繰返し負荷を受ける材料の塑性流れ*
(第 1 報, 理論の提案)

石 川 博 将**

Plastic Flow Rule for Cyclic Loading
(1st Report, Representation of Theory)

by Hiromasa ISHIKAWA

The stress analysis of structures subjected to cyclic loading requires constitutive relations sufficiently simple to be usable with computer program and yet adequate to describe the essential features of the plastic behavior of the material. In this paper, a generalization of current theories of cyclic plasticity is developed. Namely, the plastic flow rule for work hardening or softening materials under cyclic loading is proposed, and then applicability of Ramberg-Osgood's law to cyclic loading is presented. The movements of the loading surface are restricted herein by modified Prager's law, and its expansion and contraction are represented by the cumulated plastic work as a parameter of loading surface. This model is shown to provide a quantitative representation of the transient uniaxial cyclic hardening process for type 304 austenitic stainless steel.

Key Words: Plasticity, Cyclic Loading, Constitutive Equation, Ramberg-Osgood's Law, Plastic Work, Cyclic Hardening or Softening, Stabilization

1. 緒 言

von Mises の降伏条件とそれに関連する Prandtl-Reuss の応力-塑性ひずみ増分の関係を用いた古典塑性理論により多くの境界値問題の解が非硬化材や等方硬化材に対して得られている。しかるに、等方硬化は負荷方向の変動がある繰返し負荷を受ける場合のモデルとしては Bauschinger 効果の考慮がなされていないため不適当である。しかしながら、压力容器、タービン、原子力機器や航空宇宙機体などの多くの重要な機械や構造物は繰返し外荷重や、繰返し熱負荷を受ける。このような負荷履歴を考慮したモデルの一つに移動硬化がある⁽¹⁾⁽²⁾。Mróz⁽³⁾は応力空間内の曲面群の概念から、これら移動-等方硬化則に従うモデルを提案している。このモデルは各部が直線の応力-ひずみ挙動を示す副層モデルであり Besseling⁽⁴⁾の提案したモデルと共通の特徴を有している。Popov⁽⁵⁾らは塑性内部変数を用い塑性関係式を一般的な形で定式化した。その際、負荷面 (loading surface) のほかに境界面 (boundary surface) の概念を導入している。ほぼ同時

に、Krieg⁽⁶⁾は移動し、等方的に膨張・収縮する通例の負荷面とは無関係に移動し、等方的に膨張し負荷面を包絡する限界面 (limiting surface) を用いた塑性理論を提案している。Popov, Krieg の提案した 2 面理論にさらに副降伏面 (subyield surface) を導入した 3 面理論が Hashiguchi⁽⁷⁾により提案されている。また、Shiratori⁽⁸⁾らは等塑性ひずみ面を塑性ポテンシャルとして塑性変形解析が可能であることを任意の負荷経路に対して示している。最近、Ohno⁽⁹⁾は非硬化ひずみ領域を考慮した繰返し塑性の構成式を定式化している。

いずれのモデルも広範囲な負荷経路にわたり実験的に観察された挙動をより正確に、より詳細に記述することを目的としたものであり、実際の構造物の応力解析に用いるには非常に煩雑すぎる。さらに、Chaboche⁽¹⁰⁾らも論じているようにモデルの材料定数を決めるのも面倒な問題になる。Drucker⁽¹¹⁾らは繰返し負荷を受ける材料挙動の本質にはよく一致し、しかも計算機のパログラムに簡単に利用できるモデルを示している。しかし、そのモデルの導入のし方が十分理論的であるとは言えない。

本論文ではまず一般的な繰返し負荷を受ける材料の塑性流れ則を示し、さらに従来弾塑性解析で利用されている Ramberg-Osgood⁽¹²⁾則が繰返し負荷のような

* 昭和 58 年 11 月 29 日 第 923 回講演会において講演、原稿受付 昭和 58 年 5 月 25 日。

** 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)。

一般的な負荷に利用できることを示す。その際、負荷面の移動は Ziegler⁽²⁾により、膨張・収縮は負荷履歴を表すパラメータとして塑性仕事を用いた。すなわち、各サイクルでの降伏応力と硬化・軟化を示すパラメータを塑性仕事で表示した。なお、Eisenberg⁽¹³⁾も繰返し塑性の構成式に Ramberg-Osgood 則を用いているが、負荷面の中心移動を求めているため、その適用方法は適切ではない。

