剛体パンチを接着された半無限弾性体の接触問題*

渋谷 寿一**, 小 泉 堯**

The Contact problem of an Elastic Half Space Adhered by a Rigid Punch

by Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

A contact problem of an elastic half space adhered by a rigid punch under tension is considered on the basis of the three-dimensional theory of elasticity. The behaviour of the adhesion is approximated by a combination of tension and shear springs. The normal and shearing stresses on the adhesive plane of the half space are expressed by Jacobian polynomials. This mixed boundary value problem is reduced to solve two infinite systems of simultaneous equations. The distributions of stresses and displacements on the surface of the half space are illustrated in various cases of the adhesion. The affection of the adhesion on these results is investigated in detail.

Key Words: Elasticity, Axisymmetric Stress, Contact Stress, Mixed Boundary Value Problem, Integral Equation, Half Space, Punch, Adhesion

1. 緒 言

円形剛体パンチを半無限弾性体の表面に押し付けるとき、接触応力は縁で無限大になることが理論的に得られている。これはパンチを完全な剛体とすることによるものであり、実際には端面が多少とも変形するために接触縁の応力は有限になると考えられ、この効果はパンチ端面に薄い弾性層を挿入することによって近似的に調べられる。これは接着層を有する構造に相当し、接着理論あるいは複合材料の強度評価に関連する分野において取扱われている。Lindsey ら⁽¹⁾は二つの剛体円柱の端面を接着し、接着層の変位成分を仮定して接着面の応力分布を得ており、同じ場合を有限要素法を用いて調べた報告⁽²⁾もある。Erdogan ら⁽³⁾は2枚の板の端面の一部が接着されている場合に、接着層の挙動をばねでモデル化し、接着面の応力を平面弾性理論に基づいて解析している。また、最近では、接触問題を有限要素法を用いて解析する際に、接触面に接触要素を挿入する方法が考えられているが、この場合には、接触要素が結果に与える影響を十分に明らかにし

ておくことが必要である。

そこで、立体問題においてパンチ端面に薄い弾性層を挿入する効果を明らかにするために、本研究では半無限弾性体表面に接着された円形剛体パンチが引張りを受ける場合の接着面の変形や応力を三次元弾性理論に基づいて解析した。接着層の挙動はErdogan らの研究と同様に引張りおよびせん断を受けるばねでモデル化された。接着面の応力はヤコビの多項式を用いて一般的に表示され、この混合境界値問題は無限連立一次方程式を解く問題に帰着された。数値計算により変位や応力成分を求めるとともに、これらに及ぼす接着層の大きさや材料定数の影響を詳細に検討した。

2. 応 力 解 析

図1のように、厚さ h の接着層で半無限弾性体 ($z \geq 0$) の表面に接着された半径 a の円形剛体パンチが合力 P で引張りを受け、 ϵ_0 の変位を生ずる場合を考える ($\epsilon_0 \ll h$)。接着層の挙動は引張りおよびせん断を受けるばね要素で近似される。すなわち、一様応力 p を受けるときの伸びを ϵ 、せん断応力 q によるせん断変形を δ とするとき、接着層はそれぞれ単軸状態で変形するとし

* 昭和58年11月28日 第923回講演会において講演、原稿受付 昭和58年5月25日。

** 正員、東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

$$p = E_a \frac{\epsilon}{h}, \quad q = G_a \frac{\delta}{h}$$

あるいは

$$p = k_\sigma \epsilon, \quad q = k_\tau \delta \dots \dots \dots (1)$$

ここで, E_a , G_a , ν_a は接着層の縦弾性係数, 横弾性係数, ポアソン比で, k_σ と k_τ は

$$\left. \begin{aligned} k_\sigma &= \frac{E_a}{h} = \frac{2(1+\nu_a)G_a}{h} = 2(1+\nu_a)k_\tau \\ k_\tau &= \frac{G_a}{h} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

で表される。半無限体の接着面の応力 $(\sigma_z)_{z=0}$ と $(\tau_{rz})_{z=0}$ は接着層のそれに等しいから, 半無限体の境界条件は次のようになる。

$z=0$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= k_\sigma(\epsilon_0 + w_z), \quad (r \leq a) \\ \tau_{rz} &= k_\tau u_r, \quad (r \leq a) \\ \sigma_z &= \tau_{rz} = 0, \quad (r > a) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3 \cdot a)$$

