{\partial^3 w_u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_u}{\partial y^3} \right) + \frac{t}{2} \tau_y \\ V_{ly} &= -D \left(\frac{\partial^3 w_l}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_l}{\partial y^3} \right) + \frac{t}{2} \tau_y \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

ただし、 D は板の曲げ剛性で次式で表される。

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

接着層の厚さ方向に応力は変化しないと仮定すると、被着体表面の変位と接着層の応力の間には、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_x}{G_c} &= \frac{u_u - u_l}{\eta} \\ \frac{\tau_y}{G_c} &= \frac{v_u - v_l}{\eta} \\ \frac{\sigma_0}{E_c} &= \frac{w_u - w_l}{\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

の関係が成立する。以上の式を整理して τ_x, τ_y 及び σ_0 に関する微分方程式を導くが、誘導を簡単にするために次のような文字を導入する。

図 1 単純重ね継手の寸法及び座標

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_{ux} - T_{lx}, \quad T_y = T_{uy} - T_{ly} \\ M_x &= M_{ux} + M_{lx}, \quad M_y = M_{uy} + M_{ly} \\ V_x &= V_{ux} + V_{lx}, \quad V_y = V_{uy} + V_{ly} \\ S &= S_u - S_l, \quad T^* = T_u^* + T_l^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

式(12)の第1式を x で、第2式を y で偏微分し、式(6)、(7)及び(9)を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{G_c} \frac{\partial \tau_x}{\partial x} &= \frac{1}{Et} (T_x - \nu T_y) \\ &\quad - \frac{t}{2D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y) \\ \frac{\eta}{G_c} \frac{\partial \tau_y}{\partial y} &= \frac{1}{Et} (T_y - \nu T_x) \\ &\quad - \frac{t}{2D(1-\nu^2)} (M_y - \nu M_x) \end{aligned}$$

となる。この二つの式により、次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{G_c} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) \\ = \frac{1-\nu^2}{Et} T_x - \frac{t}{2D} M_x \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{G_c} \left(\nu \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) \\ = \frac{1-\nu^2}{Et} T_y - \frac{t}{2D} M_y \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

また、式(6)、(8)及び(10)より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_u}{\partial y} + \frac{\partial v_u}{\partial x} &= \frac{1}{Gt} S_u + \frac{t}{(1-\nu)D} T_u^* \\ \frac{\partial u_l}{\partial y} + \frac{\partial v_l}{\partial x} &= \frac{1}{Gt} S_l - \frac{t}{(1-\nu)D} T_l^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

となり、2式の差をとり、式(12)を代入すると、

$$\frac{\eta}{G_c} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{Gt} S + \frac{t}{(1-\nu)D} T^* \dots\dots\dots(17)$$

となる。この式を y で偏微分し、式(1)、(5)及び式(14)を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x \partial y} \\ = \beta^2 \tau_x - \frac{G_c t}{2D\eta} V_x \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\beta^2 = 8G_c(1-\nu^2)/(E\eta t)$ である。同様に式(17)を x で偏微分して、式(2)、(4)及び式(15)より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x \partial y} \\ = \beta^2 \tau_y - \frac{G_c t}{2D\eta} V_y \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

となる。式(18)を x で、式(19)を y で偏微分したものを加え、式(3)を代入すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) = 0 \dots\dots\dots(20)$$

の τ_x, τ_y に関する第1の偏微分方程式を得る。

次に、式(7)の第1式を y で、第3式を x で偏微分

すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u_u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{Et} \left(\frac{\partial T_{ux}}{\partial y} - \nu \frac{\partial T_{uy}}{\partial x} \right) + \frac{t}{2} \frac{\partial^3 w_u}{\partial x^2 \partial y} \dots\dots\dots(21)$$

$$\frac{\partial^2 v_u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{Et} \left(\frac{\partial T_{uy}}{\partial x} - \nu \frac{\partial T_{ux}}{\partial y} \right) + \frac{t}{2} \frac{\partial^3 w_u}{\partial x \partial y^2} \dots\dots\dots(22)$$