2. 温度変化のある場合の流れ則

温度 T のもとで負荷関係 f は応力テンソル σ_{ij} 、負荷面の中心の座標 s_{ij}^c 、塑性ひずみテンソル ε_{ij}^p 、塑性内部変数の一つである硬化パラメータ κ を用いて次式のように表示され得ると仮定する。

$$f = f(\sigma_{ij}, s_{ij}^c, \varepsilon_{ij}^p, \kappa, T) \quad (1)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial s_{ij}^c} ds_{ij}^c + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa + \frac{\partial f}{\partial T} dT = 0 \quad (5)$$

式(4)を(5)に代入し、 Λ について解けば

$$\Lambda = G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}^c} ds_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \quad (6)$$

ただし、

$$G = - \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (7)$$

したがって、式(4)、(6)より

$$d\varepsilon_{ij}^p = G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}^c} ds_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$

ここで、負荷関数が次式で表示される硬化材について考える⁽⁶⁾⁽¹¹⁾

$$f = \frac{1}{2} (s_{ij} - s_{ij}^c)(s_{ij} - s_{ij}^c) - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2(\kappa, T) = 0 \quad (9)$$

ただし、 s_{ij} は偏差応力ランソル、 s_{ij}^c は偏差応力空間での負荷面の中心の座標である。

上式より $\partial f / \partial \sigma_{ij} = s_{ij} - s_{ij}^c$ に注意し、式(8)は次式となる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}^c} ds_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) (s_{ij} - s_{ij}^c) \quad (10)$$

上式より、式(2)の關係に注意し、

$$\begin{aligned} dW^p &= \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) d\varepsilon_{ij}^p = G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}^c} ds_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) (s_{ij} - s_{ij}^c) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \\ &= G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}^c} ds_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \end{aligned}$$

したがって、上式より

$$G = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}^c} ds_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT} \quad (11)$$

式(11)を式(10)に代入し、次式を得る。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} (s_{ij} - s_{ij}^c) \quad (12)$$

式(12)が負荷面の中心が移動し、かつ膨張・収縮する場合として負荷関数 f が式(9)で与えられる場合の流

$\bar{\sigma}$, $d\bar{\varepsilon}^p$, dW^p をそれぞれ、相当応力 [式(9)], 相当塑性ひずみ増分, 塑性仕事増分として、硬化パラメータ κ は加工硬化パラメータ:

$$d\kappa = dW^p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) d\varepsilon_{ij}^p \quad (2)$$

ひずみ硬化パラメータ:

$$d\kappa = d\bar{\varepsilon}^p \quad (3)$$

と表示できよう。負荷面上のなめらかな点において、塑性ひずみ増分ベクトルが法線方向に向くためには、

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

式(4)の比例係数 Λ は塑性変形中は応力点が降伏面上に存在するという Prager の適合条件より求める。 κ を式(2)、(3)より ε_{ij}^p の関数と仮定すると、負荷の間

れ則である。式(12)で負荷面の中心の移動がない等方硬化材の場合は $s_{ij}^c = 0$ として

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} s_{ij} \quad (13)$$

なる、いわゆる Prandtl-Reuss の式となる。したがっ

て、式(12)は変形された Prandtl-Reuss の式と呼ぶ。負荷面の中心移動 ds_{ij}^c は相当応力 $\bar{\sigma}$ の増減に影響される。式(9)より

$$df=0=(s_{ij}-s_{ij}^c)(ds_{ij}-ds_{ij}^c) - \frac{2}{3}\bar{\sigma}d\bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots(14)$$

または、

$$ds_{ij}^c(s_{ij}-s_{ij}^c)=(s_{kl}-s_{kl}^c)ds_{kl} - \frac{2}{3}\bar{\sigma}d\bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots(15)$$

負荷面の中心の移動 ds_{ij}^c の方向が各瞬間の中心 s_{ij}^c と負荷点 s_{ij} を結ぶ径ベクトルに一致するとした Prager-Ziegler の仮定を用いて、つぎの関係を導く。

$$ds_{ij}^c=\left\{(s_{kl}-s_{kl}^c)ds_{kl} - \frac{2}{3}\bar{\sigma}d\bar{\sigma}\right\}(s_{ij}-s_{ij}^c)\frac{3}{2\bar{\sigma}^2} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで、 $\bar{\sigma}$ は塑性仕事 W^p のみの関数と仮定し、さらに式(2)の塑性仕事増分は

$$dW^p=(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^c)d\varepsilon_{ij} = (s_{ij}-s_{ij}^c)d\varepsilon_{ij}^p$$