$z \rightarrow \infty$:

$$\text{すべての応力} = 0 \dots \dots \dots (3 \cdot b)$$

ねじりなし軸対称応力状態における Boussinesq の応力関数 $\varphi_0(r, z)$ と $\varphi_3(r, z)$ を

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= -\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \{ (1-2\nu)f(\lambda) \\ &\quad - 2(1-\nu)g(\lambda) \} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\ \varphi_3 &= \int_0^\infty \{ f(\lambda) - g(\lambda) \} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

とおけば, $z \rightarrow \infty$ の境界条件を満足し, $z=0$ の変位と応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} 2G(u_r)_{z=0} &= \int_0^\infty \{ (1-2\nu)f(\lambda) \\ &\quad - 2(1-\nu)g(\lambda) \} J_1(\lambda r) d\lambda \\ 2G(w_z)_{z=0} &= -\int_0^\infty \{ 2(1-\nu)f(\lambda) \\ &\quad - (1-2\nu)g(\lambda) \} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

図 1 半無限体に接着された円形剛体パンチ

$$(\sigma_z)_{z=0} = \int_0^\infty \lambda f(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$(\tau_{rz})_{z=0} = \int_0^\infty \lambda g(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \dots \dots \dots (5)$$

ここで, G , ν は半無限体の横弾性係数, ポアソン比, $J_n(\lambda r)$ は n 次の第 1 種ベッセル関数, $f(\lambda)$ と $g(\lambda)$ は λ のみに関する未知関数である。半径 a を用いて無次元化し

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad \xi = a\lambda, \quad \beta = \frac{aG_a}{hG} \\ f^*(\xi) &= f\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad g^* = g\left(\frac{\xi}{a}\right) \\ k_{11} &= \frac{1-\nu}{G} k_\sigma a = 2(1-\nu)(1+\nu_a)\beta \\ k_{12} &= -\frac{1-2\nu}{2G} k_\sigma a = -(1-2\nu)(1+\nu_a)\beta \\ k_{21} &= -\frac{1-2\nu}{2G} k_\tau a = -\frac{1-2\nu}{2}\beta \\ k_{22} &= \frac{1-\nu}{G} k_\tau a = (1-\nu)\beta \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

とおけば, 境界条件式 (3・a) から $f^*(\xi)$ と $g^*(\xi)$ に関する次の連立積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \{ (\xi + k_{11})f^*(\xi) + k_{12}g^*(\xi) \} J_0(\xi\rho) d\xi \\ &= k_\sigma \epsilon_0 a^2, \quad (|\rho| \leq 1) \\ \int_0^\infty \{ k_{21}f^*(\xi) + (\xi + k_{22})g^*(\xi) \} J_1(\xi\rho) d\xi \\ &= 0, \quad (|\rho| \leq 1) \\ \int_0^\infty \xi f^*(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi &= 0, \quad (|\rho| > 1) \\ \int_0^\infty \xi g^*(\xi) J_1(\xi\rho) d\xi &= 0, \quad (|\rho| > 1) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

接着面の応力 $(\sigma_z)_{z=0}$ と $(\tau_{rz})_{z=0}$ はそれぞれ変位 $(w_z)_{z=0}$ と $(u_r)_{z=0}$ を用いて表されるから, 物理的に無限大にならず有限かつ連続で, $\rho \rightarrow 1-0$ では一般に零にならない。いま, 積分公式⁽⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty J_{2n+1}(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi \\ &= \begin{cases} G_n(1, 1; \rho^2), & (|\rho| \leq 1) \\ 0, & (|\rho| > 1) \end{cases} \\ \int_0^\infty J_{2n+2}(\xi) J_1(\xi\rho) d\xi \\ &= \begin{cases} (n+1)\rho G_n(2, 2; \rho^2), & (|\rho| \leq 1) \\ 0, & (|\rho| > 1) \end{cases} \\ &(n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

を考慮して未知関数 $f^*(\xi)$ と $g^*(\xi)$ を

$$\left. \begin{aligned} \xi f^*(\xi) &= k_\sigma \epsilon_0 a^2 \sum_{n=0}^\infty a_n J_{2n+1}(\xi) \\ \xi g^*(\xi) &= k_\sigma \epsilon_0 a^2 \sum_{n=0}^\infty b_n J_{2n+2}(\xi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

