一円孔を有する半無限板の非定常熱応力*

山 田 勝 稔**, 竹 内 洋 一 郎***
Katsutoshi YAMADA, Yoitiro TAKEUTI**Key Words:** Elasticity, Thermal Conduction, Transient Thermal Stress, Concentration Factor, Semi-Infinite Plate with a Hole

1. 緒 言

偏心円孔を有する円板, 一円孔を有する半無限板, 二円孔を有する無限板等は機械部品の基本的モデルとして平面弾性問題において広く用いられ, 双極座標を用いた Jeffery⁽¹⁾の解法を用いて, すでに多くの実用的問題が解決されているのはよく知られているところである。

これらの領域における熱応力問題においても定常問題に関しては同じ Jeffery の解法を用いて厳密解を得ることができ, すでに多くのすぐれた研究^{(2)~(7)}がある。しかし, これらの領域における非定常問題に対してはもはやこの解法を用いて厳密解を得ることができず, 今までに二, 三の実験的研究があるにすぎなかった^{(8)~(10)}。

しかし最近, 筆者らは有孔板における定常熱応力問題をその孔の形状, 配列および個数に無関係に解く手法を開発し^{(11)~(13)}, つづいてこの手法を有孔板における非定常熱応力問題にまで拡張する方法を示し, 実際例として, 二円孔を有する無限板の非定常熱応力集中問題を解決した⁽¹⁴⁾。

本研究は, これと同じ手法を用いて, 断熱された一円孔をもつ半無限板の直線縁を一定温度で加熱する場合の基本的問題を解析し, 直線境界と円孔間の非定常熱応力集中現象を明らかにしたものである。

2. 解 析

図 1 に示すように, 円孔の半径を b , 直線縁から円

孔中心までの距離を a とする。また, 直線縁に沿って x 軸を, 円孔の中心を通りそれに垂直に y 軸を定める。

2・1 温度分布 最初, 板の温度は一様に零とし, ある瞬間 $t=0$ より直線縁を一定温度 T_0 で加熱し始め, 以後この温度を保持する。円孔は断熱されており, 板表面からの熱放散は無視する。この時, 求める温度分布は y 軸に関して対称となる。今, この温度分布を二つの温度分布の重ね合せとして求めてみる。

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} \dots\dots\dots (1)$$

$T^{(1)}$ は直線縁を一定温度 T_0 で加熱するときの円孔のない半無限板の温度分布で, 次式で与えられる。

$$T^{(1)} = T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \dots\dots\dots (2)$$

ここで, κ は温度伝導率, $\operatorname{erfc}(\quad)$ は余誤差関数である。 $T^{(2)}$ は円孔内部の点に時間間隔 $t_{n-1} < t < t_n (n=1, 2, \dots, N)$ でのみ作用する一様な強さの連続点熱源 q_{jn} による温度である。ここで q_{jn} は, 問題の対称性と直線縁での境界条件を考慮して, 図 2 に示すように円孔内部の点 $(\xi_j, a+\eta_j)$ とこれと x 軸, y 軸に関して対称な点に x 軸に関して逆対称, y 軸に関して対称に作用させる。この時の温度分布 $T^{(2)}$ は, 前報⁽¹⁴⁾と同じ方法で次のように求まる。

図 1 一円孔を有する半無限板

* 昭和 58 年 3 月 19 日 関西支部第 58 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 58 年 8 月 22 日。

** 正員, 徳島大学工業短期大学部 (〒770 徳島市南常三島町 2-1)。

*** 故 (元近畿大学理工学部)。

$$T^{(2)} = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (T_{j,n-1} - T_{jn})$$

$$T_{jn} = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\kappa} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} E_i \left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) & (t > t_n) \\ 0 & (t \leq t_n) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで J は熱源の総数, $E_i(\quad)$ は指数積分関数であり

$$E_i(-x) = \int_0^x \frac{e^{-u}}{u} du \quad \dots\dots\dots (4)$$

R_{kj} は熱源からの距離で次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} R_{1j}^2 &= (x - \xi_j)^2 + (y - a - \eta_j)^2 \\ R_{2j}^2 &= (x - \xi_j)^2 + (y + a + \eta_j)^2 \\ R_{3j}^2 &= (x + \xi_j)^2 + (y - a - \eta_j)^2 \\ R_{4j}^2 &= (x + \xi_j)^2 + (y + a + \eta_j)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

仮定した熱源の配置のもとでは, $T^{(2)}$ は x 軸に関して逆対称となり, したがって直線縁上で $T^{(2)}=0$ となり, 式(1)はすでに直線縁での境界条件を満足している. かつ明らかに, 式(1)は初期条件をも満足している. あとは円孔縁での境界条件を満足するように熱源 q_{jn} を決定すればよい. 円孔縁は断熱されているとすると, 境界条件は次のように書ける.

