半 だ 円 表 面 き 裂 の 全 面 塑 性 解*

矢 川 元 基**, 植 田 浩 義***, 高 橋 由 紀 夫****

Fully Plastic Solution for a Semi-Elliptical Surface Crack

by Genki YAGAWA, Hiroyoshi UEDA, and Yukio TAKAHASHI

To estimate the possibility of LBB (Leak-Before-Break), one of the important design concept for the balance of the safety margin and the economy of the structure, it is necessary to investigate the behavior of the inner surface crack in the structure. In this paper, as the preliminary analysis for LBB of high ductile material, the fully plastic solution of a semi-elliptical surface crack ($a/c=0.6$, $a/t=0.2$) in the infinite plate under tension is obtained. Several interesting trends are recognized from the solution obtained. First, the dependence of the elastic stress intensity factor to Poisson's ratio is small in this case. In the second place, as the power hardening exponent increases, the fully plastic solution of J -integral has the tendency to increase steeply with the eccentric angle of the crack.

Key Words: Fracture, Nonlinear Fracture Mechanics, Fully plastic Solution, J -integral, Virtual Crack Extension Method, Surface Crack

1. 緒 言

高延性材料からなる圧力容器あるいは配管に内部表面き裂の存在が予想される時、き裂進展による板厚の貫通過程が安定的であれば、究極的破断以前に内部流体の漏れが検知されることから、欠陥の発見ならびに補修が可能となる。Irwin⁽¹⁾により提案されたこの設計思想は、破断前漏えい(LBB: Leak-Before-Break)と呼ばれ、原子力プラントなどの安全裕度と経済性のバランスを論じるうえできわめて重要である。

破断前漏えいを実際に適用するには、高延性材料中の内部表面き裂の貫通過程を解析し、それが安定的であることが実証されなければならず、非線形破壊力学的評価が有効であると考えられる。すでにある解析例として、Parks⁽²⁾、三好⁽³⁾は、ラインスプリングモデルにより、平板あるいは円筒の表面き裂について J 積分を求め、表面き裂進展解析も試みている。また、Erdogan⁽⁴⁾は、積分方程式により求めた円筒の周方向貫通き裂に関する弾性解を補正し、表面き裂のき裂開

口変位を解析した。さらに、Zahoor⁽⁵⁾は、全断面降伏を仮定した式により、曲げ荷重を受ける円筒の周方向表面き裂の J 積分を評価し、簡易的に不安定破壊を論じている。

著者ら⁽⁶⁾は、非線形破壊力学的評価法の一例として Shih⁽⁷⁾⁽⁸⁾により提案された全面塑性解を用いる手法に着目し、これを求める三次元有限要素法を開発した。また、引張荷重を受ける円筒の周方向貫通き裂進展問題に適用することによりその有効性を確認したが、この手法は、パラメトリックな解析に適する点から破断前漏えい評価にも有力であると考えられる。本論文では、このことを考慮して、一様引張力を受ける無限平板中の半だ円表面き裂に関する全面塑性解を求め、加工硬化指数が解に与える影響を調べた。同時に、線形弾性問題については、Raju-Newman⁽⁹⁾の弾性解⁽⁹⁾と比較した。

2. 全 面 塑 性 解

本論文において、全面塑性解は、全ひずみ理論および次のべき乗構成則を基礎としている。

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} = \kappa \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^n \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$ はそれぞれ Mises 形相当ひずみ, 相当

* 昭和 59 年 11 月 30 日 第 929 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 59 年 5 月 31 日。

** 正員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。

*** 学生員, 東京大学大学院。

**** 正員, (財)電力中央研究所 (〒201 柏江市岩戸北 2-11-1)。

応力であり、材料定数 $\epsilon_0, \sigma_0, \kappa, n$ のうち、 n は加工硬化指数である。このように、材料の塑性挙動を非線形弾性と近似すれば、 J 積分および材料中の任意の点における変位 D は、以下のように無次元化される。

$$J = \kappa \sigma_0 \epsilon_0 l \bar{J} (P/P_0)^{n+1} \dots\dots\dots (2)$$

$$D = \kappa \epsilon_0 l \bar{D} (P/P_0)^n \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 l は代表長さ、 P は荷重である。 P_0 は参照力と呼ばれ、解析の対象となる形状および σ_0 に依存する定数である。以下では、無次元化された値 $\bar{J}$ および $\bar{D}$ を特に全面塑性解と呼ぶ。 $\bar{J}$ および $\bar{D}$ が荷重 P に依存しないことから、これを用いたき裂進展解析が可能となるが、その詳細については、文献⁽⁶⁾に示されている。