と表示され得るから、式(16)より

$$ds_{ij}^c=\left\{(s_{kl}-s_{kl}^c)ds_{kl} - \frac{2}{3}\bar{\sigma}\left(\frac{d\bar{\sigma}}{dW^p}\right)dW^p\right\}(s_{ij}-s_{ij}^c)\frac{3}{2\bar{\sigma}^2} = \frac{3}{2\bar{\sigma}^2}(s_{ij}-s_{ij}^c)(s_{kl}-s_{kl}^c)ds_{kl} - \left(\frac{2}{3}\bar{\sigma}\frac{d\bar{\sigma}}{dW^p}\right)\left\{\frac{3}{2\bar{\sigma}^2}(s_{ij}-s_{ij}^c)(s_{kl}-s_{kl}^c)d\varepsilon_{kl}^p\right\}$$

上式に式(12)を代入し、整理すると

$$ds_{ij}^c=\frac{3}{2\bar{\sigma}^2}(s_{ij}-s_{ij}^c)(s_{kl}-s_{kl}^c)ds_{kl} - \left(\frac{2}{3}\bar{\sigma}\frac{d\bar{\sigma}}{dW^p}\right)d\varepsilon_{ij}^p \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。相当応力 $\bar{\sigma}$ と塑性仕事 W^p の関係が既知の場合、上式より負荷面の中心の移動が求められる。

3. 一般負荷での Ramberg-Osgood 則

負荷、除荷、再負荷、繰返し負荷、さらに時おり大きな過負荷を受ける場合の応力-ひずみ関係がすべて負荷面の中心移動を考慮したつぎの Ramberg-Osgood 則の形で表示されるとする。

$$\varepsilon_t-\varepsilon_t^c=\frac{\sigma_t-\sigma_t^c}{E}\left[1+K\left\{\frac{\sigma_t-\sigma_t^c}{\sigma_{Y(n)}}\right\}^{m(n)}\right] \quad \dots\dots\dots(18)$$

$\varepsilon_t, \sigma_t, \sigma_t^c, \varepsilon_t^c$ は単軸のひずみ、応力と負荷面の中心の応力とひずみである。K は定数である。ここで、 $\sigma_{Y(n)}$ と $m(n)$ は以前に $n-1$ 回の負荷履歴を受けた単軸降伏応力と硬化・軟化パラメータであり、次式に示すよう

に、それまで受けた塑性仕事のみに依存する。なお、本報では温度が一定での負荷変動のみを考えることにする。

$$\sigma_{Y(n)}=\sigma_{Y(\infty)}\left\{1\mp\alpha\exp\left(-\frac{W^p-W_t^p}{W_0}\right)\right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$m(n)=m_{(\infty)}\left\{1\mp\beta\exp\left(-\frac{W^p-W_t^p}{W_1}\right)\right\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

式(19)、(20)で W^p は初期の負荷履歴で受けた塑性仕事である。式(19)での α の前の符号が負の場合、 $\sigma_{Y(1)}=\sigma_{Y(\infty)}(1-\alpha)$ から $\sigma_{Y(\infty)}$ まで α の 0 と 1 の間の値に対し、加工硬化（または繰返し硬化）を意味し、符号が正の場合は $\sigma_{Y(1)}=\sigma_{Y(\infty)}(1+\alpha)$ から $\sigma_{Y(\infty)}$ まで、任意の正の α の値に対し、加工軟化（または、繰返し軟化）を意味する。同様に式(20)で β の前の符号が負の場合、加工硬化（または、繰返し硬化）を意味し、正の場合は加工軟化（または、繰返し軟化）を意味する。いずれにしろ、定常時（または、繰返し安定時）降伏応力は $\sigma_{Y(\infty)}$ 、硬化・軟化パラメータは $m_{(\infty)}$ である。定数 W_0, W_1 は

$$\sigma_{Y(n)}=\sigma_{Y(\infty)}(1\mp\alpha/e), \quad m(n)=m_{(\infty)}(1\mp\beta/e)$$

での W^p の値であるが、硬化・軟化の割合を調整するのに用いられる。

式(9)と(18)より、相当応力-相当塑性ひずみは

$$\bar{\varepsilon}^p=\frac{K}{E}\left\{\frac{1}{\sigma_{Y(n)}}\right\}^{m(n)}\bar{\sigma}^{m(n)+1} \quad \dots\dots\dots(21)$$

したがって、上式より

$$d\bar{\varepsilon}^p=K\frac{m(n)+1}{E}\left\{\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{Y(n)}}\right\}^{m(n)}\cdot d\bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots(22)$$