式(16)の第1式を x 及び y で偏微分し、式(10)を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u_u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_u}{\partial x^2} = \frac{1}{Gt} \frac{\partial S_u}{\partial x} + t \frac{\partial^3 w_u}{\partial x^2 \partial y} \dots\dots\dots(23)$$

$$\frac{\partial^2 u_u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{Gt} \frac{\partial S_u}{\partial y} + t \frac{\partial^3 w_u}{\partial x \partial y^2} \dots\dots\dots(24)$$

式(21)及び(23)より $\partial^3 w_u / \partial x^2 \partial y$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_u}{\partial x^2} &= \frac{2}{Et} \left\{ \frac{\partial T_{ux}}{\partial y} - \nu \frac{\partial T_{uy}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu) \frac{\partial S_u}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

となり、この式を x で偏微分して、式(1)及び式(2)を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u_u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 v_u}{\partial x^3} &= \frac{2}{Et} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 S_u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_u}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

(a) 上の被着体

(b) 下の被着体

図2 上・下被着体の微小要素

となる。同様にして、式(22)及び(24)より $\partial^3 w_u / \partial x \partial y^2$ を消去した式を y で偏微分し、式(1)及び式(2)を代入すると、次式が求められる。

$$-\frac{\partial^3 u_u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_u}{\partial x \partial y^2} = \frac{2}{Et} \left(-\nu \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 S_u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_u}{\partial y^2} \right) \quad (26)$$

この式(25)と(26)の差をとると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u_u}{\partial y} - \frac{\partial v_u}{\partial x} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Et} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) \quad (27)$$

となる。同様の計算を下の被着体について行くと、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial y} - \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) = -\frac{2(1+\nu)}{Et} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) \quad (28)$$

となり、式(27)と(28)の差をとると次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (u_u - u_l) - \frac{\partial}{\partial x} (v_u - v_l) \right\} = \frac{4(1+\nu)}{Et} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) \quad (29)$$

これに式(12)を代入すると第二の偏微分方程式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta'^2 \right) \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) = 0 \quad (30)$$

ただし、

$$\beta'^2 = \frac{4(1+\nu)G_c}{E\eta t} = \frac{1}{2(1-\nu)}\beta^2$$

である。

次に、式(9)及び式(12)より次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{D}(M_{ux} - M_{lx}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (w_u - w_l) \\ &= \frac{\eta}{E_c} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_0 \quad (31) \\ -\frac{1}{D}(M_{uy} - M_{ly}) &= \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (w_u - w_l) \end{aligned}$$

$$= \frac{\eta}{E_c} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_0 \quad (32)$$

式(10)及び式(12)より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\nu)D} (T_u^* - T_l^*) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_u - w_l) \\ &= \frac{\eta}{E_c} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x \partial y} \quad (33) \end{aligned}$$

また、式(11)及び(12)より次式が成り立つ。

$$-\frac{1}{D} (V_{ux} - V_{lx}) = \frac{\eta}{E_c} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) \sigma_0 \quad (34)$$

$$-\frac{1}{D} (V_{uy} - V_{ly}) = \frac{\eta}{E_c} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \sigma_0 \quad (35)$$

式(34)を x で偏微分したものと、式(35)を y で偏微分したものを加えると、

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{E_c} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \sigma_0 \\ = -\frac{1}{D} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (V_{ux} - V_{lx}) + \frac{\partial}{\partial y} (V_{uy} - V_{ly}) \right\} \end{aligned}$$

となり、この式に式(3)を代入すると次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \sigma_0 = -\lambda^4 \sigma_0 \quad (36)$$

ただし、

$$\lambda^4 = \frac{2E_c}{D\eta}$$

であり、 σ_0 の偏微分方程式を得る。

2.2 微分方程式の解 τ_x , τ_y 及び σ_0 に関する偏微分方程式(20), (30) 及び(36)の解は x のみの関数と y のみの関数の積の形で得ることができる。すなわち、変数分離形で解が得られると仮定する。

