2 円孔を有する無限板の非定常熱応力*

山 田 勝 稔**, 竹 内 洋 一 郎***
Katsutoshi YAMADA, Yoitiro TAKEUTI**Key Words:** Elasticity, Thermal Conduction, Transient Thermal Stress Concentration Factor, Infinite Plate with Two Holes

1. 結 言

非定常熱応力問題の厳密解は簡単な形状の領域のものに限られており、複雑な境界をもつ領域に対しては実験あるいは近似解法にたよらざるをえない。したがって、このような領域における非定常熱応力集中問題を系統的に取扱った従来の研究は数少なく、偏心円孔をもつ円形領域⁽¹⁾、1円孔をもつ帯板⁽²⁾、1円孔あるいは1だ円孔をもつ半無限板⁽³⁾⁽⁴⁾、半円弧切欠きあるいは半だ円切欠きをもつ半無限板⁽⁵⁾⁽⁶⁾などの研究が見られる程度で、過渡的熱負荷を受ける機械部品の設計に資するにはまだ不十分と思われる。

2円孔をもつ無限板の熱応力集中問題を取扱った研究として、鶴戸口⁽⁷⁾および宮尾・岩城^{(8)~(10)}による一連の優れた研究があるが、いずれも定常解析であり、この問題を非定常問題として解析した報告はまだなされていない。

筆者らは先に有孔板における定常熱応力問題をその孔の形状、配列および個数に無関係に解く手法を開発し、これを若干の問題に適用し、この手法の有効なることを示した^{(11)~(13)}。

本研究は、この手法を非定常熱応力問題にまで拡張する方法を示し、適用例として、2円孔をもつ無限板において各円孔縁を一定温度で加熱する場合の基本問題を取り上げ、非定常温度場における2円孔間の干渉の影響を明らかにしたものである。

2. 解 析

図1に示すような等径の2円孔を有する無限板において、各円孔縁を一定温度 T_0 で加熱する場合の非定常熱応力問題を解析する。円孔の半径は b 、その中心間距離は $2a$ とし、 x 軸は中心間距離を2等分する軸に、 y 軸は2円孔の中心を結ぶ軸に沿って定める。

2.1 温度分布 最初、板の温度は零とし、ある瞬間 $t=0$ より各円孔縁を一定温度 T_0 で加熱し始め、以後この温度を保持する。また、板表面からの熱放散は無視するとする。この時、求める温度分布は x 軸、 y 軸に関して対称となり、次の諸式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

図1 2円孔を有する無限板

* 昭和57年11月4日 九州支部熊本地方講演会において講演、原稿受付 昭和58年6月25日。

** 正員、徳島大学工業短期大学部 (〒770 徳島市南常三島町2-1)。

*** 故 (元近畿大学)。

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \quad (\text{円孔縁上}, t > 0) \\ T &= 0 \quad (\text{無限遠}, t > 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$T = 0 \quad (t = 0) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 κ は温度伝導率である。以上の諸式を満足する解を求めるために、円孔内部の点に時間間隔 $t_{n-1} < t < t_n (n=1, 2, \dots, N)$ でのみ一様な強さの持続点熱源 q_{jn} を作用させた時の温度を基本解として用いる。ここで熱源 q_{jn} は問題の対称性を考慮して、図 2 に示すように円孔内部の点 $(\xi_j, a + \eta_j)$ とこれと x 軸、 y 軸および原点に関して対称な点に作用させる。最初板の温度は零であり、時間 $t = t_{n-1}$ より強さ 1 の熱源を加え始めると、それより t 時間後の温度分布は次式で与えられる⁽¹⁴⁾。

$$T_{j,n-1} = -\frac{1}{4\pi\kappa} \sum_{k=1}^4 E_i \left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_{n-1})} \right) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $E_i(\quad)$ は指数積分関数であり

$$E_i(-x) = \int_{\infty}^x \frac{e^{-u}}{u} du \dots\dots\dots (5)$$

R_{kj} は熱源の作用位置からの距離で、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R_{1j}^2 &= (x - \xi_j)^2 + (y - a - \eta_j)^2 \\ R_{2j}^2 &= (x - \xi_j)^2 + (y + a + \eta_j)^2 \\ R_{3j}^2 &= (x + \xi_j)^2 + (y - a - \eta_j)^2 \\ R_{4j}^2 &= (x + \xi_j)^2 + (y + a + \eta_j)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