式(22)に(14)を代入し、次式を得る。

$$d\bar{\varepsilon}^p=K\frac{m(n)+1}{E}\left\{\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{Y(n)}}\right\}^{m(n)}\cdot\frac{3}{2\bar{\sigma}}(s_{ij}-s_{ij}^c) \times (ds_{ij}-ds_{ij}^c) \quad \dots\dots\dots(23)$$

したがって、式(12)よりつぎの塑性ひずみ増分が求められる。

$$-d\varepsilon_{ij}^p=B\left\{\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{Y(n)}}\right\}^{m(n)}\frac{3}{2\bar{\sigma}^2}(s_{ij}-s_{ij}^c) \times (s_{kl}-s_{kl}^c)(ds_{kl}-ds_{kl}^c) \quad \dots\dots\dots(24)$$

ただし、 $B=\frac{3}{2}K\frac{m(n)+1}{E}$

式(24)が Ramberg-Osgood 則形硬化材の塑性ひずみ増分を与える。式(21)より(22)を導く際 $\sigma_{Y(n)}, m(n)$ は定数として扱っているが、式(18)の $W^p-W_t^p$ がそれまで蓄積された塑性仕事であり、現段階ではその量により定められる $\sigma_{Y(n)}, m(n)$ を有すること、すなわち、各段階では、 $\sigma_{Y(n)}, m(n)$ は一定なることによる。相当応力は現段階で、 $\bar{\sigma}<\sigma_{Y(n)}$ なら、それまで蓄積された塑性ひずみを有していても除荷の状態にあり、

$$\bar{\sigma} < \sigma_{Y(n)} \text{ で, } d\bar{\epsilon}^p = d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

しかるに, $\bar{\sigma} > \sigma_{Y(n)}$ なら, 塑性変形の状態にあり, 新たに蓄積された塑性仕事 W^p により $\bar{\sigma}$ は負荷面上式(19)と同じ式で表示される値となる。つまり, 塑性仕事 $W^p - W^p$ を負荷履歴パラメータとして負荷面の膨張・収縮が次式で表示される。

$$\bar{\sigma} = \sigma_{Y(n)} \left\{ 1 \mp \alpha \exp \left(-\frac{W^p - W^p}{W_0} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

この場合, 負荷面の中心は式(17)で与えられるだけ移動する。なお, 式(26)を用いて, 式(17)を書き改めると次式となる。

$$\begin{aligned} ds_{ij}^e &= \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} (s_{ij} - s_{ij}^e) (s_{kl} - s_{kl}^e) ds_{kl} \\ &\mp \frac{2}{3} \sigma_{Y(n)}^2 \frac{\alpha}{W_0} \exp \left(-\frac{W^p - W^p}{W_0} \right) \\ &\times \left\{ 1 \mp \alpha \exp \left(-\frac{W^p - W^p}{W_0} \right) \right\} d\epsilon_{ij}^p \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

以上により, Ramberg-Osgood 則形硬化材に対し, 塑性ひずみ増分, 降伏面の中心移動は式(24), (26), (27)で与えられる。

4. 単軸状態への適用

一般に比例負荷の場合, 初期降伏面上の応力 $(\sigma_0)_{ij}$, 偏差応力 $(s_0)_{ij}$ とし現段階の応力成分は

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e = R \{ (\sigma_0)_{ij} - (\sigma_0^e)_{ij} \} \quad \dots\dots\dots (28 \cdot a)$$

$$s_{ij} - s_{ij}^e = R \{ (s_0)_{ij} - (s_0^e)_{ij} \} \quad \dots\dots\dots (28 \cdot b)$$

$$ds_{ij} - ds_{ij}^e = dR \{ (s_0)_{ij} - (s_0^e)_{ij} \} \quad \dots\dots\dots (28 \cdot c)$$

初期負荷面が焼なましされた状態にあるとすると,

$$(\sigma_0^e)_{ij} = (s_0^e)_{ij} = 0$$

なるがゆえに,

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e = R(\sigma_0)_{ij} \quad \dots\dots\dots (29 \cdot a)$$

$$s_{ij} - s_{ij}^e = R(s_0)_{ij} \quad \dots\dots\dots (29 \cdot b)$$

$$ds_{ij} - ds_{ij}^e = dR(s_0)_{ij} \quad \dots\dots\dots (29 \cdot c)$$

上式で $R=1$ までは材料の挙動は弾性であり, R が増加するにつれて式(24), (27)に従う塑性体となる。式(9)と(29・b)より

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} R^2 (s_0)_{ij} (s_0)_{ij}$$