とおけば、半無限体表面の変位と応力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2G(u_r)_{z=0} &= k\sigma\epsilon_0 a \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ (1-2\nu)a_n \frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi} - 2(1-\nu)b_n \frac{J_{2n+2}(\xi)}{\xi} \right\} J_1(\xi\rho) d\xi \\ 2G(w_z)_{z=0} &= -k\sigma\epsilon_0 a \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ 2(1-\nu)a_n \frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi} - (1-2\nu)b_n \frac{J_{2n+2}(\xi)}{\xi} \right\} J_0(\xi\rho) d\xi \\ (\sigma_z)_{z=0} &= k\sigma\epsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n(1, 1; \rho^2) H(1-\rho) \\ (\tau_{rz})_{z=0} &= k\sigma\epsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_n \rho G_n(2, 2; \rho^2) H(1-\rho) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $G_n(\alpha, \gamma; t)$ はヤコビの多項式で

$$G_n(\alpha, \gamma; t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\alpha+n+k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+k)} t^k$$

$$G_0(\alpha, \gamma; t) = 1, \quad G_n(\alpha, \gamma; 0) = 1, \quad G_n(\alpha, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\alpha+n)} \quad (\neq 0)$$

であり、 $H(x)$ はヘビサイドのステップ関数である [ここでは、 $H(x)=1, (x \geq 0)$; $H(x)=0, (x < 0)$ として用いている]。式(10)の $(\sigma_z)_{z=0}$ と $(\tau_{rz})_{z=0}$ は任意の a_n と b_n に対して $|\rho| > 1$ の条件を満足しており、かつ、 $\rho \rightarrow 1-0$ で0にはならない。式(7)の残りの条件 ($|\rho| \leq 1$ の条件) は式(10)を用いれば次のように書き替えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ (\xi+k_{11}) \frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi} a_n + k_{12} \frac{J_{2n+2}(\xi)}{\xi} b_n \right\} J_0(\xi\rho) d\xi &= 1, \quad (|\rho| \leq 1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ k_{21} \frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi} a_n + (\xi+k_{22}) \frac{J_{2n+2}(\xi)}{\xi} b_n \right\} J_1(\xi\rho) d\xi &= 0, \quad (|\rho| \leq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

本問題は式(11)を満足する係数 a_n と b_n を定める問題になる。ヤコビの多項式の直交性⁽⁴⁾

$$\int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\gamma} G_n(\alpha, \gamma; t) G_m(\alpha, \gamma; t) dt = \frac{m! \Gamma(m+\alpha-\gamma+1) \{\Gamma(\gamma)\}^2}{(\alpha+2m) \Gamma(\alpha+m) \Gamma(\gamma+m)} \delta_{mn} \dots\dots\dots (12)$$

および、式(8)のハンケル逆変換

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \rho G_n(1, 1; \rho^2) J_0(\xi\rho) d\rho &= \frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi} \\ \int_0^1 (n+1) \rho^2 G_n(2, 2; \rho^2) J_1(\xi\rho) d\rho &= \frac{J_{2n+2}(\xi)}{\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

を考慮して、式(11)の第1式の両辺に $\rho G_m(1, 1; \rho^2)$ を第2式の両辺に $(m+1) \rho^2 G_m(2, 2; \rho^2)$ を乗じ、それぞれ $\rho=0 \sim 1$ で積分すれば、式(11)は次のような a_n と b_n に関する無限連立一次方程式に書き替えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ (\xi+k_{11}) \frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi} \frac{J_{2m+1}(\xi)}{\xi} a_n + k_{12} \frac{J_{2n+2}(\xi)}{\xi} \frac{J_{2m+1}(\xi)}{\xi} b_n \right\} d\xi &= \frac{\delta_{0m}}{2(2m+1)}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ k_{21} \frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi} \frac{J_{2m+2}(\xi)}{\xi} a_n + (\xi+k_{22}) \frac{J_{2n+2}(\xi)}{\xi} \frac{J_{2m+2}(\xi)}{\xi} b_n \right\} d\xi &= 0, \end{aligned} \right\} (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 δ_{mn} はクロネッカ・デルタである。式(14)を解いて a_n と b_n を定めれば、半無限体表面の変位と応力は式(10)から求められる。合力 P は

$$P = \int_0^a 2\pi r (\sigma_z)_{z=0} dr = \pi a^2 k\sigma\epsilon_0 a_0 \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。