時間間隔 $t_{n-1} < t < t_n$ でのみ熱源が作用する時は、時間 $t = t_n$ より強さ -1 の熱源を作用させた時の温度を式(4)に重ね合せればよいので、熱源の総数を J とすれば、求める温度分布は次式となる。

$$T = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (T_{j,n-1} - T_{jn}) \dots\dots\dots (7)$$

図 2 仮想点熱源

式(7)はすでに問題の対称性と円孔縁の境界条件を除いた式(1)~(3)の諸式を満足している。あとは円孔縁の境界条件を満足するように熱源の強さ q_{jn} を決定すればよい。この条件は時間 t に無関係に成立しなければならないが、今時間 t で温度分布を求めるとしてこれを N 分割し、各時間分割点 $t = t_m (m=1, 2, \dots, N)$ でのみこの条件を満足させるとする。そしてさらに、各時間分割点では、対称性を考慮してどれか一つの円孔の半円周 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 上に選ばれた I 個の点 (図 1)

$$x_i = b \sin \theta_i, \quad y_i = a + b \cos \theta_i \dots\dots\dots (8)$$

でこの条件を満足させるとすれば、式(7)を式(2)の第 1 式に代入して、 q_{jn} に関する次の一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J C_{ijm}^{(m)} q_{jm} \\ = T_0 - \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{m-1} C_{ijn}^{(m)} q_{jn} \\ (i=1, 2, \dots, I; m=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} C_{ijn}^{(m)} &= T_{j,n-1}(x_i, y_i, t_m) \\ &\quad - T_{jn}(x_i, y_i, t_m) \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

式(9)は J 個の未知量 $\{q_m\}$ に対する I 個の一次方程式よりなり、これに最小二乗法を適用し、得られた連立一次方程式を解いて $\{q_m\}$ が求まる。この手順を N 回繰返してすべての q_{jn} が求まると、任意点の温度分布は式(7)より計算できる。

2.2 熱弾性変位ポテンシャル 熱弾性変位ポテンシャルを Φ とすれば、平面応力の場合、 Φ は次式によって支配される。

$$\nabla^2 \Phi = (1+\nu)\alpha T \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 ν はポアソン比、 α は線膨張係数である。 Φ で記述される応力成分は次の公式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_y = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \bar{\tau}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 G は横弾性係数である。式(11)の一般解は⁽¹⁵⁾

$$\Phi = (1+\nu)\alpha\kappa \int_0^t T dt + \Phi_0 + t\Phi_1 \dots\dots\dots (13)$$

式(13)に式(4)、(7)を代入すると、

$$\Phi = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (\Phi_{j,n-1} - \Phi_{jn}) \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_{jn} &= \int_{t_n}^t - \sum_{k=1}^4 E_i \left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) dt + \Phi_0 + t\Phi_1 \\ &\dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

上式右辺第1項において変数変換 $u = R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)$ を行い、部分積分法を繰返し用いて積分を実行し、熱源の作用点 $R_{kj}=0$ において半径方向変位が零になる条件 $\partial\Phi_{jn}/\partial R_{kj}=0$ より Φ_0, Φ_1 を求めると、 Φ_{jn} として次式を得る。

$$\Phi_{jn} = \sum_{k=1}^4 (t-t_n) \left[2 \log R_{kj} - e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)} - \left(1 + \frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) E_i \left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) \right] \dots\dots\dots (16)$$