$$\frac{\partial(T^{(1)} + T^{(2)})}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial(T^{(1)} + T^{(2)})}{\partial y} \cos \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで, θ は円孔の法線 n と y 軸とのなす角である. この条件は円孔上で時間 t にかかわらず成立しなければならない. このため今, 時間 t で温度を求めるとしてこれを N 分割し, 各時間分割点 $t = t_m (m=1, 2, \dots, N)$ で順次この条件を満足させていく. そして各時間分割点では, 対称性を考慮して半円周上 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) に選ばれた I 個の点 $x_i = b \sin \theta_i$, $y_i = a + b \cos \theta_i$ で式(6)を満足させるとすると, 次の q_{jn} を決定す

図 2 仮想点熱源

るための一次方程式を得る.

$$\sum_{j=1}^J C_{ijn}^{(m)} q_{jm} = D_{im} - \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{m-1} C_{ijn}^{(m)} q_{jn} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(i=1, 2, \dots, I; m=1, 2, \dots, N)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} C_{ijn}^{(m)} &= \left(\frac{\partial T_{j,n-1}}{\partial x} - \frac{\partial T_{jn}}{\partial x} \right) \sin \theta_i \\ &\quad + \left(\frac{\partial T_{j,n-1}}{\partial y} - \frac{\partial T_{jn}}{\partial y} \right) \cos \theta_i \\ D_{im} &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi\kappa t_m}} e^{-y_i^2/4\kappa t_m} \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

上式における必要な微係数は次式で与えられる.

$$\frac{\partial T_{jn}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\kappa} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} E_{kj} e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)}$$

$$\frac{\partial T_{jn}}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi\kappa} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} F_{kj} e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} E_{1j} &= 2(x - \xi_j)/R_{1j}^2 \\ E_{2j} &= 2(x - \xi_j)/R_{2j}^2 \\ E_{3j} &= 2(x + \xi_j)/R_{3j}^2 \\ E_{4j} &= 2(x + \xi_j)/R_{4j}^2 \\ F_{1j} &= 2(y - a - \eta_j)/R_{1j}^2 \\ F_{2j} &= 2(y + a + \eta_j)/R_{2j}^2 \\ F_{3j} &= 2(y - a - \eta_j)/R_{3j}^2 \\ F_{4j} &= 2(y + a + \eta_j)/R_{4j}^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(7)は J 個の未知量 $\{q_m\}$ に対する I 個の一次方程式よりなり, これに最小二乗法を適用し得られた連立一次方程式を解いて $\{q_m\}$ が求まる. この手順を N 回繰返してすべての q_{jn} が求まると, 任意点の温度分布は式(1)~(3)より計算できる.

2.2 熱弾性変位ポテンシャル 熱弾性変位ポテンシャルを Φ とすると, 平面応力の場合 $\nabla^2 \Phi = (1+\nu)\alpha T$ である. ここで α は線膨張係数, ν はポアソン比である. $T^{(1)}$ に対するものを $\Phi^{(1)}$ とし次式をとる.

$$\Phi^{(1)} = (1+\nu)\alpha T_0 \iint \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) dy dy \quad \dots\dots\dots (11)$$

$T^{(2)}$ に対するものを $\Phi^{(2)}$ とすれば, これは前報⁽¹⁴⁾と同様にして次式を得る.

$$\Phi^{(2)} = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (\Phi_{j,n-1} - \Phi_{jn})$$

$$\Phi_{jn} = \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} (t - t_n) \times \left[2 \log R_{kj} - e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)} - \left(1 + \frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) E_i \left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ で記述される応力成分は, E を縦弾性係数とすれば, 次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -E\alpha T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \\ &+ \frac{E\alpha}{8\pi\kappa} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (\bar{U}_{j,n-1} - \bar{U}_{jn}) \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{E\alpha}{8\pi\kappa} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (\bar{V}_{j,n-1} - \bar{V}_{jn}) \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{E\alpha}{8\pi\kappa} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (\bar{W}_{j,n-1} - \bar{W}_{jn}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{jn} &= \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \left[E_i\left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\kappa(t-t_n)}{R_{kj}^2} (1-F_{kj})(1-e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)}) \right] \\ \bar{V}_{jn} &= \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \left[E_i\left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\kappa(t-t_n)}{R_{kj}^2} (1-E_{kj})(1-e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)}) \right] \\ \bar{W}_{jn} &= \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \left[\frac{4\kappa(t-t_n)}{R_{kj}^2} \right. \\ &\quad \left. \times G_{kj}(1-e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)}) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