3. 有限要素法

3.1 ひずみの非圧縮性および有限要素 全面塑性条件下において有限要素解析を行い全面塑性解を求めるが、その際、ひずみの非圧縮性を満たすうえでの問題が生じる。本法では、これを処罰法および選択的低減積分法により処理している。また、有限要素として16節点アイソパラメトリック六面体要素を使用しており、選択的低減積分法における通常積分点は $3 \times 2 \times 2$ 点、低減積分点は $2 \times 2 \times 1$ 点とした。図1に節点と各積分点の関係を示す。

3.2 仮想き裂進展法による J 積分の評価 本法では、収束解に仮想き裂進展を与え、式(4)を用いて J 積分値を評価している。

$$J = -\frac{1}{\delta A} \sum \int (W \delta \det[J] + {}_I \sigma_I [\delta B] \{d\} \det[J]) d\xi d\eta d\zeta \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 δ は仮想き裂進展量 δA を与えたときの変化を意味し、 $\sum$ はその際変形する要素に関する総和、積分は要素内積分である。 W および $\{d\}$ は、それぞれ、ひずみエネルギー密度および節点変位、 (ξ, η, ζ) および $\det[J]$ は、アイソパラメトリック変換の基準座標およびヤコビアンである。仮想き裂進展は、各節点をだ円の径方向に変位させることにより得られ、求められ

図1 16節点アイソパラメトリック六面体要素

た J 積分値をその節点上での値とみなし離心角 ϕ の関数 $J(\phi)$ として整理した。その様子を図2に示す。ただし、き裂先端要素の計算値への寄与分を小さくするため、変形させる要素は、き裂先端4要素とその周辺の12要素とした。

4. 解析

4.1 解析対象 一様引張力を受ける半だ円表面き裂付き平板およびその各寸法を図3に示す。図3において、 σ は引張応力、 a および c はだ円の短半径および長半径、 t は板厚、 h および b は、それぞれ、平板の半長および半幅である。解析は、 $a/c=0.6$, $a/t=0.2$ と固定して行う。 h および b については、この解析モデルより得られる解を無限平板の解に近似するために、文献⁽⁹⁾に従って、 $h/a=b/a=5$ とした。

4.2 要素分割 対称性から、有限要素解析は図3の1/4について行った。用いた要素分割〔要素数426、節点数1690(自由度数5070)〕を図4に展開図で示す。

4.3 弾性解(ポアソン比の影響) まず、ポアソン比 $\nu=0.3$ ならびに 0.5 (非圧縮性) の弾性解 ($n=1$) を求め、Raju-Newman の解⁽⁹⁾と比較した。本法により求められる J 積分を、平面ひずみ状態の関係式

$$K = \sqrt{EJ/(1-\nu^2)} \dots\dots\dots (5)$$

の仮定により応力拡大係数 K に換算し、整理式として

$$M = K/(\sigma\sqrt{\pi a}/\Phi_0) \dots\dots\dots (6)$$

図2 仮想き裂進展法

図3 一様引張力を受ける半だ円表面き裂付き平板

を用いたものを図5に示す。ただし、式(5)においてポアソン比 ν およびヤング係数 E は、体積膨張率(処罰係数) β および剛性率 G との関係

$$\nu = \frac{3\beta - 2G}{6\beta + 2G} \dots\dots\dots (7)$$

$$E = \frac{18\beta G}{6\beta + 2G} \dots\dots\dots (8)$$

において、 G を固定していることから、 β が与えられることにより計算される。また、式(6)の Φ_0 は、 a/c により定まる第2種完全だ円積分である。なお、選択的低減積分法は $\nu=0.5$ においてのみ用いており、 $\nu=0.3$ の解は、通常積分で求められている。

$\nu=0.3$ の場合、本法の解は ϕ の全域にわたって誤差4%以内でRaju-Newmanの解と一致している。これより、本法が圧縮性の弾性解を求める通常の有限要素法として問題はないと考えられる。ただし、Raju-Newmanの解が弾性特異要素を用いているのに対し、本法では全面塑性解を求めることが目的であるためこれを用いていない。約4%の精度低下は、このことに起因するものと予想される。

一方、選択的低減積分法を用いた $\nu=0.5$ の解は、ほぼ $\nu=0.3$ の解に等しい値となっている。二次元問題において応力拡大係数はポアソン比に依存しないが、図5の結果は、三次元問題としての本問題においても、応力拡大係数のポアソン比への依存性がわずか

であることを示している。なお、通常積分により非圧縮性の解を求めてみたところ、およそ40%の精度低下を示し、妥当な解は得られなかった。このことから、非圧縮性条件下での選択的低減積分法が、本問題においても有効であることが確認された。