式(14)、(16)を式(12)に代入し、 $2G=E/(1+\nu)$ なる関係式を用いると、 Φ で記述される応力成分として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{E\alpha}{8\pi\kappa} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (U_{j,n-1} - U_{jn}) \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{E\alpha}{8\pi\kappa} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (V_{j,n-1} - V_{jn}) \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{E\alpha}{8\pi\kappa} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N q_{jn} (W_{j,n-1} - W_{jn}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} U_{jn} &= \sum_{k=1}^4 \left[E_i \left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) - \frac{4\kappa(t-t_n)}{R_{kj}^2} (1-F_{kj}) (1-e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)}) \right] \\ V_{jn} &= \sum_{k=1}^4 \left[E_i \left(-\frac{R_{kj}^2}{4\kappa(t-t_n)} \right) - \frac{4\kappa(t-t_n)}{R_{kj}^2} (1-E_{kj}) (1-e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)}) \right] \\ W_{jn} &= \sum_{k=1}^4 \frac{4\kappa(t-t_n)}{R_{kj}^2} G_{kj} (1-e^{-R_{kj}^2/4\kappa(t-t_n)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

および

$$\left. \begin{aligned} E_{1j} &= 2(x-\xi_j)^2/R_{1j}^2, \quad E_{2j} = 2(x-\xi_j)^2/R_{2j}^2, \quad E_{3j} = 2(x+\xi_j)^2/R_{3j}^2, \quad E_{4j} = 2(x+\xi_j)^2/R_{4j}^2 \\ F_{1j} &= 2(y-a-\eta_j)^2/R_{1j}^2, \quad F_{2j} = 2(y+a+\eta_j)^2/R_{2j}^2, \quad F_{3j} = 2(y-a-\eta_j)^2/R_{3j}^2, \quad F_{4j} = 2(y+a+\eta_j)^2/R_{4j}^2 \\ G_{1j} &= 2(x-\xi_j)(y-a-\eta_j)/R_{1j}^2, \quad G_{2j} = 2(x-\xi_j)(y+a+\eta_j)/R_{2j}^2, \quad G_{3j} = 2(x+\xi_j)(y-a-\eta_j)/R_{3j}^2 \\ G_{4j} &= 2(x+\xi_j)(y+a+\eta_j)/R_{4j}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

応力成分、式(17)は円孔縁が応力自由なる条件を満足しないので、他の応力成分を重ね合せてこの条件を満足させる必要がある。

2・3 円孔縁に残留する応力の除去 応力成分、式(17)が円孔縁で与える表面荷重を除去するために前報^{(11)~(13)}の方法を用いる。すなわち、円孔内部にのみ集中荷重を作用させ、これによる応力で円孔縁が応力

自由となるように、集中荷重の大きさを決定する。この集中荷重は問題の対称性を考慮して、図3に示すように、円孔内部の点 $(\xi_j, a+\eta_j)$ とこれと x 軸、 y 軸および原点に関して対称な点に互いに x 軸、 y 軸に関して対称に作用させる。ところで、無限板内の一点

$$z_j = \xi_j + i(a+\eta_j) \dots\dots\dots (20)$$

に集中荷重 (P_j, Q_j) が作用する時の複素応力関数はすでに森口⁽¹⁶⁾により次のように求まっている。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= M_j \log(z-z_j) \\ \psi(z) &= N_j(z-z_j) \log(z-z_j) \\ &\quad - \bar{z}_j M_j \log(z-z_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} M_j &= -\frac{1+\nu}{8\pi} (P_j + iQ_j) \\ N_j &= \frac{3-\nu}{8\pi} (P_j - iQ_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

複素応力関数 $\varphi(z), \psi(z)$ で記述される応力成分は次の公式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= 2\operatorname{Re}[\varphi'(z)] - \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \\ \bar{\sigma}_y &= 2\operatorname{Re}[\varphi'(z)] + \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \\ \bar{\tau}_{xy} &= \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

