一様内外圧を受ける変厚円環板の座屈および振動*

間 島 理**, 林 邦 夫**

Elastic Buckling and Flexural Vibration of Variable
Thickness Annular Plates under Uniform In-plane
Forces along the Inner and/or Outer Edges

by Osamu MAJIMA and Kunio HAYASHI

The problems of elastic buckling and flexural vibration of variable thickness annular plates have been analyzed by the Galerkin method. Natural vibration modes of the constant thickness annular plate without in-plane force have been adopted as admissible functions. Numerical calculations were executed for the annular plates of linearly varying thickness with uniform in-plane force along the inner and/or outer edges. Asymmetric deformations were also taken into consideration in this procedure. It has become clear that whether the taper ratio has influence on the buckling mode depends on the specific boundary conditions at the inner and outer edges. The proposed method could be easily extended to the cases where the thickness variations were more complicated.

Key Words: Structural Analysis, Vibration of Continuous System, Buckling, Natural Frequency, Variable Thickness Annular Plate, In-plane Force

1. ま え が き

各種構造物の薄肉軽量化に伴い、基本構造要素としての薄板の座屈、振動解析はますます重要になってくる。変厚円環板の固有振動については軸対称振動^{(1)~(4)}、非軸対称振動^{(5)~(7)}、ともに多くの研究がなされている。面内力が作用した場合の固有振動および座屈に関しては Gupta ら⁽⁸⁾が軸対称変形について解析を行っている。Dyka ら⁽⁹⁾は非軸対称形をも扱っているが座屈に関して明確な結果を求めている。また Irie らは従動力⁽¹⁰⁾および面内トルク⁽¹¹⁾を受ける場合について解析している。ところで円環板の座屈問題において軸対称変形に限定した解析はより小さな座屈値を見逃す恐れがあることは一定板厚の場合の解析結果から十分予想されることである。

本研究では一定板厚の円環板に関する著者らの前報⁽¹²⁾の手法を板厚が半径方向に直線状に変化する円環板の座屈および振動問題に適用する。すなわち一定板厚の円環板の固有振動の固有関数を試験関数とするガレルキン法による解析法を示し、具体的な面内力分

布として一様な内外圧を受ける場合について解析を行う。本手法によれば内外周における種々の境界条件に対して軸対称変形、非軸対称変形を含めた解析が可能である。また板厚分布がより複雑な場合への拡張も容易である。

2. 解 析

2.1 基礎微分方程式 面内力を受ける内径 $2r_i$ 、外径 $2r_o$ の変厚円環板の横振動を考える(図1)。板厚は半径方向にのみ変化するものとし、振動は微小であ

図1 一様内外圧を受ける変厚円環板

* 昭和59年11月29日 第929回講演会において講演、原稿受付 昭和59年5月30日。

** 正員、上智大学理工学部(〒102 東京都千代田区紀尾井町7-1)。

ってそれによる面内力の変動はないものとする。また座屈前の挙動のみを取扱うものとして静的座屈変形による面内力の変動も無視するものとする基礎微分方

程式は円環板の中心を原点とする極座標を用いて次式で表せる。

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{dD}{dr} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + \frac{1}{r} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} + \frac{d^2 D}{dr^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} - \left\{ N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2 N_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここにおいて

$w = w(r, \theta, t)$: たわみ, r, θ : 極座標, t : 時間, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板の曲げ剛性, E, ν : ヤング係数, ポアソン比, ρ : 質量密度, h : 板厚, $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$: 面内力,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

式(1)において調和振動を仮定し,

$$w(r, \theta, t) = \bar{w}(r, \theta) \sin \omega t \quad (2)$$

とおき, 次の無次元化

$$\eta = r/r_0, \eta_i = r_i/r_0, W(\eta, \theta) = \bar{w}(r, \theta)/h_m \quad (3)$$

を行うと基礎方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D_m} \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{1}{D_m} \frac{dD}{d\eta} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla^2 W) + \frac{1}{\eta} \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{D_m} \frac{d^2 D}{d\eta^2} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\} - \frac{r_0^2}{D_m} \left\{ N_\eta \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + 2 N_{\eta\theta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + N_\theta \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\} - \frac{h}{h_m} \lambda^4 W = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} D_m &= Eh_m^3/12(1-\nu^2), \lambda^4 = \rho h_m r_0^4 \omega^2 / D_m, N_\eta \equiv N_r, N_{\eta\theta} \equiv N_{r\theta} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで h_m は基準板厚である。板厚は半径方向に直線状に変化するものとし, 内外周の板厚 h_i, h_o を用いて次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} h(r) &= \frac{1}{r_o - r_i} \{ h_i(r_o - r) - h_o(r_i - r) \} \equiv h_m(a\eta + b) \\ a &= \frac{\bar{h}_o - \bar{h}_i}{1 - \eta_i}, b = -\frac{\eta_i \bar{h}_o - \bar{h}_i}{1 - \eta_i}, \bar{h}_o = \frac{h_o}{h_m}, \bar{h}_i = \frac{h_i}{h_m} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

