縦衝撃を受ける丸棒の弾性波におよぼす
衝撃立上がり時間の影響

内 藤 正 鄰**, 台 丸 谷 政 志**

The Influence of a Rise Time of Longitudinal Impact
on the Propagation of Elastic Waves in a Bar

by Masachika NAITOH, Masashi DAIMARUYA

The purpose of this paper is to examine not only qualitatively but also quantitatively the influence of a rise time of longitudinal impact on the propagation of elastic waves in a bar. The adequacy of application of the Love theory for the propagation of longitudinal elastic waves to this problem is discussed by means of the simultaneous measuring of both axial and radial strain waves at the same stations along a bar. Theoretical results based on the Love theory predicts that, as the rise time of impact velocity increases, the effect of lateral inertia on longitudinal waves decreases and then the oscillatory wakes of it become negligibly small. Experimental results for a steel bar agreed well with the theoretical results. Moreover, as an example of application, the consideration on the experimental measurement of the dynamic yield stress by using the one dimensional stress bar was made.

Key Words: Elasticity, Elastic Waves, Longitudinal Impact, Rise Time of Impact, Love Theory, Effect of Lateral Inertia, Stress Bar

1. 緒 言

弾性丸棒がその一端にステップ的に縦衝撃を受ける場合の弾性波の伝ばに関しては多くの研究がなされている。しかし、衝撃荷重あるいは衝撃速度の立上り時間が波動に及ぼす影響に関しては定性的な傾向は知られているものの、必しも定量的には明らかにされていないようである⁽¹⁾⁽²⁾。

衝撃荷重を実験的に測定する各種の方法⁽³⁾のうち、一般にホプキンソン棒法と呼ばれる一次元弾性波を利用する方法がある。この実験法において、衝撃荷重あるいは衝撃速度の立上り時間が比較的遅い場合は応力棒上のひずみゲージより測定される弾性波はほぼ一次元波形になると思われるが、立上り時間が比較的速い場合には応力棒の横慣性や 2 次以上の高次波動モードの影響が一次元波形上に現れる可能性がある。このように衝撃荷重を測定する観点からも、弾性棒上の各位置における弾性波形と衝撃立上り時間の関係を明らかにする必要があると思われる。

本論文では、初め、弾性丸棒上の同位置における軸

方向および半径方向のひずみ波動を同時測定することによって、縦弾性波動に関する Love の仮定を直接実験的に検証し、Love 理論適用の妥当性とその範囲を調べる。次に、理論計算および実験結果より、各位置における弾性波形と立上り時間の関係を調べ、衝撃立上り時間が弾性棒を伝ばする縦波動にどのように影響するかを定量的に明らかにする。また、応用例として、塑性波動に伴う動的降伏現象の応力棒を用いた測定について考察を行う。

2. 理 論

弾性丸棒がその一端に縦衝撃を受ける場合の弾性波の伝ばについて考える。この問題に対する三次元弾性理論に基づく最初の厳密な解析は Skalak⁽⁴⁾によってなされた。その結果、厳密解には一次元弾性波動以外に無数の高次モードの波動が含まれるが、衝撃点から遠方の位置においては高次波動モードの影響は非常に小さく、横慣性効果が支配的になることが結論として得られている。実際、一次元縦波動理論に横慣性効果を考慮した Love の波動理論⁽⁵⁾は、比較的長い波長の弾性波動に対してかなりよい近似解を与えることが知られている⁽⁶⁾。したがって、もし遠方場の長い波長の弾性波動に注目すれば、Love 理論に基づく棒の縦波

* 昭和 58 年 11 月 29 日 第 923 回講演会において講演、原稿受付 昭和 58 年 5 月 25 日

** 正員、室蘭工業大学 (〒050 室蘭市水元町 27-1)

動に関する理論的予測はある程度妥当であると考えられる。

2.1 Love の仮定 棒の縦波動に関する Love の仮定は次式のように与えられる。

$$\nu = -\nu_r \frac{\partial u}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 u, v はそれぞれ棒の軸方向および半径方向変位、 x, r は軸および半径座標、 ν はポアソン比である。式(1)の仮定および Hamilton の原理より、横慣性を考慮した Love の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\nu k)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 t : 時間、 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$: 棒の弾性波速度、 E : 縦弾性係数、 ρ : 密度、 k : 極断面二次半径である。なお、式(2)に関して、棒端における境界条件は応力で与えられるが、ここでは衝撃速度が与えられる場合にも適用できると仮定する。