図3 仮想集中荷重

他の3点に作用する集中荷重による応力も同様に求まるが、式(21)を式(23)に代入して得られる応力成分からただちに得ることができる。例えば、点 z_j と x 軸に関して対称な点 $(\xi_j, -a-\eta_j)$ に作用する集中荷重 $(P_j, -Q_j)$ による応力は上述の応力において Q_j を $-Q_j$ で、 $a+\eta_j$ を $-a-\eta_j$ で置き換えればよい。このようにして得られた応力成分を重ね合せたもののうち集中荷重 P_j によるものを $\bar{\sigma}_{xp}$, $\bar{\sigma}_{yp}$, $\bar{\tau}_{xyp}$, 集中荷重 Q_j によるものを $\bar{\sigma}_{xq}$, $\bar{\sigma}_{yq}$, $\bar{\tau}_{xyq}$ で表し、作用点の総数を J とすれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xp} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)P_j}{2\pi} \left[\frac{X_1^3}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{X_1^3}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2^3}{(X_2^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2^3}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)P_j}{4\pi} \left[\frac{X_1}{X_1^2+Y_1^2} + \frac{X_1}{X_1^2+Y_2^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_1^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_2^2} \right] \\ \bar{\sigma}_{yp} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)P_j}{2\pi} \left[\frac{X_1 Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{X_1 Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2 Y_1^2}{(X_2^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2 Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)P_j}{4\pi} \left[\frac{X_1}{X_1^2+Y_1^2} + \frac{X_1}{X_1^2+Y_2^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_1^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_2^2} \right] \\ \bar{\tau}_{xyp} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)P_j}{2\pi} \left[\frac{X_1^2 Y_1}{(X_1^2+Y_1^2)^2} + \frac{X_1^2 Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} - \frac{X_2^2 Y_1}{(X_2^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2^2 Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)P_j}{4\pi} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} + \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} - \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} - \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{2\pi} \left[\frac{X_1^2 Y_1}{(X_1^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_1^2 Y_2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2^2 Y_1}{(X_2^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2^2 Y_2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} - \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right] \\ \bar{\sigma}_{yq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{2\pi} \left[\frac{Y_1^3}{(X_1^2+Y_1^2)^2} - \frac{Y_2^3}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{Y_1^3}{(X_2^2+Y_1^2)^2} - \frac{Y_2^3}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi} \left[\frac{Y_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{Y_2}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{Y_1}{X_2^2+Y_1^2} - \frac{Y_2}{X_2^2+Y_2^2} \right] \\ \bar{\tau}_{xyq} &= -\sum_{j=1}^J \frac{(1+\nu)Q_j}{2\pi} \left[\frac{X_1 Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_1 Y_2^2}{(X_1^2+Y_2^2)^2} + \frac{X_2 Y_1^2}{(X_2^2+Y_1^2)^2} - \frac{X_2 Y_2^2}{(X_2^2+Y_2^2)^2} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^J \frac{(1-\nu)Q_j}{4\pi} \left[\frac{X_1}{X_1^2+Y_1^2} - \frac{X_1}{X_1^2+Y_2^2} + \frac{X_2}{X_2^2+Y_1^2} - \frac{X_2}{X_2^2+Y_2^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、

$$X_1 = x - \xi_j, \quad X_2 = x + \xi_j, \quad Y_1 = y - a - \eta_j, \quad Y_2 = y + a + \eta_j \quad \dots\dots\dots (26)$$

以上で集中荷重 P_j, Q_j による各応力成分が求まった。

次に境界条件について考える。式(17), (18)および式(24), (25)を見れば、いずれも無限遠で零になることがわかる。あとは、孔の境界条件を満足するように集中荷重 P_j, Q_j を決定すればよい。この境界条件は、図1を参照して次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_{xp} + \bar{\sigma}_{xq}) \sin^2 \theta + (\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_{yp} + \bar{\sigma}_{yq}) \cos^2 \theta + 2(\bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xyp} + \bar{\tau}_{xyq}) \sin \theta \cos \theta &= 0 \quad (\sigma_n = 0) \\ (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_{xp} + \bar{\sigma}_{xq} - \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_{yp} - \bar{\sigma}_{yq}) \sin \theta \cos \theta + (\bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xyp} + \bar{\tau}_{xyq})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) &= 0 \quad (\tau_{nt} = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 σ_n, τ_{nt} はそれぞれ円孔縁上の法線応力、接線応力である。すでに求めた解はすべて問題の対称性を満足しているので、式(27)はどれか一つの半円周上で満足されればよい。今、半円周($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)上に選ばれた I 個の点で式(27)を満足させるとすれば、 $2J$ 個の未知数 P_j, Q_j に対して $2I$ 個の条件式が得られる。これに最小二乗法を適用して得られた連立方程式を解いて P_j, Q_j を決定すればよい。