また、図1より単純重ね継手形状が x - z 平面に対称であり、 y 軸に関して線対称である。荷重も y 軸に対して線対称であるので、 τ_x 及び σ_0 は x , y の偶関数であり、 τ_y は x , y の奇関数である。

以上のことを考えて、 τ_x , τ_y 及び σ_0 の解としては、

$$\begin{aligned} \tau_x &= {}_tA_0 + {}_tA'_0 \cosh \beta' x + {}_tA''_0 \cosh \beta x + {}_tB'_0 \cosh \beta' y + {}_tB''_0 \cosh \beta y \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_tA_i \cosh {}_t\gamma_{1i} x + {}_tA'_i \cosh u'_{1i} x + {}_tA''_i \cosh u''_{1i} x) \cos {}_t\gamma_{1i} y \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_tB_i \cosh {}_t\gamma_{2i} y + {}_tB'_i \cosh u'_{2i} y + {}_tB''_i \cosh u''_{2i} y) \cos {}_t\gamma_{2i} x \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_tC_i \cos {}_t\gamma_{3i} x + {}_tC'_i \cosh u'_{3i} x + {}_tC''_i \cosh u''_{3i} x) \cosh {}_t\gamma_{3i} y \\ &\quad \quad \quad \boxed{+ {}_tC'_i \cos w'_{3i} x} \quad \boxed{+ {}_tC''_i \cos w''_{3i} x} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_tD_i \cos {}_t\gamma_{4i} y + {}_tD'_i \cosh u'_{4i} y + {}_tD''_i \cosh u''_{4i} y) \cosh {}_t\gamma_{4i} x \quad (37) \\ &\quad \quad \quad \boxed{+ {}_tD'_i \cos w'_{4i} y} \quad \boxed{+ {}_tD''_i \cos w''_{4i} y} \\ \tau_y &= -{}_tA'_0 \beta' y \sinh \beta' x + {}_tB'_0 \beta x \sinh \beta y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{\infty} \left({}_iA_i \sinh {}_i\gamma_{1i}x + {}_iA'_i \frac{{}_i u'_{1i}}{{}_i\gamma_{1i}} \sinh {}_i u'_{1i}x + {}_iA''_i \frac{{}_i\gamma_{1i}}{{}_i u''_{1i}} \sinh {}_i u''_{1i}x \right) \sin {}_i\gamma_{1i}y \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left({}_iB_i \sinh {}_i\gamma_{2i}y + {}_iB'_i \frac{{}_i\gamma_{2i}}{{}_i u'_{2i}} \sinh {}_i u'_{2i}y + {}_iB''_i \frac{{}_i u''_{2i}}{{}_i\gamma_{2i}} \sinh {}_i u''_{2i}y \right) \sin {}_i\gamma_{2i}x \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left({}_iC_i \sinh {}_i\gamma_{3i}x + {}_iC'_i \frac{{}_i u'_{3i}}{{}_i\gamma_{3i}} \sinh {}_i u'_{3i}x + {}_iC''_i \frac{{}_i\gamma_{3i}}{{}_i u''_{3i}} \sinh {}_i u''_{3i}x \right) \sinh {}_i\gamma_{3i}y \\
& \quad + {}_iC'_i \frac{{}_i w'_{3i}}{{}_i\gamma_{3i}} \sin {}_i w'_{3i}x + {}_iC''_i \frac{{}_i\gamma_{3i}}{{}_i w''_{3i}} \sin {}_i w''_{3i}x \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-{}_iD_i \sinh {}_i\gamma_{4i}y - {}_iD'_i \frac{{}_i\gamma_{4i}}{{}_i u'_{4i}} \sinh {}_i u'_{4i}y + {}_iD''_i \frac{{}_i u''_{4i}}{{}_i\gamma_{4i}} \sinh {}_i u''_{4i}y \right) \sinh {}_i\gamma_{4i}x \quad \dots\dots\dots(38) \\
& \quad - {}_iD'_i \frac{{}_i\gamma_{4i}}{{}_i w'_{4i}} \sin {}_i w'_{4i}y - {}_iD''_i \frac{{}_i w''_{4i}}{{}_i\gamma_{4i}} \sin {}_i w''_{4i}y \\
\sigma_0 = & {}_sA_0 \cosh \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \cos \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + {}_sA'_0 \sinh \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \sin \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + {}_sC_0 \cosh \frac{\lambda x}{\sqrt{2}} \cos \frac{\lambda x}{\sqrt{2}} + {}_sC'_0 \sinh \frac{\lambda x}{\sqrt{2}} \sin \frac{\lambda x}{\sqrt{2}} \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_sA_i \cosh {}_i u_{1i}y \cos {}_i v_{1i}y + {}_sA'_i \sinh {}_i u_{1i}y \sin {}_i v_{1i}y) \cos {}_i\gamma_{1i}x + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_sB_i \cosh {}_i v_{2i}y \cos {}_i u_{2i}y \\
& + {}_sB'_i \sinh {}_i v_{2i}y \sin {}_i u_{2i}y) \cosh {}_i\gamma_{2i}x + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_sC_i \cosh {}_i u_{3i}x \cos {}_i v_{3i}x + {}_sC'_i \sinh {}_i u_{3i}x \sin {}_i v_{3i}x) \\
& \times \cos {}_i\gamma_{3i}y + \sum_{i=1}^{\infty} ({}_sD_i \cosh {}_i v_{4i}x \cos {}_i u_{4i}x + {}_sD'_i \sinh {}_i v_{4i}x \sin {}_i u_{4i}x) \cosh {}_i\gamma_{4i}y \quad \dots\dots\dots(39)
\end{aligned}$$