接着層のせん断変形による影響を無視する場合には、 $k_r=0$ 、すなわち、 $k_{21}=k_{22}=0$ 、 $b_n=0$ とおけばよく、式(14)の第2式はつねに成立し、第1式から a_n を定めれば、変位、応力および合力は式(10)と(15)によって与えられる。

なお、接着層がなく、密着された剛体パンチが引張りを受ける場合の理解論は⁽⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{G(w_z)_{z=0}}{1-\nu} &= -\frac{P}{\pi a} \frac{\sinh \pi \alpha}{2\pi \alpha} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} \cos\left(\alpha \ln \frac{a+x}{a-x}\right) dx, \quad (r \geq a) \\ (\sigma_z)_{z=0} &= \frac{P}{\pi a} \frac{\sinh \pi \alpha}{2\pi \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \cos\left(\alpha \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-r^2}} H(x-r)\right\} dx, \quad (r < a) \\ (\tau_{rz})_{z=0} &= -\frac{P}{\pi a} \frac{\sinh \pi \alpha}{2\pi \alpha} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \sin\left(\alpha \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \frac{H(x-r)}{\sqrt{x^2-r^2}} dx, \quad (r < a) \\ \frac{G\varepsilon_0}{1-\nu} &= \frac{P}{\pi a} \frac{\sinh \pi \alpha}{2\pi \alpha} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cos\left(\alpha \ln \frac{a+x}{a-x}\right) dx \\ 2\pi \alpha &= \ln(3-4\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

である。また、接着層がないなめらかな剛体パンチの場合の理論解は⁽⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{(w_z)_{z=0}}{\varepsilon_0} &= \begin{cases} -1 & (\rho \leq 1) \\ -\frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{\rho}, & (\rho \geq 1) \end{cases} \\ \frac{a(\sigma_z)_{z=0}}{G\varepsilon_0} &= \frac{1}{\pi(1-\nu)} \frac{H(1-\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad \frac{P}{\pi a^2} = \frac{2}{\pi(1-\nu)} \frac{G\varepsilon_0}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。

3. 数 値 結 果

無限連立一次方程式(14)を解くためには、まず、その係数であるベッセル関数を含む無限積分を求めなければならない。ベッセル関数に関する公式⁽⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} J_k(\xi \rho) d\xi &= \frac{1}{k}, \quad (\rho > 0, k > 0) \\ J_m(\xi) J_n(\xi) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{m+n}(2\xi \cos \phi) \cos\{(m-n)\phi\} d\phi, \quad (m+n > -1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} J_m(\xi) J_n(\xi) d\xi &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\{(m-n)\phi\} d\phi \int_0^\infty \frac{J_{m+n}(2\xi \cos \phi)}{\xi} d\xi = \frac{C(m-n)}{m+n}, \quad (m+n > 0) \\ \int_0^\infty \frac{1}{\xi^2} J_m(\xi) J_n(\xi) d\xi &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \phi \cos\{(m-n)\phi\}}{m+n} d\phi \int_0^\infty \left\{ \frac{J_{m+n+1}(2\xi \cos \phi)}{\xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{J_{m+n-1}(2\xi \cos \phi)}{\xi} \right\} d\xi = \frac{C(m-n+1) + C(m-n-1)}{(m+n+1)(m+n-1)}, \quad (m+n > 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

ここで

$$C(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos k\phi d\phi = \begin{cases} 1, & (k=0) \\ \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right), & (k \neq 0) \end{cases}$$