3. 数値計算と結果の考察

3.1 温度分布 数値計算においては、仮想熱源の作用位置とその数、時間分割数および選点数は相互に密接な関係があり、その選び方が重要となる。今、時間間隔として等間隔

$$\Delta \tau = \tau / N, \quad \tau_n = n \Delta \tau, \quad \tau = \kappa t / a^2 \dots\dots\dots (28)$$

を採用すれば、式(9), (10)は式(4)を用いて次のように書ける。

$$\sum_{j=1}^J \bar{C}_{ijn}^{(m)} \bar{q}_{jm} = 1 - \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{m-1} \bar{C}_{ijn}^{(m)} \bar{q}_{jn} \quad (i=1, 2, \dots, I; m=1, 2, \dots, N) \quad (29)$$

$$\bar{C}_{ijn}^{(m)} = \sum_{k=1}^4 \left[E_i \left(-\frac{\bar{R}_{kj}^2}{4(m-n)\Delta\tau} \right) - E_i \left(-\frac{\bar{R}_{kj}^2}{4(m-n+1)\Delta\tau} \right) \right] \quad (30)$$

ここで、 $\bar{R}_{kj} = R_{kj}/a^2$ 、 $\bar{q}_{in} = q_{in}/4\pi\kappa T_0$ である。特に、 $n=m$ の時、式(30)は

$$\bar{C}_{ijn}^{(m)} = -\sum_{k=1}^4 E_i \left(-\frac{\bar{R}_{kj}^2}{4\Delta\tau} \right) \quad (31)$$

となりすべての m に対して等しくなる。漸化式(29)を解いて順次 $\{\bar{q}_m\}$ を求める時、 $\{\bar{q}_m\}$ が発散することがある。発散しないためには、式(29)に最小二乗法を適用して得られる連立一次方程式の行列式の値が 1 以上になるように係数マトリックス式(31)の $\bar{R}_{kj}^2/4\Delta\tau$ を

適当に選ぶことが重要となる。図 4 に示すように、仮想熱源を円孔内部の半径 c の円周上に分布させると、得られる連立一次方程式は対角優位となり、その行列式の値は、ある熱源作用位置から最短距離にある選点までの距離を $\bar{R}_{\min}$ とすれば、 $\bar{R}_{\min}^2/4\Delta\tau$ によってほぼ決まる。数値計算の結果、発散しないための条件は

$$\bar{R}_{\min}^2/4\Delta\tau < 0.5 \quad (32)$$

であることがわかった。この条件より、 $\Delta\tau$ が小さくなれば $\bar{R}_{\min}$ も小さく、したがって熱源作用円をより円孔に近く取らなければならないが、一方 $\Delta\tau$ が小さくなれば温度上昇は熱源作用位置のごく近傍に限られ、選点間で境界条件が十分に満足されず、そのため熱源をより多く作用させる必要がある。以上のことを考慮し、精度の判定を(1)各時間分割点での孔の境界条件の成立精度、(2)時間分割数による収束の程度の二点で確認し、この総合誤差が 1% 以下になることを目標に試行錯誤を繰返したのち、選点数は対称性を考慮して $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で 3° おきに 61 点を選び、熱源の数とその作用円半径および時間分割数として表 1 に示す値を選んだ。ここで、十分大きな時間 τ に対して時間分割数をそれに伴って大きくとる必要のないのは興味がある。なお、図 4 は熱源作用位置が $c/b=0.8$ で 6° おきに 31 点を選んだ場合を図示してある。