を考える。\${}_iA_i\$, \${}_iA'_i\$, \${}_iA''_i\$ 等及び \${}_sA_i\$, \${}_sA'_i\$ 等は未定係数である。ただし,

$$\begin{aligned}
u'_{ki} &= \sqrt{\beta'^2 + {}_i\gamma_{ki}^2}, u''_{ki} = \sqrt{\beta'^2 - {}_i\gamma_{ki}^2} \quad (k=1, 2) \\
u'_{ki} &= \sqrt{\beta'^2 - {}_i\gamma_{ki}^2}, u''_{ki} = \sqrt{\beta'^2 + {}_i\gamma_{ki}^2} \quad (k=3, 4) \\
w'_{ki} &= \sqrt{{}_i\gamma_{ki}^2 - \beta'^2}, w''_{ki} = \sqrt{{}_i\gamma_{ki}^2 + \beta'^2} \\
u_{ki} &= \sqrt{\frac{\lambda^4 + {}_s\gamma_{ki}^4 + {}_s\gamma_{ki}^2}{2}}, \\
v_{ki} &= \sqrt{\frac{\lambda^4 + {}_s\gamma_{ki}^4 - {}_s\gamma_{ki}^2}{2}}
\end{aligned}$$

であり, 添字 \$k\$ は \$1 \sim 4\$, \${}_i\gamma_{ki}\$, \${}_s\gamma_{ki}\$ は任意定数である。また, 式 (37) 及び (38) の \${}_iC'_i\$, \${}_iC''_i\$, \${}_iD'_i\$ 及び \${}_iD''_i\$ の項は上段が,

$${}_i\gamma_{ki} < \beta', \quad {}_i\gamma_{ki} < \beta$$

下段 (線で囲んである) が,

$${}_i\gamma_{ki} > \beta', \quad {}_i\gamma_{ki} > \beta$$

の場合である。せん断応力 \$\tau_x\$, \$\tau_y\$ は \$i\$ を \$n\$ まで取ると未定係数の数は \$(12n+5)\$ 個であり, 引張応力 \$\sigma_0\$ も \$i\$ を \$n\$ まで取ると未定係数の数は \$(8n+4)\$ 個である。