上式における E_{kj} , F_{kj} は式(10)で与えられており, G_{kj} は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} G_{1j} &= 2(x-\xi_j)(y-a-\eta_j)/R_{1j}^2 \\ G_{2j} &= 2(x-\xi_j)(y+a+\eta_j)/R_{2j}^2 \\ G_{3j} &= 2(x+\xi_j)(y-a-\eta_j)/R_{3j}^2 \\ G_{4j} &= 2(x+\xi_j)(y+a+\eta_j)/R_{4j}^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

2.3 Airy の応力関数 Φ で記述される応力成分が直線縁で生じる表面荷重を除去するために, 次の Airy の応力関数 F ($\nabla^4 F = 0$) を採用する.

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \frac{E\alpha q_{jn}}{8\pi\kappa} (F_{j,n-1} - F_{jn}) \\ F_{jn} &= \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2} (A_{jn} + \beta y B_{jn}) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで, A_{jn} および B_{jn} は直線縁での境界条件より定まる未知定数である. 応力関数 F で記述される応力成分は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \frac{E\alpha q_{jn}}{8\pi\kappa} (\bar{U}_{j,n-1} - \bar{U}_{jn}) \\ \bar{\sigma}_y &= -\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \frac{E\alpha q_{jn}}{8\pi\kappa} (\bar{V}_{j,n-1} - \bar{V}_{jn}) \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \frac{E\alpha q_{jn}}{8\pi\kappa} (\bar{W}_{j,n-1} - \bar{W}_{jn}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{jn} &= \int_0^\infty (A_{jn} - 2B_{jn} + \beta y B_{jn}) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta \\ \bar{V}_{jn} &= \int_0^\infty (A_{jn} + \beta y B_{jn}) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta \\ \bar{W}_{jn} &= \int_0^\infty (A_{jn} - B_{jn} + \beta y B_{jn}) e^{-\beta y} \sin \beta x d\beta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

直線縁 $y=0$ での境界条件 $\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y = 0$, $\bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xy} = 0$ より次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty A_{jn} \cos \beta x d\beta &= 0 \\ \int_0^\infty (A_{jn} - B_{jn}) \sin \beta x d\beta &= 16\kappa(t-t_n) \left[\frac{(x-\xi_j)(a+\eta_j)}{\{(x-\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2\}^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{(x-\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2}{4\kappa(t-t_n)}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x+\xi_j)(a+\eta_j)}{\{(x+\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2\}^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{(x+\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2}{4\kappa(t-t_n)}\right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式第1式より $A_{jn}=0$ を得る. B_{jn} を求めるために, 既知の積分公式⁽¹⁵⁾を用いて得られる次のフーリエ積分表示を利用する.

$$\frac{(x-\xi_j)(a+\eta_j)}{\{(x-\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2\}^2} + \frac{(x+\xi_j)(a+\eta_j)}{\{(x+\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2\}^2} = \int_0^\infty \beta e^{-\beta(a+\eta_j)} \cos \beta \xi_j \sin \beta x d\beta \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(x-\xi_j)(a+\eta_j)}{\{(x-\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2\}^2} \exp\left\{-\frac{(x-\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2}{4\kappa(t-t_n)}\right\} + \frac{(x+\xi_j)(a+\eta_j)}{\{(x+\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2\}^2} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{(x+\xi_j)^2 + (a+\eta_j)^2}{4\kappa(t-t_n)}\right\} = \int_0^\infty K_0(a+\eta_j, \beta, t-t_n) \cos \beta \xi_j \sin \beta x d\beta \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} K_0(a+\eta_j, \beta, t-t_n) &= \frac{1}{2}\beta H_0(a+\eta_j, \beta, t-t_n) - \frac{a+\eta_j}{4\kappa(t-t_n)} H(a+\eta_j, \beta, t-t_n) \\ \left\{ \begin{array}{l} H_0 \\ H \end{array} \right\} &= e^{-\beta(a+\eta_j)} \operatorname{erfc}\left\{ \frac{a+\eta_j}{2\sqrt{\kappa(t-t_n)}} - \beta\sqrt{\kappa(t-t_n)} \right\} \pm e^{\beta(a+\eta_j)} \operatorname{erfc}\left\{ \frac{a+\eta_j}{2\sqrt{\kappa(t-t_n)}} + \beta\sqrt{\kappa(t-t_n)} \right\} \quad (\text{複合同順}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(20), (21)を式(19)の第2式に用いると, B_{jn} として次式を得る.

$$B_{jn} = 16\kappa(t-t_n)[K_0(a+\eta_j, \beta, t-t_n) - \beta e^{-\beta(a+\eta_j)}] \cos \beta \xi_j \quad \dots\dots\dots (23)$$