である。したがって、無限連立一次方程式の係数はすべて閉じた式で表せる。

接着面($z=0$, $\rho \leq 1$)では、境界条件式(3・a)から、式(10)の第3式と第4式から直接求めた $(\sigma_z)_{z=0}$ と $(\tau_{rz})_{z=0}$ と、第1式と第2式から得た $(u_r)_{z=0}$ と $(w_z)_{z=0}$ を用いて求めた $(\sigma_z)_{z=0}$ と $(\tau_{rz})_{z=0}$ がそれぞれ十分に一致しなければならない。この条件を満足するように無限連立一次方程式を有限項で打ち切って a_n と b_n を求め、これらにもとづいて半無限体表面の変位分布と応力分布を計算した。 β が大きくなるとともに a_n と b_n の収束は遅くなり、打ち切り項数を増加させる必要があるけれども、 $\beta \leq 10$ ならば a_n , b_n ともそれぞれ約10項で十分であった。なお、以下の結果においては、半無限体のポアソン比は $\nu=0.3$ で一定

とした。

図2と3は $\nu_a=0.49$ で一定とし、一定の変位量 ε_0 を受けるときの半無限体表面の変位と応力の半径方向分布を示したもので、図中の一点鎖線は接着層がないなめらかな剛体パンチの結果式(17)である。変位 $(u_r)_{z=0}$ はつねに正で、半径方向変位は原点から遠ざかる方向に変位する。 $(u_r)_{z=0}$ は $r \leq a$ では r とともに増加して $r=a$ で最大になり、 $r > a$ では r とともに減少して0に漸近する。その最大値は β とともに増大する傾向があるけれども、変位量 ε_0 の10%以下である。変位 $(w_z)_{z=0}$ はつねに負で、原点で最大値をとり、 r とともに減少して0に近づく。 β が小さければ接着面の内外における $(w_z)_{z=0}$ の変化は小さくなめらかな分布になる。 β が大きくなると、 $(w_z)_{z=0}$ は接着層

表 1 セン断変形の影響 ($\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$)

β	$(\tau_{rz})_{z=0} \neq 0$				$(\tau_{rz})_{z=0} = 0$		
	$(w_z)_{z=0, r=0}$	$a(\sigma_z)_{z=0, r=0}$	$a(\tau_{rz})_{z=0, r=0}$	P	$(w_z)_{z=0, r=0}$	$a(\sigma_z)_{z=0, r=0}$	P
	ϵ_0	$G\epsilon_0$	$G\epsilon_0$	$G\epsilon_0 a$	ϵ_0	$G\epsilon_0$	$G\epsilon_0 a$
0.1	-0.1920	0.2641	0.0025	0.7957	-0.1922	0.2641	0.7956
0.5	-0.5328	0.9512	0.0372	2.4985	-0.5348	0.9519	2.4944
1.0	-0.6990	1.4822	0.0966	3.4288	-0.7023	1.4865	3.4159
2.0	-0.8238	2.1892	0.2185	4.2403	-0.8280	2.2081	4.2100
5.0	-0.9149	3.4717	0.5387	4.9955	-0.9183	3.5583	4.9319
10.0	-0.9466	4.7711	0.9643	5.3478	-0.9490	4.9841	5.2579

図 2 半無限体表面の変位分布 ($\epsilon_0 = \text{一定}$) 図 3 半無限体表面の応力分布 ($\epsilon_0 = \text{一定}$) 図 4 半無限体表面の応力分布 ($P = \text{一定}$)

図5 ポアソン比 ν_a が変位分布に及ぼす影響 図6 ポアソン比 ν_a が応力分布に及ぼす影響 図7 ポアソン比 ν_a による影響 図8 β による影響 (ϵ_0 = 一定) 図9 β による影響 (P = 一定)

の影響を受けて全体的に大きくなり、接着層がないためらかな剛体パンチの結果に近づく。 $(w_z)_{z=0}$ は $(u_r)_{z=0}$ に比してかなり大きいから、半無限体表面の変形は $(w_z)_{z=0}$ の分布でほぼ表されるとして差しつかえない。

応力 $(\sigma_z)_{z=0}$ はつねに正で、原点で最小であり、 r とともに単調に増加して、接着縁 $r=a$ で最大になる。 β が小さければ、この傾向は小さくほぼ一様分布であるが、 β が大きくなるとともにこの分布の傾向は顕著になる。 β が大きくなれば $(\sigma_z)_{z=0}$ は全体的に大きくなり、これは $\epsilon_0 = \text{一定}$ のとき合力 $P/Ga\epsilon_0$ も大きくなるためである。せん断応力 $(\tau_{rz})_{z=0}$ はつねに正で、表面に沿って原点に向かう方向に生じ、 r とともに増加して $r+a$ で最大になる。 $(\tau_{rz})_{z=0}$ は全体的に $(\sigma_z)_{z=0}$ に比して小さい。