2.3 境界条件 境界条件としては継手端部 (\$x = \pm c\$) においては, 引張力 \$T(y)\$, 曲げモーメント \$M_0(y)\$, せん断力 \$V_0(y)\$ が作用していると考え, 幅方向の端部 (\$y = \pm c'\$) は自由境界面であることを考慮に入れると, \$x=c\$ において,

$$\begin{aligned}
M_{ux} = V_{ux} = T_{ux} = S_u = S_l = T_u^* = T_l^* = 0 \\
M_{lx} = M_0(y), V_{lx} = -V_0(y), T_{lx} = T(y) \quad \dots\dots\dots(40)
\end{aligned}$$

\$y=c'\$ において,

$$\begin{aligned}
M_{uy} = V_{uy} = T_{uy} = S_u = T_u^* = 0 \\
M_{ly} = V_{ly} = T_{ly} = S_l = T_l^* = 0 \quad \dots\dots\dots(41)
\end{aligned}$$

となる。引張力 \$T(y)\$ 及び曲げモーメント \$M_0(y)\$ は接着していない被着体の長さ, すなわち, 荷重点より継手端までの距離が被着体の板厚に比べて十分長いと考え, \$T(y) = T\$, \$M_0(y) = M_0\$ のように \$y\$ 方向に変化しないと考える。\$M_0\$ の値は Goland らの解析にならって, 荷重点から継手端までの距離が被着体の板厚に比較して十分大きいときは,

$$\begin{aligned}
M_0 = x \frac{Tt}{2}, \quad x = \frac{1}{1+2\sqrt{2} \tanh qc} \\
qc = \frac{c}{t} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)T}{2Et}}
\end{aligned}$$

とする。せん断力 \$V_0(y)\$ は弾性論⁽⁶⁾により \$y\$ 方向に次のような分布をもつ。

$$\begin{aligned}
V_0(y) = \left[1 - \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{y}{t} \right) \right. \right. \\
\left. \left. \times \exp \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} \frac{c'-y}{t} \right) \right\} \right] V_0 \text{ mean} \quad \dots\dots\dots(42)
\end{aligned}$$

ただし, \$V_0 \text{ mean}\$ は \$V_0(y)\$ の平均値であり, この値は Goland らにより,

$$V_0 \text{ mean} = x T \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)T}{Et}}$$

とする。

2.4 未定係数の決定 未定係数を境界条件より決定することにより \$\tau_x\$, \$\tau_y\$ 及び \$\sigma_0\$ を求めることができる。最初に, \$\tau_x\$, \$\tau_y\$ について考える。

\$x=c\$ の境界を考え, 式 (40) の境界条件を式 (14), (18) 及び (17) に代入して,

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = -\frac{G_c}{\eta} \left(\frac{1-\nu^2}{Et} T + \frac{t}{2D} M_0 \right) \dots (43)$$

$$\tau_x - \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x \partial y} \right) = \frac{3}{4t} V_0(y) \dots (44)$$

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0 \dots (45)$$

となる。次に $y = \pm c'$ における境界条件式 (41) を式 (15), (19) 及び (17) に適用して,

$$\nu \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \dots (46)$$

$$\tau_y - \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x \partial y} \right) = 0 \dots (47)$$

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0 \dots (48)$$

となる。また、 x 方向の力の釣り合いを考えると,

$$\int_0^{c'} \int_0^c \tau_x dx dy + \frac{c'}{2} T = 0 \dots (49)$$

の条件を満たさなければならない。

τ_x, τ_y の式 (37), (38) を式 (43)~(49) に代入し, 式 (43)~(45) の場合は $x=c$ を代入し, y に関して $[-2c', 2c']$ の区間でフーリエ展開する。式 (46)

~(48) の場合は $y=c'$ を代入して, x に関して $[-2c, 2c]$ の区間でフーリエ展開する。フーリエ展開する区間を2倍に広げたのは少ない展開項数で誤差を小さくするためである。フーリエ展開の方法については[付録]に示す。式 (43) の場合定数項が右辺の値となり, 他的高次の項は零とおいた。式 (43) を $2m$ 項までフーリエ展開し左右両辺の各項の係数が等しいとくと, 条件式が $2m+1$ 個である。式 (44)~(46) 及び (48) については $2m$ 項まで, 式 (47) については $2m-1$ 項までフーリエ展開すると, 式 (44)~(46) から $2m+1$ 個, 式 (47) 及び (48) [式 (48) の場合の定数項は式 (45) の定数項と同じ式となり, 条件式が一つ減る] より $2m$ 個の条件式が得る。また, 式 (49) より条件式が1個であるので条件式の数の合計は $12m+5$ 個となり, τ_x, τ_y の未定係数の数 $12n+5$ と一致し, 未定係数を求めることができる。