以上の諸元を用い、式(29)から仮想熱源 $\bar{q}_{jn}$ を求めれば、板の任意点の温度分布は式(7)から計算できる。一例として、 $b/a=0.5$ の場合の y 軸上の温度分布の時間経過を図 5 に等温線の時間経過を図 6 に示す。

3.2 熱応力 集中荷重 P_j 、 Q_j の作用点は図 7 に示すような配置で 28 点とした。また、最小二乗法適用のための選点数は温度問題と同じ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で 3° おきに 61 点とした。これらの諸元とすでに求めた熱源 $\bar{q}_{jn}$ を用いて応力境界条件式(27)に最二自乗法を適用し、得られた 56 元の連立一次方程式を解いて

表 1 熱源数、時間分割数および作用円半径

τ	J	N	c/b
0.002	61	10	0.97
0.01	61	10	0.95
0.05	61	20	0.9
0.1	61	20	0.9
0.2	61	20	0.9
0.5	31	40	0.8
1	31	40	0.8
2	31	40	0.8
10	31	40	0.8
20	31	40	0.8
100	31	40	0.8
300	31	40	0.8

図 4 仮想点熱源の作用点

図 5 $b/a=0.5$ の時の y 軸上の温度分布

集中荷重 P_j, Q_j を決定した。この時板のポアソン比は $\nu=0.3$ とした。以上で仮想熱源および集中荷重が求まったので、任意点の応力は式(17)、(18)および式(24)、(25)から計算でき、これらの和が求める応力となる。

まず、 $b/a=0.5$ の場合の y 軸上の応力 σ_x の分布の時間経過を図8に示す。ここで、応力はすべて EaT_0 で無次元化してある。 EaT_0 は1円孔を有する無限板の円孔縁を一定温度 T_0 で加熱した時の円孔縁上の応力であり、これは時間経過によらず一定でかつ最大応力である。応力 σ_y の分布はその値が小さいので省略した。

図9に円孔縁に沿う接線応力 σ_t の分布の様子を示

す。これより応力 σ_t は時間および円孔間距離 b/a の値によって複雑に変化することがわかる。まず、加熱の瞬間 $\tau=0$ では加熱による円孔の膨張が完全に拘束されるため σ_t は円孔に沿って一定で $-EaT_0$ になることに注意する。それ以降の応力 σ_t の挙動を考察するには b/a の値によって二つの場合に分けて考えると都合がよい。まず、 $b/a=0.3\sim 0.6$ の範囲では、 $\tau=0.01$ あたりから2円孔間の干渉の影響が現れ始め、 $\theta=100^\circ$ 付近で EaT_0 より大きくなり、逆に最近点 $\theta=180^\circ$ および最遠点 $\theta=0^\circ$ で EaT_0 より小さくなる。さらに時間が経過するにつれこの傾向は著しくなり、 $\tau=0.2\sim 1.0$ でピークに達したのちさらに時間が経過するにつれ再び一定値 EaT_0 にほぼ近づいてくる。このように最大応力が最近点 $\theta=180^\circ$ でなく $\theta=100^\circ$ 付近で生じ、かつ加熱開始からある時間経過後に起こりその後再び減少するこの挙動には興味がある。これは次のように説明できると思われる。加熱初期 $\tau=0\sim 1.0$ ではリガメント部の温度上昇による熱膨張が他

図6 $b/a=0.5$ の時の等温度線

図7 仮想集中荷重の作用点

図8 $b/a=0.5$ の時の y 軸上の応力 σ_x の分布

の部分に比べて大きく、かつ x 軸に沿う面は y 方向には剛体として作用するため、円孔は x 軸方向に細長い円形に変形し、さらに時間が経過するにつれこの円形に変化する傾向が弱まるためと思われる。一方、 $b/a=0.7\sim 0.9$ の範囲すなわち円孔が互いに接近するにつれこの様子は少し違ってくる。この場合も加熱初期ではやはり $\theta=100^\circ$ 付近の応力が最大であるが、時間経過に伴って最近点 $\theta=180^\circ$ での応力が増加し始め、ついにはこの点での応力が最大となる。この立上り傾向は円孔が接近するにつれ著しくなりかつ早い時間で起きるようになる。しかし、 $b/a=0.6$ ではまだ $\tau=0.2$ における $\theta=100^\circ$ 付近の応力がすべての時間を通じて最大であり、 $b/a=0.7$ からはじめて最近点での応力が最大となり、この値は時間経過とともに大きくなる。この立上りはリガメント部のほぼ一様な温度上昇による熱膨張がまわりの低温部に拘束されるための圧縮による 2 円孔間の応力集中によるものである。