2.2 衝撃立上り時間を考慮した弾性波 直径 d 、長さ l の弾性丸棒の一端に衝撃が加えられ、他端は自由であるとする。解析においては、多くの場合、ステップ的に衝撃荷重あるいは衝撃速度が加えられる条件が与えられるが、実際には完全なステップ入力の実現され得ず、立上り時間を必要とする。本研究では、立上り時間を有する衝撃速度を考え、境界条件をつぎのように仮定する。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=0} = v_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \right\}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 v_0 は一定衝撃速度、 t_0 は衝撃立上り時間である。運動方程式(2)を境界条件式(3)および初期条件 $u(x, 0) = \partial u(x, 0)/\partial t = 0$ の下に、ラプラス変換法を用いて解析する。ラプラス像空間において、軸方向変位 $\bar{u}(x, p)$ は次式のように得られる。

$$\bar{u}(x, p) = \frac{v_0}{p^2(1+t_0 p)} \times \frac{\cosh\{p(l-x)/\sqrt{(\nu k)^2 p^2 + c_0^2}\}}{\cosh\{pl/\sqrt{(\nu k)^2 p^2 + c_0^2}\}} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 p はラプラス変換パラメータ。

次式のラプラス逆変換

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{u}(x, p) e^{pt} dt \dots\dots\dots (5)$$

を行えば、原空間における解が得られる。式(4)は

$$\left. \begin{aligned} p &= 0, -1/t_0, \\ P &= \pm i(2n-1)\pi c_0 / \sqrt{4l^2 + \{(2n-1)\pi \cdot \nu k\}^2} \\ (n &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

なる極を持ち、よって式(5)の逆変換積分は留数計算に帰着し、軸方向変位に関するつぎの解が得られる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v_0(t-t_0) + v_0 t_0 \frac{\cosh\{\alpha(l-x)\}}{\cosh(\alpha l)} \\ &\times \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) - \frac{v_0}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16l^2 \gamma_n}{(2n-1)^3 \pi^3} \\ &\times \sin\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma_n c_0 t_0)^2}} \sin(\gamma_n c_0 t - \theta) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha = 1/\sqrt{(\nu k)^2 + (c_0 t_0)^2}$

$$\gamma_n = (2n-1)\pi / \sqrt{4l^2 + \{(2n-1)\pi \cdot \nu k\}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(c_0 t_0 \gamma_n)$$

したがって、軸ひずみが次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= -\frac{v_0}{c_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8l \gamma_n}{(2n-1)^2 \pi^2} \right. \\ &\times \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\} \frac{\sin(\gamma_n c_0 t - \theta)}{\sqrt{1+(\gamma_n c_0 t_0)^2}} \\ &\left. - c_0 t_0 \alpha \frac{\sinh\{\alpha(l-x)\}}{\cosh(\alpha l)} \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

式(8)において、 $t_0 = 0$ とおけばステップ衝撃に対する解⁽⁷⁾が得られ、 $k = 0$ とおけば初等解になる。

2.3 理論波形 軸ひずみ波動に関する数値計算例を示し、理論的予測を行う。

図1は、直径 $d = 2$ cm、長さ $l = 400$ cm の丸棒について、衝撃端からの距離 $x = 50d$ (100 cm) の位置における軸ひずみ波の時間的変動を、数種の立上り時間の場合について示したものである。ただし、鋼を想定し

図1 種々の衝撃立上り時間に対する軸ひずみ波の時間的変動

図 2 伝ば距離に伴う軸ひずみ波の発達

て、 $\nu=0.29$, $c_0=5.17 \times 10^3$ m/sec の値を用いた。横慣性効果は一次元弾性波形上にそれを中心とする周期的な振動として現れ、立上がり時間が長くなるにしたがって、振動は小さくなることがわかる。その振動は立上がり時間 $t_0=10$ μsec 程度でほぼ消えている。

図 2 に、立上がり時間 $t_0=5$ μsec の場合に関して、衝撃端から異なる距離にある位置における軸ひずみ波の時間的変動を示す。ステップ衝撃の場合、伝ばするにしたがって、波頭での立上りこう配はゆるやかになり、振動の周期も長くなることが知られているが⁽⁷⁾⁽⁸⁾、さらにそれ以外に、衝撃に立上がり時間がある場合には伝ば距離の増加に伴って横慣性効果による振動振幅が発達してゆくことがわかる。

3. 実 験

3.1 Love の仮定の実験的検証 Love 理論の妥当性は、Pochhammer-Chree の厳密な理論より得られる分散曲線との比較あるいは縦弾性波動に関する実験値との比較によって議論されている⁽⁶⁾⁽⁹⁾。本研究では、ホプキンソン棒法による実験を行い、丸棒上の同位置において縦ひずみ波および半径ひずみ波を同時測定することによって、直接 Love の仮定すなわち式 (1) の $\partial v / \partial r = -\nu \partial u / \partial x$ を検証する。