以上求めた A_{jn}, B_{jn} を式(18)に代入し, 積分可能なものについてはこれを実行すると, 次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{jn} &= -16\kappa(t-t_n) \left[\frac{(x-\xi_j)^2 - (y+a+\eta_j)^2}{\{(x-\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^2} + \frac{(x+\xi_j)^2 - (y+a+\eta_j)^2}{\{(x+\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^2} \right. \\ &\quad \left. - y(y+a+\eta_j) \left\{ \frac{3(x-\xi_j)^2 - (y+a+\eta_j)^2}{\{(x-\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^3} + \frac{3(x+\xi_j)^2 - (y+a+\eta_j)^2}{\{(x+\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^3} \right\} \right] \\ &\quad + \int_0^\infty (2-\beta y) e^{-\beta y} K(a+\eta_j, \beta, t-t_n) \cos \beta \xi_j \cos \beta x d\beta \\ \bar{V}_{jn} &= 16\kappa(t-t_n) y(y+a+\eta_j) \left[\frac{3(x-\xi_j)^2 - (y+a+\eta_j)^2}{\{(x-\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^3} + \frac{3(x+\xi_j)^2 - (y+a+\eta_j)^2}{\{(x+\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^3} \right] \\ &\quad - \int_0^\infty \beta y e^{-\beta y} K(a+\eta_j, \beta, t-t_n) \cos \beta \xi_j \cos \beta x d\beta \\ \bar{W}_{jn} &= 16\kappa(t-t_n) \left[\frac{(x-\xi_j)(y+a+\eta_j)}{\{(x-\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^2} + \frac{(x+\xi_j)(y+a+\eta_j)}{\{(x+\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^2} \right. \\ &\quad \left. + y \left\{ \frac{(x-\xi_j)\{(x-\xi_j)^2 - 3(y+a+\eta_j)^2\}}{\{(x-\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^3} + \frac{(x+\xi_j)\{(x+\xi_j)^2 - 3(y+a+\eta_j)^2\}}{\{(x+\xi_j)^2 + (y+a+\eta_j)^2\}^3} \right\} \right] \\ &\quad + \int_0^\infty (1-\beta y) e^{-\beta y} K(a+\eta_j, \beta, t-t_n) \cos \beta \xi_j \sin \beta x d\beta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで,

$$\begin{aligned} K(a+\eta_j, \beta, t-t_n) &= 8\sqrt{\kappa(t-t_n)} \left\{ \frac{a+\eta_j}{2\sqrt{\kappa(t-t_n)}} - \beta\sqrt{\kappa(t-t_n)} \right\} e^{-\beta(a+\eta_j)} \\ &\quad \times \operatorname{erfc}\left\{ \frac{a+\eta_j}{2\sqrt{\kappa(t-t_n)}} - \beta\sqrt{\kappa(t-t_n)} \right\} - 8\sqrt{\kappa(t-t_n)} \left\{ \frac{a+\eta_j}{2\sqrt{\kappa(t-t_n)}} + \beta\sqrt{\kappa(t-t_n)} \right\} e^{\beta(a+\eta_j)} \\ &\quad \times \operatorname{erfc}\left\{ \frac{a+\eta_j}{2\sqrt{\kappa(t-t_n)}} + \beta\sqrt{\kappa(t-t_n)} \right\} \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

以上で応力関数 F による応力成分が求まった.

2.4 円孔縁に残留する応力の除去 熱弾性変位ポテンシャル Φ と Airy の応力関数 F によって記述される応力成分の和は以上の解析により, 直線縁での境界条件を満足するが円孔縁ではまだある表面荷重を生ずる. これを除去するために前報^{(11)~(13)}の方法を用いる. すなわち, 円孔内部にのみ集中荷重を作用させ, これによる応力で円孔縁が応力自由となるように集中

荷重の大きさを定める. ここで, 集中荷重 (P_j, Q_j) は問題の対称性を考慮して, 図3に示すように円孔内部の一点

$$z_j = \xi_j + i(a+\eta_j) \quad \dots\dots\dots (26)$$

とこれと y 軸に関して対称な点に互いに y 軸に関して対称に作用させる. とところで, 直線縁を自由境界とする半無限板内の一点 z_j に集中荷重 (P_j, Q_j) が作用する場合の応力分布はすでに森口⁽¹⁶⁾により求められており, 次の複素応力関数で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= M_j \log(z-z_j) - \bar{N}_j \log(z-\bar{z}_j) \\ &\quad + \frac{\bar{M}_j \cdot 2i(a+\eta_j)}{z-\bar{z}_j} \\ \chi(z) &= N_j \log(z-z_j) - \bar{M}_j \log(z-\bar{z}_j) \\ &\quad + \frac{M_j \cdot 2i(a+\eta_j)}{z-z_j} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで,

$$M_j = -\frac{1+\nu}{8\pi} (P_j + iQ_j), \quad N_j = \frac{3-\nu}{8\pi} (P_j - iQ_j)$$