となり, 初期負荷面上で,

$$\sigma_{Y(n)}^2 (1 \mp \alpha)^2 = \frac{3}{2} (s_0)_{ij} (s_0)_{ij}$$

となるから

$$\bar{\sigma}^2 = R^2 \sigma_{Y(n)}^2 (1 \mp \alpha)^2$$

したがって, 式(24)に式(29・b), (29・c)を代入し

$$d\epsilon_{ij}^p = B \left\{ \frac{R \sigma_{Y(n)} (1 \mp \alpha)}{\sigma_{Y(n)}} \right\}^{m(n)} \cdot (s_0)_{ij} dR \quad \dots\dots\dots (30)$$

単軸応力では初期負荷面上

$$(s_0)_t = \frac{3}{2} (\sigma_0)_t = \frac{2}{3} \sigma_{Y(n)} (1 \mp \alpha)$$

式(29・a)より,

$$\sigma_t - \sigma_t^e = R(\sigma_0)_t = R \sigma_{Y(n)} (1 \mp \alpha)$$

なるがゆえに,

$$d\epsilon_t^p = B \left\{ \frac{\sigma_t - \sigma_t^e}{\sigma_{Y(n)}} \right\}^{m(n)} \frac{2}{3} (d\sigma_t - d\sigma_t^e) \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで, 式(9)より単軸引張りでは, $\bar{\sigma} = \sigma_t - \sigma_t^e$ となるから, $d\epsilon^p = d\epsilon_t^p$, $\sigma = \bar{\sigma}$ とおき, 式(31)は

$$d\epsilon^p = B \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_{Y(n)}} \right\}^{m(n)} \frac{2}{3} d\sigma \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし,

$$B = \frac{3}{2} K \frac{m(n)+1}{E}$$

上式(32)は Drucker⁽¹¹⁾らの与えた式と一致する。同様にして, 負荷面の中心移動を求める。式(27)より,

$$\begin{aligned} d\sigma_t^e &= d\sigma_t \mp \sigma_{Y(n)}^2 \frac{\alpha}{W_0} \exp \left(-\frac{W^p - W^p}{W_0} \right) \\ &\times \left\{ 1 \mp \alpha \exp \left(-\frac{W^p - W^p}{W_0} \right) \right\} d\epsilon^p \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

式(32), (33)で $m(n), E, K$, したがって, B は実験より簡単に求められるが, これとは無関係に, $\alpha, W_0/\sigma_{Y(n)}, \beta, W_1/\sigma_{Y(n)}$ は決定できる。すなわち,

(1) 引張り方向に繰返し引張り・除荷を受ける場合 単軸引張りで降伏後除荷し, 無負荷の状態から再度引っ張るような負荷履歴を n 回受ける場合, n 回めの降伏応力 $\sigma_{Y(n)}$ は $n-1$ 回めの除荷時の応力と等しいとする。しかも, $\sigma_{Y(n)}$ は 0.2% の永久ひずみを生ずる応力とする。したがって, 式(18)で

$$\sigma_t - \sigma_t^e = \sigma_{Y(n)}, \epsilon_t - \epsilon_t^e - \frac{\sigma_{Y(n)}}{E} = \epsilon_t^p = 0.002$$

として,

$$K = 0.002 \frac{E}{\sigma_{Y(n)}}$$

と定められる。式(19)で $W^p = W^p$ より

$$\frac{\sigma_{Y(1)}}{\sigma_{Y(n)}} = 1 \mp \alpha$$

であるから, 式(19)に代入し, α を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_{Y(n)} - \sigma_{Y(n)} &= \{ \sigma_{Y(1)} - \sigma_{Y(n)} \} \exp \left(-\frac{W^p - W^p}{W_0} \right) \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$\sigma_{Y(n)}$ 曲線上の任意の A, B 回めの降伏応力 $\sigma_{Y(A)}, \sigma_{Y(B)}$, それらの点での塑性ひずみを $\epsilon_A^p, \epsilon_B^p$ として, それまでの塑性仕事は近似的に $\sigma_{Y(n)} \epsilon_A^p, \sigma_{Y(n)} \epsilon_B^p$ である。

$$\Delta \sigma_A = \sigma_{Y(n)} - \sigma_{Y(A)}, \Delta \sigma_B = \sigma_{Y(n)} - \sigma_{Y(B)},$$

$$\Delta \epsilon^p = \epsilon_B^p - \epsilon_A^p$$

とおくと、式(34)より

$$\frac{\Delta\sigma_B}{\Delta\sigma_A} = -\exp\left\{-\frac{\sigma_{Y(\infty)}}{W_0}\Delta\varepsilon^p\right\} \quad \dots\dots\dots(35)$$