使用した試験棒は、 $d=2$ cm, $l=400$ cm の炭素鋼みがき丸棒 SGD 41-D で、衝撃棒は同材同径で $l=100$ cm である。試験棒、衝撃棒は共にピアノ線によって同軸上水平方向につり下げられており、衝撃棒とある高さを持ち上げて離すことによって衝撃を与える。試験棒上の数点の位置に軸方向および円周方向にそれぞれ軸対称に 2 枚ずつひずみゲージが接着されており、これらによって同時測定された軸方向および半径方向のひずみ波は、ブリッジ回路、直流増幅器を経て、トランジェント・メモリーに記憶され、シンクロ・スコープに写し出される。

図 3 は同位置において同時測定された軸ひずみ波および半径ひずみ波の時間的変動の測定例である。衝撃端からの距離 $x=10$ および 200 cm の各位置における

波形で、いずれも上側ビームが半径ひずみ波 ϵ_r 、下側ビームが軸ひずみ波 ϵ_x である。衝撃速度は約 2 m/sec、衝撃端から比較的近い $x=5d$ (10 cm) の位置では、高次の波動モードの影響が不規則な振動として現れており、 ϵ_x, ϵ_r を比較すれば、振動部分は Love の仮定と異なる挙動を示していることがわかる。これに対して、衝撃端から遠い $x=100d$ (200 cm) の位置における ϵ_x, ϵ_r に関しては、振動部分を含めて明らかに式 (1) の関係が成立しており、Love の仮定の妥当性が認められる。一連の測定結果より、波頭付近に注目すれば、およそ $x=10d$ 以上で Love 理論の適用が十分可能であることがわかった。

3.2 弾性波形と立上がり時間の関係 図 4 は、図 3 の $x=100d$ における実験結果と式 (8) より得られた理論結果との比較である。測定波形と立上がり時間 $t_0=3$ μsec の場合の理論波形がよく一致していることがわかる。なお、多くの文献に引用されている Miklowitz らの測定結果⁽¹⁰⁾ にも 3 μsec 程度の立上がり時間があることが指摘されている⁽¹¹⁾。

図 5 は位置 $x=150d$ において測定された、立上がり時間の異なるひずみ波の時間的変動である。図 3 と同様に、それぞれ上側ビームは半径ひずみ波、下側ビー

図 3 軸ひずみ波、半径ひずみ波の時間的変動

図4 実験波形と理論波形との比較($x=100d$) 図5 ゲージ位置 $x=150d$ における立上がり時間の異なる軸ひずみ波

ムは軸ひずみ波である。図の(a), (b), (c)の順に立上がり時間が長くなっているが、立上がり時間は衝撃棒の衝突面の粗さおよび平面度を変えることによって変化させた。

図6は、図5に対応する $x=150d$ における理論波形で、立上がり時間が $t_0=0, 3, 5, 7, 10, 15 \mu\text{sec}$ の各場合である。図5, 6の比較より、例えば、図5(b)の波動は立上がり時間が約 $7 \mu\text{sec}$ の衝撃を受けた結果であることが推察される。

4. 応力棒による動的降伏現象の測定

一般に金属材料が衝撃荷重下で高速塑性変形を受ける場合、ひずみ速度効果によって動的降伏応力の上昇および降伏遅れの現象が生ずる⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾。

図7に示されるような塑性変形する試料棒と弾性変形内に留まる応力棒との衝突を考えれば、試料棒の衝撃端における動的弾塑性挙動ならびにそれに伴う動的降伏現象を応力棒上で測定することができる。

図8(a)は鉛試料棒と炭素鋼応力棒が約 12.7 m/sec で衝突したときの互いの衝突面に作用する衝撃力の測定例である⁽¹⁵⁾。上側のビームが測定位置 $x=d$ のひずみゲージより得られた波形で、下側のビームは $x=5d$ での波形である。どちらも衝撃端から比較的近い位置であるため、両波形とも横慣性効果だけではなく高次の波動モードによる影響も現れており、測定位置によって波形が多小異なっている。しかし前章までの

図6 種々の立上がり時間に対する理論軸ひずみ波

議論により、両波形ともその振動中心を読取ることによって作用する衝撃荷重のおおよその大きさを知ることができる。この場合の鉛試料棒の衝撃端における動的降伏応力は静的降伏応力の約2倍強に達し、降伏遅れ時間は80 μsec 程度であることがわかる。