図3 仮想集中荷重

.....(28)

ここで,

この複素応力関数によって記述される応力成分は次の
公式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[\varphi'(z)] - \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\varphi'(z)] + \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(29)}$$

$$\chi(z) = Z\varphi'(z) + \psi'(z) \quad \text{.....(30)}$$

点 z_j と y 軸に関して対称な点 $(-\xi_j, a + \eta_j)$ に作用する集中荷重 $(-P_j, Q_j)$ による応力は応力関数, 式 (27) から得られる応力成分において ξ_j を $-\xi_j$ で, P_j を $-P_j$ で置き換えて得られる. このようにして得られた応力成分を重ね合せたもののうち P_j によるものを $\bar{\sigma}_{xp}$, $\bar{\sigma}_{yp}$, $\bar{\tau}_{xyp}$, Q_j によるものを $\bar{\sigma}_{xq}$, $\bar{\sigma}_{yq}$, $\bar{\tau}_{xyq}$ で表し, 作用点の総数を J とすれば, 次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xp} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)P_j}{4\pi a} \left[2\left\{ \frac{X_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{X^2}{X_2^2+Y_2^2} \right\} + 2\left\{ \frac{X_1^3}{(X_1^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2^3}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2(Y+3H)\left\{ \frac{X_1Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} - 4HY\left\{ \frac{X_1(X_1^2-3Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} - \frac{X_2(X_2^2-3Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)P_j}{4\pi a} \left[\frac{X_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{X^2}{X_2^2+Y_1^2} + 3\left\{ \frac{X_1}{X_1^2+Y_2^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_2^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 4Y\left\{ \frac{X_1Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{yp} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)P_j}{4\pi a} \left[2\left\{ \frac{X_1Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2Y_1^2}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} + 2Y_1\left\{ \frac{X_1Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 4HY\left\{ \frac{X_1(X_1^2-3Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} - \frac{X_2(X_2^2-3Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] + \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)P_j}{4\pi a} \left[\frac{X_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_1^2} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{X_1}{X_1^2+Y_2^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_2^2} \right) - 4Y\left\{ \frac{X_1Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\tau}_{xyp} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)P_j}{4\pi a} \left[2\left\{ \frac{X_1^2Y_1}{(X_1^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2^2Y_1}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} + 2\left\{ \frac{X_1^2Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2^2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 4HY\left\{ \frac{Y_2(3X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} - \frac{Y_2(3X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)P_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} + \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} - \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right. \\ &\quad \left. + 2Y\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{xq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} + 2\left\{ \frac{X_1^2Y_1}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{X_2^2Y_1}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (Y-3H)\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} + 4HY\left\{ \frac{Y_2(3X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} + \frac{Y_2(3X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} + \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} - 3\left\{ \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2Y\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{yq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} + 2\left\{ \frac{Y_1^3}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{Y_1^3}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{Y_2(X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{Y_2(X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} - 4HY\left\{ \frac{Y_2(3X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} + \frac{Y_2(3X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} + \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} + \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right. \\ &\quad \left. - 2Y\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\tau}_{xyq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{4\pi a} \left[2\left\{ \frac{X_1Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{X_2Y_1^2}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} + 2Y_1\left\{ \frac{X_1Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right. \end{aligned} \right] \quad \text{.....(31)}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xyq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{4\pi a} \left[2\left\{ \frac{X_1^2Y_1}{(X_1^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2^2Y_1}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} + 2\left\{ \frac{X_1^2Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2^2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 4HY\left\{ \frac{Y_2(3X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} - \frac{Y_2(3X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} + \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} - \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right. \\ &\quad \left. + 2Y\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{xq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} + 2\left\{ \frac{X_1^2Y_1}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{X_2^2Y_1}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (Y-3H)\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} + 4HY\left\{ \frac{Y_2(3X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} + \frac{Y_2(3X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} + \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} - 3\left\{ \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2Y\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{yq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} + 2\left\{ \frac{Y_1^3}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{Y_1^3}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{Y_2(X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{Y_2(X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} - 4HY\left\{ \frac{Y_2(3X_1^2-Y_2^2)}{(X_1^2+Y_2^2)^3} + \frac{Y_2(3X_2^2-Y_2^2)}{(X_2^2+Y_2^2)^3} \right\} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} + \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} + \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right. \\ &\quad \left. - 2Y\left\{ \frac{X_1^2-Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2^2-Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right] \\ \bar{\tau}_{xyq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{4\pi a} \left[2\left\{ \frac{X_1Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{X_2Y_1^2}{(X_2^2+Y_1^2)^2} \right\} + 2Y_1\left\{ \frac{X_1Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right\} \right. \end{aligned} \right] \quad \text{.....(32)}$$