図4は図3と同じ場合を平均応力 $\sigma_n + P/\pi a^2$ で無次元化して示したもので、合力が一定の場合の結果を表している。図中の一点鎖線は接着層がないためらかな剛体パンチの結果を、二点鎖線は $(\sigma_z)_{z=0} = \sigma_n$ 、(等分布荷重)の結果である。応力の分布の傾向は図3と同様であるけれども、合力=一定であるために、剛体パンチによる結果との関係がめいりようになる。すなわち、 β が小さければ $(\sigma_z)_{z=0}$ はほぼ等分布荷重の結果に等しく、 β が大きくなるとともに $(\sigma_z)_{z=0, r=0}$ は減少し、 $(\sigma_z)_{z=0, r=a}$ は逆に増大してためらかな剛体パンチの結果に近づく傾向がある。図2～4の結果から明らかに、接着層が存在する場合の $(w_z)_{z=0}$ や $(\sigma_z)_{z=0}$ は β に強く影響されるから、複合材料など接着層内の欠陥などの強度を論ずるときには、特に β の大きさに留意する必要がある。

表1は接着層のせん断変形を考慮した場合としない場合の表面の変位や応力の最大値および $P/Ga\epsilon_0$ を比較したものである。これによれば、 $-(w_z)_{z=0, r=0}/\epsilon_0$ と $a(\sigma_z)_{z=0, r=a}/G\epsilon_0$ はせん断変形を考慮した場合にやや小さく、 $P/Ga\epsilon_0$ はその逆になっているが、その差はわずかである。したがって、接着層のせん断変形がこれらの値に与える影響は小さいと考えられる。

図5と6は $\nu=0.3$, $\beta=1.0$ の場合に、 $\nu_a=0.03$, 0.49のときの変位、応力分布である。変位 $(w_z)_{z=0}/\epsilon_0$ と $(u_r)_{z=0}/\epsilon_0$ は ν_a が大きくなるとともに増加する傾向があるけれども、その影響は β によるもののほど大きくはない。応力 $(\sigma_z)_{z=0}/\sigma_n$ は ν_a が大きくなるとわずかに分布のこう配が増加するが、ほぼ一致すると考えて差しつかえない。せん断応力 $(\tau_{rz})_{z=0}/\sigma_n$ はいずれの ν_a の場合にもほとんど一致した。

図7は変位や応力の代表的な位置の値および $P/$

$Ga\epsilon_0$ に及ぼすポアソン比 ν_a の影響を示したものである。これらの値はいずれも ν_a とともにほぼ直線状に増大することがわかる。したがって、 $\nu_a=0$ と 0.5の結果のみを求めておけば、任意の ν_a に対する値は近似的に比例配分によって定められる。

図8は変位量 $\epsilon_0 = \text{一定}$ のときに、代表的な位置の変位、応力の値および $P/Ga\epsilon_0$ に与える β の影響を示したものである。 $P/Ga\epsilon_0$ と $(w_z)_{z=0, r=a}/\epsilon_0$ は $\beta < 5$ では β とともに急激に増加するけれども、 $\beta > 5$ では増加の割合が小さくなる。 $(\sigma_z, \tau_{rz})_{z=0, r=a}/G\epsilon_0$ は β とともにほぼ直線状に増加する。

図9は合力 $P = \text{一定}$ のときに、代表的な位置の変位、応力および変位量 ϵ_0 に与える β の影響を示したものである。応力は β とともに増大するが、 $(w_z)_{z=0, r=0}$ と ϵ_0 は逆に減少し、変位量 ϵ_0 は同一の合力では接着層の剛性が増大するとともに小さくなることを示している。

4. 結 言

円形剛体パンチの端面が半無限弾性体に接着された場合の応力解析を行い、半無限体表面の変位、応力分布を求め、これらに及ぼす接着層の影響を明らかにした。得られた結果をまとめると次のとおりである。

(1) 変位や応力は $\beta (= aGa/hG)$ に強く影響され、 β が小さければ等分布荷重の結果にほぼ一致し、 β が大きくなるとともに接着層がないためらかな剛体パンチの結果に近づく。