図8(b)は、立上り時間の異なるだけの図8(a)と全く同じ実験による測定結果であるが、動的降伏応力の上昇はわずかに認められる程度である。これらの波形には横慣性効果および高次波動モードの影響はほとんど見られず、衝撃立上り時間が長いことがわかる。したがって、試料棒の動的降伏応力の上昇は衝撃荷重の立上り時間に大きく依存することが推察される。実際、塑性波動に関するひずみ速度依存性理論によっても、衝撃端近傍における動的降伏応力の上昇は、材料のひずみ速度依存性の大きさだけではなく、衝撃荷重の立上り時間にも大きく支配される結果が得られてい

図7 試料棒と応力棒の衝突

図8 動的弾塑性応力の測定波形

る⁽¹⁵⁾。

図9は、図8(a)と同じ測定波形であるが、掃引時間を10 $\mu\text{sec}/\text{div}$ とした場合である。このように衝撃点より比較的近い位置での立上りの急な弾性波動においては、高次の波動モードの影響が現れるため、Mindlin-McNiven理論⁽¹⁶⁾などのより高度の近似理論あるいは数値的厳密解⁽¹⁷⁾などによる理論的考察が必要と考えられる。

5. 結 言

本論文で得られた成果を要約すれば次の通りである。

(1) 弾性丸棒上の同位置における軸方向および半径方向のひずみ波動を同時測定することによって、Loveの仮定を直接実験的に検証し得ることを明らかにし、Love理論適用の妥当性とその範囲を調べた。その結果、衝撃端から比較的近い $x=5d$ の位置では高次の波動モードの影響が現れるが、波頭付近に注目すれば $x=10d$ 以上の位置ではほぼLoveの仮定が成立する。

(2) 衝撃立上り時間が長くなるに伴って、横慣性効果による一次元弾性波形上の周期的な振動は小さくなる。また伝ば距離と共に横慣性効果による振動は発達するが、衝撃端から $x=150d$ までの距離では、衝撃に $t_0=10 \mu\text{sec}$ 程度の立上り時間があれば、横慣性の影響はほとんど現れない。

(3) 衝撃荷重下における材料の動的降伏現象の応力棒による測定について検討を行った。衝撃端から近いゲージ位置での測定では、衝撃の立上りが急な場合、測定波形に横慣性効果だけではなく高次の波動モードの影響が現れるが、応力棒が受ける衝撃荷重のおおよその大きさを推定することができる。

また、測定された応力波形の様相より衝撃の立上り

図9 応力波形図8(a)の拡大図

時間を推測することも可能である。

なお、測定波形に高次の波動モードの影響が現れる場合は、それらを含む高度の近似理論あるいは数値厳密解などによる理論的考察が必要と考えられ、現在検討中である。

最後に、本研究に協力して載いた松本 優氏〔日揮(株)〕に感謝の意を表する。

文 献

- (1) Conway, H. D., and Jakubowski, M., *Trans. ASME, Ser. E*, 36-4 (1969), 809.
- (2) Curtis, C. W., *Int. Sym. Stress Wave Propa. Mate.*, (1960), 15, Interscience Pub.
- (3) 渋谷, 衝撃と破壊調査研究分科会成果報告書, (昭56), 110, 日本機械学会.
- (4) Skalak, R., *Trans. ASME, Ser. E*, 24 (1957), 59.
- (5) Love, A. E., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, (1934), 287, Dover Pub.

- (6) Graff, K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, (1975), 547, Clarendon Press.
- (7) 茶谷・ほか3名, 金沢大学工学部紀要, 7-2 (昭48), 115.
- (8) Kaul, R. K., and McCoy, J. J., *J. Acoust. Soc. Am.* 36-4 (1964), 653.
- (9) Abramson, H. N., ほか2名, *Advances in Applied Mechanics*, 5 (1958), 111, Academic Press.
- (10) Miklowitz, J. and Nisewanger, C. R., *Trans. ASME, Ser. E*, 24 (1957), 240.
- (11) McNiven, H. D., and Mengi, Y., *J. Acoust. Soc. Am.*, 62-3 (1977), 589.
- (12) Clark, D. S., and Wood, D. S. *Proc. ASTM*, 49 (1949), 717.
- (13) Johnson, J. E., ほか2名, *Proc. ASTM*, 53 (1953), 755.
- (14) 作井・森, 機誌, 65-517 (昭37), 60
- (15) 内藤・ほか3名, 機講論, No 832-1 (昭58-3), 28
- (16) Mindlin, R. D., and McNiven, H. D. *Trans. ASME, Ser. E*, 27-1 (1960), 145.
- (17) Bertholf, L. D., *Trans. ASME, Ser. F*, 34-3 (1967) 725.; *Trans. ASME, Ser. E*, 41-1 (1974), 137.