$$\begin{aligned}
& -4HY \left\{ \frac{X_1(X_1^2 - 3Y_2^2)}{(X_1^2 + Y_2^2)^3} + \frac{X_2(X_2^2 - 3Y_1^2)}{(X_2^2 + Y_1^2)^3} \right\} \\
& - \sum_{j=1}^I \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi a} \left[\frac{X_1}{X_1^2 + Y_1^2} + \frac{X_2}{X_2^2 + Y_1^2} - \left(\frac{X_1}{X_1^2 + Y_2^2} + \frac{X_2}{X_2^2 + Y_2^2} \right) \right] \\
& + 4Y \left\{ \frac{X_1 Y_2}{(X_1^2 + Y_2^2)^2} + \frac{X_2 Y_1}{(X_2^2 + Y_1^2)^2} \right\}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned}
X_1 &= \frac{x}{a} - \frac{\xi_j}{a}, \quad X_2 = \frac{x}{a} + \frac{\xi_j}{a} \\
Y_1 &= \frac{y}{a} - \frac{\eta_j}{a} - 1, \quad Y_2 = \frac{y}{a} + \frac{\eta_j}{a} + 1 \\
Y &= \frac{y}{a}, \quad H = \frac{\eta_j}{a} + 1
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

以上の解析で集中荷重 P_j , Q_j による各応力成分が求まった。

次に境界条件について考える。式(31), (32)を見れば, 直線縁 $y=0$ で $\bar{\sigma}_{yp} = \bar{\sigma}_{yq} = 0$, $\bar{\tau}_{xyp} = \bar{\tau}_{xyq} = 0$ なる

ことがわかる。したがって, 熱弾性変位ポテンシャル, Airy の応力関数および集中荷重による各応力成分を重ね合せた

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x &= \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_{xp} + \bar{\sigma}_{xq} \\
\sigma_y &= \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_{yp} + \bar{\sigma}_{yq} \\
\tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xyp} + \bar{\tau}_{xyq}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

はすでに直線縁 $y=0$ が応力自由なる条件を満足している。さらに式(13), (14), 式(17), (24)および式(31), (32)を見れば, すべての応力成分は無限遠 $y \rightarrow \infty$ で零になることがわかる。あとは孔の境界条件を満足するように集中荷重 P_j , Q_j を決定すればよい。この境界条件は, 図1を参照して, 次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
& \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
& = 0 \quad (\sigma_n = 0) \\
& (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
& = 0 \quad (\tau_{nt} = 0)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

ここで, σ_n , τ_{nt} はそれぞれ円孔縁上の法線応力, せん断応力である。すでに求めた解はすべて問題の対称性を満足しているので, 式(35)は円孔の半円周上 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) で満足されればよい。今, この半円周上に選ばれた I 個の点で式(35)を満足させるとすれば, $2I$ 個の未知数 P_j , Q_j に対して $2I$ 個の条件式が得られる。これに最小二乗法を適用し得られた連立方程式を解いて P_j , Q_j を決定すればよい。

3. 数値計算と結果の考察

3・1 温度分布 数値計算においては, 仮想熱源の作用位置とその数, 時間分割数および選点数は相互に密接な関係があり, その選び方が重要となるが, これらの諸元については前報⁽¹⁴⁾と同じとした。すなわち, 選点数は対称性を考慮して $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で 3° おきに 61 点とし, 熱源は図4に示すように, 円孔内部の半径 c の半円周上に分布させた。この半径 c の大きさ, 熱源の数および時間分割数は時間 $\tau = \kappa t/a^2$ によって変化し, 表1に示すように選んだ。また, 時間間隔も同様に等間隔とした。以上の諸元を用いて, 式(7)より仮想熱源 q_{jn} を求め, これを用いて式(1)~(3)より温度分布を計算した。精度の判定は(1)各時間分割点での境界条件, 式(7)の成立精度, (2)時間分割数による収束の程度の二点で行った。その結果,

表 1 熱源数, 時間分割数および作用円半径

τ	J	N	c/b
0.002	61	10	0.97
0.01	61	10	0.95
0.05	61	20	0.9
0.1	61	20	0.9
0.2	61	20	0.9
0.5	31	40	0.8
1	31	40	0.8
2	31	40	0.8
10	31	40	0.8
20	31	40	0.8
100	31	40	0.8
300	31	40	0.8

図 4 仮想点熱源の作用点

(1)に関しては、 $\partial T/\partial n$ が零になるべきところ、選んだすべての諸元に対して、 $1.0 \times 10^{-5} T_0/a$ 以下であった。(2)に関しては、時間分割を増して計算した温度と二けたの一致を確認した。