次に σ_0 の場合は $x=c$ での境界条件式 (40) を式 (31), (34) 及び (33) に適用すると,

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y^2} \right) = \frac{\lambda^4}{2} M_0 \dots (50)$$

$$\frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\lambda^4}{2} V_0(y) \dots (51)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x \partial y} = 0 \dots (52)$$

となる。 σ_0 の場合は偏微分方程式の形が板のたわみの場合と似ており, 板の場合のキルヒホフの方法⁽⁷⁾が使用できると考え, 式 (51) 及び (52) を一つにまとめると,

表 2 計算に使用した数値

Adherend		Adhesive layer	
E	68.6 GPa	E_c	1.372 GPa
ν	0.33	G_c	0.49 GPa
t	2 mm	ν_c	0.4
2c	25 mm	η	0.3 mm
2c'	25 mm

図 3 τ_x の分布

図 4 τ_y の分布

図 5 σ_0 の分布

$$\frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\lambda^4}{2} V_0(y) \quad \dots\dots\dots(53)$$

となる。 $y=c'$ の境界条件式 (41) を式 (32) に適用して、

$$\nu \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(54)$$

キルヒホフの方法を同様に使用すると、式 (33) 及び式 (35) により、

$$\frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(55)$$

を得る。 σ_0 に関する境界条件式 (50), (53)~(55) に σ_0 の式 (39) を代入して、式 (50) 及び (53) では y が零から c' までを $2m$ 等分した点で成立し、式 (54) 及び (55) は x が零から c までを $2m$ 等分した点で成立するとすると、各式から $2m+1$ の条件式がで、合計 $8m+4$ となり未定係数の数と一致する。よって、この条件式を解くことにより、未定係数が決まる。なお、 σ_0 の場合にフーリエ展開を使用しなかったのは双曲線関数と三角関数の積のフーリエ展開は項数が少ないと誤差が大きくなるためである。

3. 計算例

計算に使用した被着体及び接着層に関する数値を表 2 に示す。引張力 T は 78.4 N/mm として計算を行い、その結果を図 3~5 に示す。図 3 は τ_x の分布を図示したもので、 $x=c$, $y=c'$ の点で最大となる。図 4 は τ_y の分布であり、 τ_x と同様に $x=c$, $y=c'$ で最大となっている。 σ_0 の分布については図 5 より分かるように、最大値は $x=c$ の線上で $y=c'$ より内側に入った所である。 τ_x の最大値は Goland らの解析により求めたものと比較すると約 10% 増加し、 σ_0 の最大値も同様に約 14% 増加する。

図 6 $x=c$ における τ_x の分布

図 6, 7 に継手幅を $2c'=12.5, 25, 50 \text{ mm}$ と変えた場合 (他のパラメータは表 2 と同じ) の $x=c$ での τ_x 及び σ_0 を図示する。図 6 の τ_x の図より分かるように幅を変えても中央付近ではほとんど同じであり、 $y/c'=1.0$ 付近で差が広がり、幅が広いほど最大値が大きくなる傾向を示す。同様に図 7 に σ_0 の場合を示す。 σ_0 の場合は中央付近ではほぼ一定であり、 y が増加するにつれていったん増加し、 $y=c'$ 付近では減少する傾向を示す。 σ_0 の最大値も幅が広がると大きくなる傾向を示す。すなわち、 τ_x も σ_0 も幅を広げると最大値が大きくなるので、単位幅当たりの破壊荷重は小さくなると考えられる。