討 論

〔質問〕 若 杉 昇 八・古 川 俊 雄

〔福井大学工学部〕

棒の圧縮縦衝撃における横慣性効果についての貴論文を興味深く拝見した。動的降伏現象に関する次の2点についてご意見を伺いたい。

(1) 図8(a), (b)の応力のピーク値は単に試料棒衝突端面に生じた変形応力の最大値を示すもので、動的「降伏応力」を示すものではないと思われるがいかか。

(2) 図8(a)より降伏遅れ時間が80 μs 程度とすると、これは立上がりのピークから応力がほぼ減少し終わるまでの時間を指すものと思われる。そうするとこれは鉄鋼材料などの変形挙動における降伏遅れ時間とは必ずしも同じではないように思われるがいかか。

〔回答〕 (1) ご指摘のとおりであるが、図8(a)において応力が最大値に達するまではほぼ弾性挙動を示すと考えている。

付図1は、塑性波動に関するひずみ速度依存性理論(付1)に基づいて弾塑性変形する棒の衝撃端における動的応力としたものである。実線は図8(a)の $x=5d$ における実験値である。一点鎖線で示したステップ衝撃の場合、 $t=0$ の瞬間に $\sigma_0 = -\rho C_0 V$ (ρ : 密度, C_0 : 弾性波速度, V : 粒子速度) に達する。波線で示した衝撃に立上がり時間がある場合も、理想的なステップ衝撃の場合のように明確ではないが、最大応力近

傍までは弾性挙動を示すと仮定し、これを動的降伏応力とみなしている。

(2) 応力がほぼ一定値に達するまでの時間を降伏遅れ時間と呼んでいる。Johnson(付2), Campbell(付3)らの実験では(実験方法は異なる), 鉄鋼材料の降伏遅

付図 1

- (付1) 内藤・ほか2名, 材料, 31 (昭57), 1068.
- (付2) Johnson, J. E., ほか2名, *Proc. ASTM*, 53 (1953), 755.
- (付3) Campbell, J. D., *J. Mech. Phys. Solids*, 3 (1954), 54.

れ時間は常温で $100\ \mu\text{s}$ 前後で、むしろ本研究の鉛の場合とよく一致している。

降伏遅れ時間に関しては、付図 1 から推察される

ように、衝撃立上がり時間にはあまり影響されず、材料のひずみ速度依存性の大きさ (K 値) に大きく依存すると思われる。これについても現在検討中である。

50 巻 451 号, A 編 (昭 59-3) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
田中正夫ほか	359	左		付図 2 の下図を付図 3 として図説明を「ひずみエネルギーと最適増分パラメータ選択過程のはん関数」と訂正する。	
竹内洋一郎ほか	391	右	下 2	熱伝導率	熱伝達率
	393	式 (35) 2 段め		$+B_0 B_l \zeta \cosh \beta_l \zeta\}$	$+B_0 \beta_l \zeta \cosh \beta_l \zeta\}$
菅野良弘ほか	400	式 (17)		$\frac{\partial \bar{T}}{\partial n_i}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}_i}$
	401	式 (25) 6 段め		$(C_3 - C_5) \bar{\chi}_{i,j+1}$	$(C_3 - C_5) \bar{\chi}_{i,j+2}$
	"	式 (26) 第 10 式		$\left\{ \frac{[(2\bar{D}_{i+1,j} - \bar{D}_{i-1,j}) \times (\bar{D}_{i,j} - \bar{D}_{i,j-1})]}{\bar{D}_{i,j}} \right\}$	$\left\{ \frac{[2(\bar{D}_{i+1,j} - \bar{D}_{i-1,j}) \times (\bar{D}_{i,j+1} - \bar{D}_{i,j-1})]}{\bar{D}_{i,j}} \right\}$
	402	右	下 14	$\bar{D} = D_0/l_x = 0.05$	$\bar{D}_0 = D_0/l_x = 0.05$
	403	式 (35) 第 5 式		$W_{6x} = -W_{7x} = b_{3x}$	$W_{6x} = -W_{7x} = b_{8x}$
妹尾允史ほか	441	右	下 13	(u, v) と v の組	(u, w) と v の組
	446	文献 (2)		Ohmo, I., <i>J. Physo.</i>	Ohno, I., <i>J. Phys.</i>