上式より、 $W_0/\sigma_{Y(\infty)}$ を求め得るはずである。しかるに中心移動 $\sigma_{Y(n)}$ が前もっては未知であるから、中心移動が零として求めた $\sigma_{Y(n)}$ を用いて W_0, α の第1近似値を算定する。

除荷せずに単に引張り方向に負荷する場合、前履歴がなければ、式(18)で $\sigma_i=0$ の通例のRamberg-Osgood則となり、パラメータ m を定めることができ、応力-ひずみ関係を表示できる。その際の中心移動は降伏点を越えると負荷面が引張り方向に移動するだけ移動する。つまり、式(19)で $\alpha=0$ である。負荷を途中で止め除荷後再負荷する場合、後の実験に示すように繰返し負荷曲線が単に引張り方向に負荷した時の応力-ひずみ曲線に一致するから、 $\sigma_{Y(\infty)}$ を逐次変えながら $\mp\alpha=1-\sigma_{Y(1)}/\sigma_{Y(\infty)}$ より α を定め、式(18)、(19)より求めた応力-ひずみの曲線が途中除荷のない引張応力-ひずみ曲線と一致するようにする。一致した時の各繰返しのパラメータ m の値に合うように式(20)の $m_{(\infty)}, \beta, W_1$ を調整するとよい。

(2) 引張り・圧縮の繰返し負荷の場合 この場合も引張り方向に繰返し引張り・除荷を受ける場合と同様に中心の移動は前もって未知のため、1回め、 n 回め、安定時ループ端応力 $\sigma_{(1)}, \sigma_{(n)}, \sigma_{(\infty)}$ を用いて式(34)の代わりに

$$\sigma_{(n)} - \sigma_{(\infty)} = \{\sigma_{(1)} - \sigma_{(\infty)}\} \exp\left(-\frac{W^p - W_1^p}{W_0}\right) \quad \dots\dots\dots(36)$$

繰返し負荷の任意の2曲線の端点A, Bでの繰返し数を n_A, n_B とし、1サイクルの塑性ひずみの範囲を $\Delta\varepsilon^p$ とすると点A, Bでの塑性仕事は近似的にそれぞれ $2\sigma_{(\infty)}n_A\Delta\varepsilon^p, 2\sigma_{(\infty)}n_B\Delta\varepsilon^p$ である。それゆえ、

$$n = n_B - n_A, \quad \Delta\sigma_A = \sigma_{(\infty)} - \sigma_{(A)}, \quad \Delta\sigma_B = \sigma_{(\infty)} - \sigma_{(B)}$$

とおくと式(36)より

$$\frac{\Delta\sigma_B}{\Delta\sigma_A} = \exp\left\{-\frac{2\sigma_{(\infty)}n\Delta\varepsilon^p}{W_0}\right\} \quad \dots\dots\dots(37)$$

上式より W_0 を求める。ついで、 $\mp\alpha=1-\sigma_{Y(1)}/\sigma_{Y(\infty)}$ で $\sigma_{Y(\infty)}$ を逐次仮定し、 α を算定の上、ループを描かせて、実験結果と比較してよく合う値を選ぶ。その時の各ループの m の値から式(20)に合うように $m_{(\infty)}, \beta, W_1$ を調整する。

5. 実験結果との比較と検討

本理論の妥当性を検討するため、常温での304ステンレス鋼円管を用い引張り方向繰返し負荷と引張り・

圧縮の繰返し負荷の実験を行った。

試験片供試材は、1080°Cで固溶体化処理された304ステンレス鋼の円管であり、その化学成分は、C(0.06%), Si(0.35%), Mn(1.79%), P(0.036%), S(0.003%), Ni(8.68%), Cr(18.31%)である。試験片は、この円管から精密に仕上げた外径24mm、内径20mm、ゲージ長さ80mmの薄肉円管試験片である。実験装置はペンジュラム式組合せ応力試験機(三精工業製)であり、変位の検出は除荷時が純粋に弾性変形のための単軸引張り繰返し負荷の場合には差動変位計を用い、除荷時に負荷時と逆な塑性変形を生ずる引張り・圧縮繰返し負荷の場合にはひずみゲージ(共和電業製KFD-2-C1-16)を用いた。なお、この材料の縦弾性係数 $E=196\text{GPa}\{20\,000\text{kgf/mm}^2\}$ である。