4. 結 論

本報告では単純重ね継手の二次元解析を行い、以下のような結論を得た。

- (1) 被着体の曲げまで考慮して、せん断応力 τ_x , τ_y に関する連立偏微分方程式と引張応力 σ_0 に関する偏微分方程式を導くことができた。
- (2) 偏微分方程式を満たす解として τ_x , τ_y 及び σ_0 を変数分離形の級数の形で求め、有限項で近似した場合の応力分布を求めた。
- (3) τ_x 及び τ_y は $x=\pm c$, $y=\pm c'$ の端の部分で最大となり、 σ_0 は $x=\pm c$ で $y=\pm c'$ より少し内に入った所で最大となる。
- (4) 継手の幅を増すと τ_x 及び σ_0 の最大値も増す傾向を示す。

〔付録〕 y に関して区間 $[-c', c']$ で定義された関数 $f(y)$ をフーリエ展開する場合、区間 $[-c', c']$ では $f(y)$ をそのまま使用し、 $f(y)$ が奇関数ならば、

$$2f(c') \sin \frac{\pi y}{2c'} + f(2c' + y) \quad (-2c' \leq y \leq -c')$$

図 7 $x=c$ における σ_0 の分布

$$2f(c')\sin\frac{\pi y}{2c'}-f(2c'-y) \quad (c'\leq y\leq 2c')$$

の関数を, $f(y)$ が偶関数ならば,

$$2f(c')-f(2c'+y) \quad (-2c'\leq y\leq -c')$$

$$2f(c')-f(2c'-y) \quad (c'\leq y\leq 2c')$$

の関数を使用して, 周期 $4c'$ で展開する. このように展開した関数を使用すると区間 $[-c', c']$ での誤差が項数が少なくても小さくなる. x に関してフーリエ展開する場合も同様な方法を使用した.

文 献

- (1) Adams, R.D. and Peppiatt, N.A., *J. Strain Anal.*, 8 (1973), 134.
- (2) Amijima, S., ほか 2 名, *The 20th Jpn. Congress on Mat. Res.*, (1978), 275.
- (3) 網島・ほか 3 名, 第 19 回接着研究発表会要旨, (昭 56), 11.
- (4) Wah, T., *J. Eng. Mater. Technol.*, (1973), 174.
- (5) Dickson, J.N., ほか 2 名, *AFFDL-TR-72-64*, (1972), 1.
- (6) 会多, 弾性論, (昭 50), コロナ社.
- (7) 長谷川, 板とシェルの理論, (昭 50), プレイン図書.
- (8) Goland, M. and Reissner, E., *J. Appl. Mech.*, 11 (1944), A17.

討 論

〔質問〕 池 上 皓 三

(東京工業大学精密工学研究所)

従来の単純重ね継手の解析は, 一次元的な取扱いが多く, 二次元的な解析は少ないのが現状である. 本報告で単純重ね継手の二次元的な応力分布を, 解析的に示されたことは興味ある結果と考える. 下記の点おたずねする.

(1) 図 3 から図 5 の結果で, τ_x や τ_y の絶対値の最大は $x/c=1.0$, $y/c'=1.0$ で生じているが, σ_0 の場合には, それらの位置よりやや内側の点で最大となっている. このことを簡単に説明できる理由があれば, ご教示いただきたい.

(2) 継手の応力値は級数展開の形で与えられているが, どのくらいの項数をとれば, 応力値の計算に十分か.

〔回答〕 (1) $x/c=1.0$, $y/c'=1.0$ 付近は自由表面が直角に交わる部分であり, ヤング係数の異なるものを接着すると端部効果により応力が高くなる部分と考えられる. 引張応力 σ_0 の場合, 被着体がポアソン比の

付図 1 A-A' 断面

影響で付図 1 の断面 A-A' のように曲っている. $y/c'=1.0$ 付近ではこの影響による圧縮応力が生じ, この圧縮応力が加わることにより, $y/c'=1.0$ よりやや内側の点で最大となると考えている.

項数については境界条件を十分な精度で満たす項数まで必要と考えている. せん断応力 τ_x , τ_y の場合は 2 項で, 引張応力 σ_0 については 6~8 項で精度よく境界条件を満たすようになっている.