内外周において一様な面内力 $N_m N_i, N_m N_o$ (ただし N_m は基準面内力, N_i, N_o は圧縮を正とする) が作用する場合を考えると円環板内における面内合応力分布は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_\eta &= \frac{N_m}{1 - \eta_i^2} \left\{ \eta_i^2 \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) N_i - \left(1 - \frac{\eta_i^2}{\eta^2} \right) N_o \right\} \\ N_\theta &= \frac{N_m}{1 - \eta_i^2} \left\{ \eta_i^2 \left(1 + \frac{1}{\eta^2} \right) N_i - \left(1 + \frac{\eta_i^2}{\eta^2} \right) N_o \right\} \\ N_{\eta\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(6), (7)を式(4)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} L(W) &\equiv (a\eta + b)^3 \nabla^2 \nabla^2 W + 3a(a\eta + b)^2 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla^2 W) + \frac{1}{\eta} \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ & + 6a^2(a\eta + b) \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\} - \frac{\mu}{1 - \eta_i^2} \left[\left\{ \eta_i^2 \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) N_i - \left(1 - \frac{\eta_i^2}{\eta^2} \right) N_o \right\} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right. \\ & \left. + \left\{ \eta_i^2 \left(1 + \frac{1}{\eta^2} \right) N_i - \left(1 + \frac{\eta_i^2}{\eta^2} \right) N_o \right\} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] - \lambda^4(a\eta + b)W = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

ただし

$$\mu = N_m r_0^2 / D_m \quad \dots\dots\dots (9)$$

2・2 ガレルキン法 式(8)に対してガレルキン法を適用する。すなわち試験関数を $\bar{\phi}_{mn}$ として

$$H_{mn} \equiv \int_0^{2\pi} \int_{\eta_i}^1 L(\sum_j \sum_i a_{ji} \bar{\phi}_{ji}) \bar{\phi}_{mn} \eta d\eta d\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$\bar{\phi}_{mn}$ として面内力が作用しない一定厚円環板(板厚 h_m)の固有振動の固有関数を用い、次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}_{mn}(\eta, \theta) &= \phi_{mn}(\eta) \cos n\theta = \bar{\phi}_{mn}^{(1)}(\eta, \theta) + \bar{\phi}_{mn}^{(2)}(\eta, \theta) = \{\phi_{mn}^{(1)}(\eta) + \phi_{mn}^{(2)}(\eta)\} \cos n\theta \\ \phi_{mn}^{(1)}(\eta) &= A_{mn} J_n(\lambda_{mn} \eta) + B_{mn} Y_n(\lambda_{mn} \eta), \quad \phi_{mn}^{(2)}(\eta) = C_{mn} I_n(\lambda_{mn} \eta) + F_{mn} K_n(\lambda_{mn} \eta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで J_n, Y_n は n 次の第1種および第2種ベッセル関数, I_n, K_n は n 次の変形第1種および第2種ベッセル関数, λ_{mn} は一定厚円環板の固有円振動数係数, また $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, F_{mn}$ は一定厚円環板の固有振動モードによって定まる係数である。関数 $\bar{\phi}_{mn}(\eta, \theta)$ は次の微分方程式と直交条件を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \bar{\phi}_{mn} - \lambda_{mn}^4 \bar{\phi}_{mn} &= 0, \quad \nabla^2 \bar{\phi}_{mn}^{(1)} + \lambda_{mn}^2 \bar{\phi}_{mn}^{(1)} = 0, \quad \nabla^2 \bar{\phi}_{mn}^{(2)} - \lambda_{mn}^2 \bar{\phi}_{mn}^{(2)} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \int_{\eta_i}^1 \bar{\phi}_{ij} \bar{\phi}_{mn} \eta d\eta d\theta &= 0 \quad (\text{ただし } i \neq m \text{ または } j \neq n) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$\bar{\phi}_{mn}(\eta, \theta)$ は内外周における境界条件を満足するように定められる。すなわち内外周において固定, 単純支持, 自由の3種の境界条件の組合せを考え, $\eta = \eta_i, \eta = 1$ において次式を満足するものとする。

$$\left. \begin{aligned} \text{固定: } \bar{\phi}_{mn} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} = 0, \quad \text{単純支持: } \bar{\phi}_{mn} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{\eta} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \theta^2} \right) = 0 \\ \text{自由: } \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{\eta} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^3 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^3} + \frac{2-\nu}{\eta^2} \frac{\partial^3 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta \partial \theta^2} - \frac{3-\nu}{\eta^3} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