4.4 全面塑性解 無次元化された全面塑性解 H 、 V_1 および V_2 を次式で定義する。

$$J = \kappa \sigma_0 \varepsilon_0 t H(\phi, a/c, a/t, n) (\sigma/\sigma_0)^{n+1} \dots\dots\dots (9)$$

$$\delta = \kappa \varepsilon_0 t V_1(a/c, a/t, n) (\sigma/\sigma_0)^n \dots\dots\dots (10)$$

$$\Delta_c = \kappa \varepsilon_0 t V_2(a/c, a/t, n) (\sigma/\sigma_0)^n \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 δ および Δ_c は、それぞれ、き裂中央部(図4の節点1)におけるき裂開口変位および残差荷重点変位(き裂の存在による荷重点変位の増加分、節点1の直上にある荷重点の変位より求めた)である。一般に、 H 、 V_1 および V_2 は、 ϕ 、 a/c 、 a/t 、 n の関数となるが、本解析では、 a/c および a/t を固定しているため、 H は ϕ および n の関数、 V_1 および V_2 は n の関数となる。

n を1から5まで1ずつ増加させながら有限要素解析を行い、得られた J 、 δ および Δ_c から、 H 、 V_1 および V_2 を求めた。収束解を求める方法は文献(6)と同様であり、 n が1増加するごとに2回の反復計算を要した。

まず、全面塑性解 H を表1に示す。また、そのグラフ表示を図6(a)、(b)に示す。

図6(a)は、 n をパラメータとして H と ϕ の関係を示した図であり、 n の増加、すなわち加工硬化の減少とともに表面と内部での値の差が増加する傾向が見られる。また、図6(b)は、 ϕ をパラメータとして H

図4 要素分割

図5 弾性解(ポアソン比の影響)

図 6 全面塑性解 H

と n の関係を示した図であり、各 ϕ の値において、 H は上に凸の曲線で表される n の単調増加関数となっていることから、剛完全塑性体 ($n \rightarrow \infty$) への漸近傾向を確認することができる。

さらに、全面塑性解 V_1 および V_2 を、表 2 に示す。

5. 結 言

一様引張力を受ける無限平板中の半だ円表面き裂に関する全面塑性解の解析を、 $a/c=0.6$, $a/t=0.2$ のケースについて行い、次の結果が得られた。

(1) 圧縮性の弾性解 ($n=1$, $\nu=0.3$) は、同じケースにおける Raju-Newman の解と誤差 4% 以内で一致した。この誤差は、本解析において弾性特異要素を用いていないことに起因すると考えられる。

表 1 全面塑性解 H

$2\phi/\pi$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	.237	.252	.281	.294	.305
1/9	.244	.294	.323	.344	.361
2/9	.265	.333	.375	.406	.432
3/9	.283	.364	.416	.456	.488
4/9	.306	.400	.458	.504	.542
5/9	.328	.427	.493	.544	.586
6/9	.349	.451	.521	.576	.622
7/9	.367	.470	.542	.599	.647
8/9	.378	.482	.555	.613	.662
1	.382	.486	.559	.618	.667

表 2 全面塑性解 V_1 および V_2

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
V_1	.705	.783	.842	.894	.942
V_2	.129	.211	.299	.388	.477

(2) 非圧縮性の弾性解 ($n=1$, $\nu=0.5$) を処罰法により求める際、選択的低減積分法が有効であった。

(3) 応力拡大係数のポアソン比依存性は、本ケースの場合わずかである。

(4) 全面塑性解 H とだ円離心角 ϕ の関係は $\phi = \pi/2$ で最大となるような上に凸の曲線で表され、加工硬化の減少 (n の増加) とともにそのこう配は急となる。

文 献

- (1) ASTM Committee, *Mater. Res. Stand.*, 1 (1961), 389.
- (2) Parks, D. M., *Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol.*, 103-3 (1981), 246.
- (3) 三好・ほか 2 名, 機講論, No. 840-1 (昭 59-3), 182.
- (4) Erdogan, F. and Delale, F., 文献(2)の 160 ページ.
- (5) Zahoor, A. and Kanninen, M. F., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, 103-3 (1981), 194.
- (6) 矢川・ほか 2 名, 文献(3)の 206 ページ.
- (7) Shih, C. F. and Kumar, V., RP 1237-1, General Electric Company, (1979).
- (8) Shih, C. F. and Needleman, A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 51-1 (1984), 48.
- (9) Raju, I. S. and Newman, Jr., J. C., *Eng. Fract. Mech.*, 11 (1979), 817.