計算結果の一例として、 $b/a=0.5$ の場合の等温線の時間経過による変化の様子を図5に示す。

3・2 熱応力 Airyの応力関数によって与えられる応力成分 式(24)に含まれる無限積分はLaguerre-Gaussの数値積分公式を用いて数値積分した。分点数は26点とし、その座標値および重率は山内ら⁽¹⁷⁾により与えられているものを用いた。その結果、直線縁 $y=0$ での $\tau_{xy}(\sigma_y=0)$ の条件は自動的に満足されてい

る)の値は最も悪い場合で $1.0 \times 10^{-4} E\alpha T_0$ 以下であった。

集中荷重 P_j, Q_j の作用点は図6に示すような配置で28点とした。また、最小二乗法適用のための選点数は $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で 3° おきに61点とした。これらの諸元を用いて円孔縁に沿う境界条件、式(35)に最小二乗法を適用し、得られた56元連立一次方程式を解いて P_j, Q_j を求めた。この時、板のポアソン比は $\nu=0.3$ とし、円孔と直線縁との間の距離は $b/a=0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ について計算した。このようにして求めた P_j, Q_j およびすでに求めた熱源 q_{jn} を用いれば、任意点の応力は式(13), (14), 式(17), (24)および式(31), (32)から計算できる。

まず、板主要部の挙動を見る目的で、 $b/a=0.5$ の場合の対称軸(y 軸)に沿う応力の時間経過による変化の様子を図7に示す。ここで、応力はすべて $E\alpha T_0$ で無次元化してある。これは円孔のない半無限板の直線縁を一定温度 T_0 で加熱したときの最大応力である。この図より、 y 軸に沿う σ_x の分布は円孔の存在しない場合の分布 $-E\alpha T_0 \operatorname{erfc}(y/2\sqrt{\kappa t})$ と加熱初期を除いて明らかな相違があり、円孔縁上で著しい応力集中が認められる。この熱応力集中は加熱初期の零から時間経過とともに増加し定常状態で最大値に達する。ここで、定常状態は x 軸方向に一樣に $E\alpha T_0$ で圧縮される等温状態に対応する。この時の応力はすでに鵜戸口⁽¹⁸⁾により解析されているが、そこでは本報で採用した b/a の値に対応する数値例がないので、本手法を用いて新たに計算したものであり、以下に示すすべての結果においても同様である。

一方、 y 軸上 $y/a=0$ での σ_x は加熱初期の値 $-E\alpha T_0$ より時間経過とともにわずかであるが減少し

(a)

(b)

図5 $b/a=0.5$ の時の等温度線

図6 仮想集中荷重の作用点

ていくことがわかる。この様子は直線縁に沿う σ_x の分布を示した図8を見ればいっそう明らかとなる。この図より、直線縁に沿う σ_x は加熱初期には円孔の存在しない場合の一定値 $-EaT_0$ であるが、時間経過とともに最小断面部 $x/a=0$ でこの値より減少し、むしろ円孔から少し離れた点で増加し始め、定常状態まで単調に増加していく。この挙動は x 軸方向に一樣に圧縮した場合にも認められるが⁽¹⁸⁾、これはリガメント部の曲げ作用によるものである。

次に、 $b/a=0.5$ の場合の円孔縁に沿う接線応力 σ_t の分布を図9に示す。これより、 σ_t は加熱初期では零であり、時間経過とともに最近点 $\theta=180^\circ$ (円孔上の直線縁に最も接近した点) および最遠点 $\theta=0^\circ$ では圧縮で、逆に $\theta=90^\circ$ 近傍では引張りで増加し始め、それぞれ定常状態まで単調に増加していく。応力 σ_t が $\theta=90^\circ$ 近傍で引張応力になるのは、 x 軸方向の圧縮に原因するものである。他の b/a に対する結果は省略した

が、 $b/a=0.5$ の場合とほぼ同様の变化をし、時間 τ の変化に対しても同様の経過をたどる。

図10は最近点Aにおける応力 σ_A の時間経過による変化の様子を b/a をパラメータとして図示したものである。これより、 σ_A はすべての b/a の値に対して加熱初期の零よりほぼ $\tau=10$ までの間は急速に増加し、それ以後はゆるやかに増加していきそれぞれ定常状態で最大値に達する。これらの結果は静的強度設計のみならず、直線縁で繰返し熱荷重を受ける場合の熱疲労の基礎的資料としても役立つと思われる。