一方, これに対応する変厚円環板の境界条件は各々次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{固定: } \bar{\phi}_{mn} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} = 0, \quad \text{単純支持: } \bar{\phi}_{mn} = 0, \quad \frac{D}{D_m} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{\eta} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \theta^2} \right) \right\} = 0 \\ \text{自由: } \frac{D}{D_m} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{\eta} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \theta^2} \right) \right\} &= 0 \\ \frac{D}{D_m} \left\{ \frac{\partial^3 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^3} + \frac{2-\nu}{\eta^2} \frac{\partial^3 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta \partial \theta^2} - \frac{3-\nu}{\eta^3} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} \right\} &= 0 \\ -\frac{1}{D_m} \frac{dD}{d\eta} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{\eta} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{mn}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{mn}}{\partial \theta^2} \right) \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

試験関数が境界において式(13)を満足する時, 式(14)をも満足することは明らかである。すなわち式(11)で与えられる試験関数は幾何学的境界条件のみならず力学的境界条件をも完全に満足する。

式(8), (12)を用いると式(10)は次のようになる。

$$\frac{H_{mn}}{\pi(1+\delta_{n0})} = \sum_j a_{jn} (U_{mj}^{(n)} - \mu V_{mj}^{(n)} - \lambda^4 T_{mj}^{(n)}) = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} U_{mj}^{(n)} &= \lambda_{jn}^4 \int_{\eta_i}^1 \phi_{jn} \phi_{mn} (a\eta + b)^3 \eta d\eta - 6a\lambda_{jn}^2 \int_{\eta_i}^1 \left(\frac{d\phi_{jn}^{(1)}}{d\eta} - \frac{d\phi_{jn}^{(2)}}{d\eta} \right) \phi_{mn} (a\eta + b)^2 \eta d\eta \\ &\quad + 3a\nu \int_{\eta_i}^1 \frac{d^2 \phi_{jn}}{d\eta^2} \phi_{mn} (a\eta + b)^2 \eta d\eta + 3a \int_{\eta_i}^1 \left(\frac{d\phi_{jn}}{d\eta} - \frac{n^2}{\eta} \phi_{jn} \right) \phi_{mn} (a\eta + b)^2 \frac{d\eta}{\eta} \\ &\quad + 6a^2 \int_{\eta_i}^1 \frac{d^2 \phi_{jn}}{d\eta^2} \phi_{mn} (a\eta + b) \eta d\eta + 6a^2 \nu \int_{\eta_i}^1 \left(\frac{d\phi_{jn}}{d\eta} - \frac{n^2}{\eta} \phi_{jn} \right) \phi_{mn} (a\eta + b) d\eta \\ V_{mj}^{(n)} &= \frac{\eta_i^2}{1-\eta_i^2} \left\{ \left(\frac{1}{\eta_i^2} N_0 - N_i \right) \lambda_{jn}^2 \int_{\eta_i}^1 (\phi_{jn}^{(1)} - \phi_{jn}^{(2)}) \phi_{mn} \eta d\eta \right. \\ &\quad \left. + (N_0 - N_i) \int_{\eta_i}^1 \left(\frac{d^2 \phi_{jn}}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{d\phi_{jn}}{d\eta} + \frac{n^2}{\eta^2} \phi_{jn} \right) \phi_{mn} \frac{d\eta}{\eta} \right\} \\ T_{mj}^{(n)} &= \int_{\eta_i}^1 \phi_{jn} \phi_{mn} (a\eta + b) \eta d\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。式(15)は与えられた n に対して同次連立一次方程式となり, これより次の固有値方程式を得る。

$$T^{-1}(U - \mu V)a = \lambda^4 a \quad (17)$$

ただし,

$$U = [U_{mj}^{(n)}], V = [V_{mj}^{(n)}], T = [T_{mj}^{(n)}]$$

$$a = \{a_{jn}\}$$

座屈解析の場合には式(15)において $\lambda=0$ とおいて

$$V^{-1}Ua = \mu a \quad (18)$$

3. 数 値 計 算

数値計算の実行にあたり, 前報と同様に数値積分にガウス・ルジャンドル法を, 固有値計算に QR 法を使用した。試験関数の項数は解の収束性と計算時間を考慮して7項までとった。ポアソン比は0.3としてすべての解析を行った。またすべての結果の表示において外周の板厚を基準板厚 h_m とした。

表1に等しい内外圧を受ける内外周固定の変厚円環板の座屈解析の結果を Gupta らによる結果⁽⁶⁾とともに示した。表1において

$$\alpha = \frac{1 - \bar{h}_i/\bar{h}_0}{\eta_i - \bar{h}_i/\bar{h}_0}$$

$$\bar{N} = \mu_{cr} \left\{ \frac{\eta_i - 1}{\bar{h}_0(\eta_i - \bar{h}_i/\bar{h}_0)} \right\}^3$$