5・1 引張り方向繰返し引張り・除荷 図1は単軸引張りで降伏後除荷し、無負荷の状態から、ひずみ幅が1%まで再負荷を行う繰返し負荷の際の応力-ひずみ関係を示す。つまり、この負荷履歴では除荷時には純粋な弾性変形のみである。この応力-ひずみ曲線は途中で除荷の行われない単軸引張りの応力-ひずみ曲線と一致していた。この場合、式(19)の $\sigma_{Y(\infty)}, \alpha, W_0$ の値はそれぞれ $\sigma_{Y(\infty)}=314\text{MPa}\{32\text{kgf/mm}^2\}$, $\alpha=0.094$, $W_0/\sigma_{Y(\infty)}=0.059$ 、式(20)の $m_{(\infty)}, \beta, W_1$ の値は $m_{(\infty)}=32, \beta=0.772, W_1/\sigma_{Y(\infty)}=0.016$ である。以上の材料定数を用いて、式(32)より算定した塑性ひずみ増分を逐次加え合わせて求めた応力-ひずみ曲線を図2に実線で示してある。また、式(33)より求めた負荷面の中心移動を破線で示す。なお実線で示した引張り・除荷曲線は移動した負荷面の中心までを表示している。図2に示す一点鎖線は途中で除荷することなく引張った時の応力-ひずみ曲線であり、式(18)で $m_{(n)}=7.3, \sigma_{Y(n)}=284\text{MPa}\{29\text{kgf/mm}^2\}$, $\sigma_i=0$, $K=0.002(E/\sigma_{Y(n)})$ とした計算結果である。その時の負荷面の中心移動は式(33)で $\alpha=0$ として求め、図2に二点鎖線で示す。除荷なしで単に引張る時の応力-ひずみ曲線(一点鎖線)と引張り除荷の繰返し負荷曲線(実線)はよく一致し、それらは図1に示す実験結果とも一致している。また、それぞれの負荷面の中心移動(二点鎖線と破線)もよく一致している。

5・2 引張り・圧縮の繰返し負荷 図3は引張り圧縮での一定ひずみ振幅の繰返し負荷実験結果を示す。繰返し全ひずみ振幅は $\Delta\varepsilon=0.022$ である。7サイクルではほぼ安定な状態になる。この実験結果に合うように定めた式(19)の材料定数は、 $\sigma_{Y(\infty)}=353\text{MPa}\{36\text{kgf/mm}^2\}$, $\alpha=0.194$, $W_0/\sigma_{Y(\infty)}=0.073$ である。パラメータ $m_{(n)}$ は実験結果の各ループ端に一致するように定め

た、式(20)の材料定数は $m_{(\infty)}=4.5$, $\beta=0.0933$, $W_1/\sigma_{Y(\infty)}=0.0388$ である。これらの材料定数を用いて式(32)により算定した負荷曲線を図4に実線で、式(33)により算定した負荷面の中心移動を σ^c で示す実線により表示している。計算に際し、応力増分 $d\sigma$ を 4.8 MPa [0.5 kgf/mm^2] とし、塑性ひずみ増分、負荷面の中心移動の増分を求め、それぞれのそれまでの総和をとった。このようにして求めた負荷曲線は、求めた中心移動 σ^c を始点として各ループに式(18)の Ramberg-Osgood 則を当てはめて求めた曲線と一致した。

図5は各ループでの降伏応力 $\sigma_{Y(n)}$ とパラメータ $m_{(n)}$ と塑性仕事 $W^p/\sigma_{Y(\infty)}=\epsilon^p$ の関係を示すために横軸に塑性ひずみの総和 $\int |d\epsilon^p|$, 縦軸に σ_Y と m をとって示してある。図で一点鎖線、実験は σ_Y, m の理論値であり、前述の材料定数より式(19), (20)で計算された値である。黒丸、白丸印は各ループで計算された中心移動 σ_f を始点として図3に示す実験データから求

図1 引張り方向繰返し負荷 (実験)

図2 引張り方向繰返し負荷 (計算)

図3 引張り・圧縮繰返し負荷 (実験)

図4 引張り・圧縮繰返し負荷 (計算)

図5 降伏応力 σ_Y , 硬化・軟化パラメータ m

めた σ_Y と, ループ端を通るように求めた Ramberg-Osgood 則の m の値を示す。図より, 式(19), (20)で σ_Y, m がよく表示されることがわかる。