図中の表は定常状態すなわち x 方向に一樣に EaT_0 で圧縮された場合の σ_A の値を示したものである。この問題はすでに双極座標を用いて厳密に解かれているが⁽¹⁸⁾、本報で採用した b/a の値に対応する数値例がないため、表中の値は本手法を用いて新たに計算したものである。本手法の精度を確認するため、文献(18)に採用されている $a/b=1.185$ ($b/a=0.84$) から 2.577 (0.39) までの6個の値に対して本手法で計算した σ_A と比較してみると、 $a/b=1.185$ で二けたその他の a/b の値に対しては三〜四けたまで完全に一致した。これは円孔に沿う境界条件の成立精度が σ_n, τ_{nt} と $1.0 \times 10^{-3} EaT_0$ 以下であることとよく対応している。したがって、表中の値も同程度の有効けた数が得られているものと思われる。

図7 $b/a=0.5$ の時の y 軸上の応力 σ_x の分布

図8 $b/a=0.5$ の時の直線縁上の応力 σ_x の分布

図9 $b/a=0.5$ の時の接線応力 σ_t の分布

図 10 熱応力集中係数の時間変化

4. 結 論

断熱された一円孔を有する半無限板の直線縁を一定温度で加熱する場合の非定常熱応力問題を、前報⁽¹⁴⁾と同じ手法を用いて解析し、円孔と直線境界との干渉の影響を明らかにした。

主な結果を要約すれば次のとおりである。

(1) 温度計算において高精度の解を得るためには、仮想熱源の作用位置およびその数、時間間隔および選点数の選び方が重要となるが、本報で用いた断熱条件に対しても、前報の温度指定の場合と同じ諸元で

よいことがわかった。

(2) 提案した手法の有効性、柔軟性、高精度が本報の問題を通して新たに確認できた。

(3) 極大応力は直線縁上の円孔からわずかに離れた点、最近点 $\theta=180^\circ$ 、最遠点 $\theta=0^\circ$ および $\theta=90^\circ$ 近傍で生じる。加熱初期では直線縁上の極大応力が最大応力、それ以降は最近点での応力が最大応力で、いずれも圧縮で定常状態で最大となる。一方、 $\theta=90^\circ$ 近傍の極大応力は引張りであり定常状態で最大となる。

最後に本研究の数値計算は大阪大学大型計算機センターの ACOS-900 で行ったことを付記する。

文 献

- (1) Jeffery, G. B., *Phil Trans.*, Ser. A, 221 (1920), 265.
- (2) Udoguchi, T., *Proc. 3rd Jpn Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1953), 11.
- (3) Udoguchi, T., *Proc. 4th Jpn Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1954), 157.
- (4) Goodier, J. N. and Florence, A. L., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 16-3 (1963), 273.
- (5) 岩城・宮尾, 機論, 38-310 (昭 47), 1192.
- (6) 岩城, 機論, 39-328 (昭 48), 3585.
- (7) 岩城・宮尾, 機論, 42-363 (昭 51), 3353.
- (8) Tsuji, M. and Oda, M., *J. Thermal Stresses*, 2-2 (1979), 215.
- (9) 辻・ほか 2 名, 機論, 46-405, A (昭 55), 514.
- (10) Miskioglu, I. and Burger, C. P., *J. Thermal Stresses*, 4-1 (1981), 91.
- (11) 竹内・山田, 機論, 45-398, A (昭 54), 1239.
- (12) Yamada, K. and Takeuti, Y., *Nucl. Eng. Des.*, 53-1 (1979), 71.
- (13) Yamada, K., *J. Thermal Stresses*, 3-4 (1980), 461.
- (14) 山田・竹内, 機論, 50-460, A (昭 59).
- (15) Erdélyi, A., *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1 (1954), McGraw-Hill, 72 ページの (1) および 96 ページの (6).
- (16) 森口, 2 次元弾性論, (昭 32), 岩波書店.
- (17) 山内・ほか 2 名, 電子計算機のための数値計算法 III, (昭 47), 培風館.
- (18) 鶴戸口, 機論, 13-44 (昭 22), 17.

討 論

〔質問〕 宮 尾 嘉 寿〔富山大学工学部〕

前報の手法を断熱境界に適用し、その結果の精度の確認など有益な研究と思われる。

(1) 極限の場合として円孔が直線縁に接する場合は本手法によって計算できるか。

(2) 今後の問題として円孔縁が熱伝達の場合等熱条件が異なるものも解析可能か。

〔回答〕 (1) 円孔が直線縁に近づくほど、精度は

悪くなる傾向がある。したがって、その極限の円孔が直線縁に接する場合は、計算不可能と考えている。

(2) 可能である。現在、流体で加熱される大小二円孔をもつ無限板の熱応力の計算をしており、これによると温度指定の場合と同程度の高精度な結果を得ている。これらの結果は、近いうちに発表したいと考えている。