である。Gupta らはチェビシェフ近似法を用いて軸対称変形のみを解析している。軸対称変形のみに限定すれば本解析による結果は Gupta らの結果とよく一致している。また一定板厚の場合 ($\alpha=0$) については厳密解⁽¹³⁾を併記した。これらより本解析による結果は妥当なものであると確認できる。非軸対称解析の結果では座屈モードは板厚比にかかわらず4個の節直径を持ち, 座屈係数も軸対称解析の結果よりも約6~7%小さくなっている。

図2および図3に内外周固定の変厚円環板が外圧ま

たは内圧を受ける場合の座屈解析の結果を示す。 n は座屈モードにおける節直径の数である(以下同様)。座屈モードは内外径比によって大きく変化するが, 板厚比にはほとんど左右されない。内圧のみを受ける場合引張内圧において円周方向応力が圧縮となり, そのため図3に示すように圧縮内圧でも引張内圧でも座屈を生ずる。この場合, 固有振動数係数も例えば図4に示すように変化する。ただし(m, n)は振動モードにおける節円数, 節直径数が各々 m, n 個であることを示す。

外周固定, 内周自由の変厚円環板が外圧を受ける場合の座屈解析の結果を図5に示す。この場合には座屈モードは内外径比のみでなく板厚比によっても大きく変化する。内周の板厚が大きくなると軸対称座屈を生ずる。

4. 結 論

板厚が半径方向に直線状に変化する円環板の座屈と

表1 等しい内外圧を受ける変厚円環板の座屈係数 ($r_i/r_o=0.5$, 内外周固定)

α	$\bar{N}$		
	Results by U. S. Gupta etc.	Galerkin method	
		Axisymmetric mode	Asymmetric mode ($n=4$)
-0.5	410.172	410.360	383.962
-0.3	291.097	291.204	272.135
-0.1	196.987	197.057	183.904
0.0	—	158.471 (158.411)*	147.751 (147.752)*
0.1	125.020	125.095	116.581
0.3	72.369	72.398	67.386
0.5	36.429	36.241	33.720

* Exact solutions by N. Yamaki

図2 外圧を受ける変厚円環板の座屈係数 (内外周固定)

図3 内圧を受ける変厚円環板の座屈係数 (内外周固定)

図4 内圧を受ける変厚円環板の固有振動数係数
($r_i/r_0=0.3$, 内外周固定)

図5 外圧を受ける変厚円環板の座屈係数
(外周固定, 内周自由)

振動についてガレルキン法による解析を行い、次の結論を得た。

(1) 試験関数に板厚一定の円環板の固有振動の固有関数を用いることにより、種々の境界条件に対して軸対称変形、非軸対称変形を含めた座屈、振動解析が可能となった。また本解析による結果は幾何学的境界条件のみでなく力学的境界条件をも完全に満足するものである。

(2) 本解法を一様内外圧を受ける場合に適用し、いくつかの具体例について数値計算を行った。その結果境界条件によって座屈モードは内外周における板厚比に大きく影響される場合があることを示した。

(3) 本解法を板厚分布、面内応力分布がより複雑な場合に拡張、適用することは容易である。

文 献

- (1) Raju, I. S., ほか2名, *J. Sound Vib.*, 32-4 (1974), 507.

- (2) Soni, S. R. and Amba-Rao, C. L., *J. Sound Vib.*, 38-4 (1975), 465.
 (3) Gupta, A. P. and Jain, M., *J. Sound Vib.*, 80-3 (1982), 329.
 (4) Lal, R. and Gupta, U. S., *J. Sound Vib.*, 83-2 (1982), 229.
 (5) Ramaiah, G. K. and Vijayakumar, K., *J. Sound Vib.*, 40-2 (1975), 293.
 (6) 入江・山田, 機論, 45-394, A (昭54), 681.
 (7) Gorman, D. G., *J. Sound Vib.*, 86-1 (1983), 47.
 (8) Gupta, U. S. and Lal, R., *J. Sound Vib.*, 64-2 (1979), 269.
 (9) Dyka, C. T. and Carney, J. F. III, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, 105-EM3 (1979), 361.
 (10) Irie, T., ほか2名, *J. Sound Vib.*, 73-2 (1980), 261.
 (11) Irie, T., ほか2名, *J. Sound Vib.*, 85-2 (1982), 277.
 (12) 間島・林, 機論, 50-450, A (昭59), 236.
 (13) Yamaki, N., *J. Appl. Mech.*, 25-1 (1958), 267.