6. 結 言

本報では繰返し硬化 (あるいは軟化) 材の塑性流れについて研究した。すなわち, 一般的な繰返し負荷を受ける材料の塑性流れ則を示し, さらに, 負荷面の中心移動を考慮して修正した Ramberg-Osgood 則を用いて表示した。その際, 降伏応力, 硬化・軟化パラメータを塑性仕事の関数とした。

提案した理論より計算して求めた引張り方向の繰返

し負荷, 一定ひずみ振幅の繰返し負荷での応力-ひずみ関係は SUS304 材を用いた実験結果とよく一致した。さらに複雑な負荷への本理論の適用性については, 詳細な実験検証のうえ, 別報にて報告する。なお, 本研究の主な内容は, 著者が西独 München 工科大学に滞在中に行った研究成果であり, 同大学 Lippmann 教授と Alexander von Humboldt 財団に深く感謝の意を表します。

文 献

- (1) Prager, W., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **23** (1956), 493.
- (2) Ziegler, H., *Q. Appl. Math.*, **17** (1959), 55.
- (3) Mróz, J., *J. Mech. Phys. Solids*, **15** (1967), 163.
- (4) Besseling, J. F., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **25** (1958), 529.
- (5) Dafalias, Y. T. and Popov, E. P., *Trans. ASME, Ser. E*, **43-4** (1976), 645.
- (6) Krieg, R. D., *Trans. ASME, Ser. E*, **42-4** (1975), 641.
- (7) Hanhiguchi, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **48** (1981), 297.
- (8) Shiratori, E., ほか 2 名 *J. Mech. Phys. Solids*, **27** (1979), 213.
- (9) Ohno, N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **49** (1982), 721.
- (10) Chaboche, J. L. ほか 3 名 (Hult, J. and Lemaitre, J. 編), *Proc. IUTAM Symp. Phys. Non-Lineariti. Struct. Anal.*, (1980), 37.
- (11) Drucker, D. C. and Palgen, L., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **48** (1981), 479.
- (12) Ramberg, W. and Osgood, W., *NACA* 902 (1943)
- (13) Eisenberg, M. A., *Trans. ASME, Ser. H*, **98-3** (1976), 221.

討 論

〔質問〕 大野 信 忠〔豊橋技術科学大学〕

(1) 繰返し負荷を受ける構造部材の解析では, ひずみ振幅 (あるいは応力振幅) は一般に部材内の場所によって異なり, しかもその分布を前もって知ることはできない。このため, このような解析に用いるための構成式は, 特定のひずみ振幅に対するものではなく, ある範囲のひずみ振幅に対して妥当なものでなければならない。さて, 貴論文の構成式をみると, 材料定数の値は, ひずみ振幅あるいは負荷形成によって変わるようである (事実, 図1と3の実験結果に対する材料定数の値は異なっている)。このような材料定数の値の変化を, 系統的に表現することは可能か。もし可能であれば, その方法をご教示願いたい。

(2) 貴論文の独創性は, Eisenberg のモデル⁽¹³⁾と比較した場合, 負荷面の中心の移動を考慮したことに

付図 1

あると思われる。これによって、どのような点が著しく改良されたのか。

〔回答〕 (1) 三つのひずみ振幅で繰返し負荷実験を行い、材料定数のひずみ振幅に対する値の変化を簡単な式で系統的に表示することは可能である。さらに、その式を用いて、種々の負荷履歴に対する繰返し塑性の研究を機械学会第61期通常総会で論文講演させていただくことになったので、ご検討いただけると幸いである。

(2) 従来の繰返し塑性の研究において、負荷面の中心移動 σ_{ij}^3 が構成式に含まれているにもかかわらず、これが塑性内部変数で実験で求められないから、負荷面の中心移動を求めている研究はほとんどない。Eisenberg も中心移動を求められず、付図1で焼

なましされた状態0から負荷を受けOABと経てB点から除荷され、応力点がBCD内にある場合、さらに除荷されてBCDEと経る時にRamberg-Osgood則を点Bより適用している。しかし、除荷でなく再負荷される時にはRamberg-Osgood則の適用開始点をBCD上で定めることはできない。いずれにしろ理論に整合性を欠く。本研究では、BCD内の負荷面の中心位置Cが既知のため除荷であろうと再負荷であろうと常にC点がRamberg-Osgood則の適用開始点となり、論理的である。したがって、繰返し負荷を受ける構造部材の応力解析のため、本論文で提案した繰返し塑性の理論をプログラムに組み込むことが容易となる。なお、付図1で実線と1点鎖線は負荷、除荷、再負荷を示し、破線は負荷面の中心移動を示す。