(2) 最大応力 $(\sigma_z)_{z=0, r=a}$ は有限値で β とともに増大する。

(3) 変位や応力は接着層のポアソン比 ν_a とともにほぼ直線的に増大するけれども、その影響は β に比べれば小さい。

(4) 変位や応力に及ぼす接着層のせん断変形の影響は比較的小さい。

文 献

- (1) Lindsey, G. H., ほか3名, *Rep. ARL*, 63-152(1963)
- (2) Adams, R. D. and Coppedale, J., *J. Adhesion*, 10 (1979), 49.
- (3) Erdogan, F. and Ratwani, M., *J. Composite Mater.*, 5 (1971), 378.
- (4) Erdélyi, A., *Tables of Integral Transform.*, (1954), McGraw-Hill.
- (5) Gladwell, G. M. L., *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1980), 481, Sijthoff & Noordhoff.
- (6) Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*, (1951), 458, McGraw-Hill.

討 論

〔質問〕 進 藤 裕 英〔東北大学工学部〕

本報の解を式 16 と比較することも重要と思うがいかがか。

〔回答〕 確かにご指摘の比較も興味あるが、パンチによる接触問題では、通常、簡単に求められる $(\tau_{rz})_{z=0}$ の理論解が比較のために用いられることが多く、ここでもそれに従ったものである。なお、表 1 から明らかなように、本問題では $(\sigma_z)_{z=0}$ や $(\omega_z)_{z=0}$ に与えるせん断変形の影響は小さくなる。

〔質問〕 相 原 民 彦

〔東京都立工業高等専門学校〕

(1) $r=a$ における変位と応力では、 a_n , b_n の収束はどのようなになるのか。

(2) 本問題において、接着層のばねのモデル化によって生ずる解の誤差およびその r/a に対する傾向はどのように予想および計算されるか。

(3) 円形弾性パンチの縁における接触応力を本解法で近似的に調べる(緒言)場合に、対応する β の数値はどのようにとるのか。

〔回答〕 (1) 質問の趣旨は a_n , b_n の収束のことと思われるので、その一例を付表 1 に示す。 $(\tau_{rz})_{z=0} \neq 0$ と $(\tau_{rz})_{z=0} = 0$ のいずれの場合にも係数の収束は極めて良好である。

(2) この問題を三次元弾性論に基づいて解析すると、接着層の理想的角部で応力は特異性を有し無限大になる。しかし、実際には理想的角部は存在し得ず、応力は無限大にはならないと考えられる。本論文はこのような応力が有限になる角部をモデル化する一方法

付表 1 係数 a_n , b_n の値

($\beta=1.0$, $\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$)

n	$(\tau_{rz})_{z=0} \neq 0$		$(\tau_{rz})_{z=0} = 0$
	a_n	b_n	a_n
0	0.366246	0.027330	0.364875
1	-0.088027	-0.003878	-0.090317
2	0.024640	0.000761	0.025042
3	-0.008993	-0.000228	-0.009077
4	0.004099	0.000094	0.004125
5	-0.002185	-0.000048	-0.002195
6	0.001297	0.000027	0.001303
7	-0.000832	-0.000017	-0.000836
8	0.000565	0.000012	0.000568
9	-0.000401	-0.000008	-0.000402
10	0.000291	0.000007	0.000292

として、接着層を一次元ばね要素で仮定した時の接触応力に及ぼすばね要素の影響を調べたものである。現在のところ、接着層の応力を測定する有効な方法がないために実験的検証は困難であるが、実際の $(\sigma_z)_{z=0}$ や $(\omega_z)_{z=0}$ も定性的にはほぼ本結果のような分布を与えるのではないかと考えている。

(3) 先端の変位量 ε_0 は端面近傍の変形量で、これより離れれば、本問題では剛体になるので相対的変形を生じないことになる。もし、剛体部分が弾性的とすればこの部分の一樣変形量を差引ければよいことになる。そこで、例えば長さ l の円形弾性パンチを P で押し付けた時の他端の変位量を λ とする時、棒としての変形量 $Pl/E_a A$ (A : 断面積, E_a : パンチの縦弾性係数) を差引いた値を $\varepsilon_0 = \lambda - (Pl/AE_a)$ とし、図 8 から β を定められる。