図 10 は最近点 A における応力 σ_A の時間経過による変化の様子を b/a をパラメータとして示したもので

ある。これより σ_A は加熱瞬間の値 $E\alpha T_0$ から時間経過とともにまず減少し最小値に達したのち、それからかなり急速に増大し始め、そしてほぼ $\tau=100$ あたりからその上昇速度はゆるやかとなる。この σ_A がまず減少する挙動はすでに説明したようにリガメント部の熱膨張により円孔がだ円孔に変形するためである。

応力問題の精度の判定は円孔の境界条件式 (27) の成立精度で行えば十分である。円孔縁に沿って応力 σ_n , τ_{nt} が零になるべきところ、円孔縁に沿って計算された σ_n , τ_{nt} は最も悪い $b/a=0.9$ の場合でともに $0.6 \times 10^{-3} E\alpha T_0$ 以下であった。

図 9 円孔縁に沿う接線応力 σ_t の分布

図 10 熱応力集中係数の時間変化

4. 結 論

非定常熱応力問題の新しい解析手法を示し、これを各円孔縁を一定温度で加熱する場合の2円孔を有する無限板の問題に適用し、非定常温度場における2円孔間の干渉の影響を明らかにした。

主な結果を要約すれば次のとおりである。

(1) 本解析手法に基づく数値計算は時間 τ およ

び円孔間距離 b/a の広い範囲の値に対して安定しておりかつ高精度の解を与える。また、この手法は孔の形状、配列および個数にかかわらず適用できる。

(2) $b/a=0.3\sim0.6$ の範囲では、最大応力は円孔縁上の最近点 $\theta=180^\circ$ でなく $\theta=100^\circ$ 付近で生じ、かつ加熱開始からある時間経過後に起こり、それ以降は再び減少する。

(3) $b/a=0.7\sim0.9$ の範囲では、最大応力は常識どおり最近点で生じ、その値は円孔が接近するほどかつ時間が経過するほど大きくなる。

最後に、本研究の数値計算は大阪大学大型計算機センターの ACOS-900 で行ったことを付記する。

文 献

- (1) 辻・ほか2名, 機論, 46-405, A (昭55), 514.
- (2) 岩城・ほか2名, 機論, 46-403, A (昭55), 311.
- (3) Tsuji, M. and Oda, M., *J. Thermal stresses*, 2-2 (1979), 215.
- (4) Miskioglu, I. and Burger, C. P., *J. Thermal stresses*, 4-1 (1981), 91.
- (5) 古川・ほか3名, 機論, 41-347 (昭50), 1975.
- (6) 古川・ほか3名, 機論, 48-433, A (昭57), 1169.
- (7) Udoguchi, T., *Rroc. 4th Jpn. Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1954), 157.
- (8) 岩城・宮尾, 機論, 38-310 (昭47), 1192.
- (9) 岩城, 機論, 39-328 (昭48), 3585.
- (10) 岩城・宮尾, 機論, 42-363 (昭51), 3353.
- (11) 竹内・山田, 機論, 45-398, A (昭54), 1239.
- (12) Yamada, K. and Takeuti, Y., *Nucl. Eng. Des.*, 53-1 (1979), 71.
- (13) Yamada, K., *J. Thermal stresses*, 3-4 (1980), 461.
- (14) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, (1959), 261, Clarendon Press.
- (15) 竹内, 熱応力, (昭46), 45, 日新出版.
- (16) 森口, 2次元弾性論, (昭32), 岩波書店.