モードIII形荷重下における弾粘塑性 体内定常き裂進展問題の漸近解*

坂 真澄**, 村岡 幹夫***, 阿部 博之**

Asymptotic Solution for Steady Crack Growth Problem in an Elastic-Viscoplastic Material under Mode III Loading

by Masumi SAKA, Mikio MURAOKA, and Hiroyuki ABÉ

An asymptotic solution is presented for the singular stress and strain fields near the tip of a steadily growing crack in an elastic-viscoplastic material under Mode III loading. By taking into account the experimental study made by Clark-Duwez in which no further increase of dynamic yield stress was observed when the strain rate exceeded the critical value, an intense strain region which behaves as an elastic-perfectly plastic material is introduced in the vicinity of the crack tip where this region is surrounded by the elastic-viscoplastic material. It is shown that the size of the intense strain region measured along the crack line is proportional to the velocity of the crack growth, and the singularity of the strain distribution near the crack tip is weakened by the intense strain region.

Key Words: Fracture, Elastic-Viscoplastic Material, Mode III Crack, Asymptotic Solution, Elastic-Perfectly Plastic Region, Intense Strain Region

1. 緒 言

従来、延性き裂問題の解析においては材料の静的応力-ひずみ関係が仮定されてきた。しかしながら現在原子炉圧力容器で問題となっている熱衝撃に代表されるようなひずみ速度の大きな衝撃破壊の解明あるいは高速き裂進展問題の解明にあたっては、材料のひずみ速度依存性を考慮する必要がある。

近年 Freund-Douglas⁽¹⁾は進展き裂先端近傍のひずみ速度が大きな値になることを考慮し、材料のひずみ速度依存性を考慮した解析を行っている。そこではひずみ速度と動的降伏応力の関係として指数則が用いられている。

ところでひずみ速度と動的降伏応力の関係を実験的に求めた Clark-Duwez⁽²⁾は上記 Freund-Douglas の解析で用いられた関係とは異なり、ひずみ速度がある値以上になれば動的降伏応力はもはや変化しないと考察している。そこで本報では Clark-Duwez の実験的考察をはじめて解析に取り入れ、き裂がモードIII形の変形を受けつつ進展する場合のき裂端近傍における特

異なひずみ場、応力場について理論的考察を行う。静的には弾完全塑性体の応答を示し、降伏域においてはひずみ速度の影響が現れる材料、つまり弾粘完全塑性材を対象として構成則として Perzyna⁽³⁾の式を用いる。き裂先端の極近傍においてはひずみ速度が非常に大きくなることを考慮し、動的降伏応力が限界値に達しひずみ速度に依存しなくなる領域すなわち強変形域を導入し、同領域の形状、寸法およびき裂先端近傍のき裂線上におけるひずみ分布について検討を行う。なお簡単のために慣性の影響は無視する。

2. Perzyna の式

弾粘塑性体の応答をモデルで表すと図1のようになる。図1では固体摩擦が塑性を、流体摩擦が粘性を表しており、塑性が生じて初めて粘性の影響が現れる。以下 Perzyna の式について簡単に記す。なお記号表現において次の約束を用いる。

- (1) 太字の記号はテンソル量を示す。
- (2) 二つのテンソル間の(;)は二つの指標に関する総和を表す。
- (3) テンソル量の前に記された tr はその対角成分の和を表す。
- (4) I は恒等テンソル、(') は偏差量を表す。また

* 昭和59年11月30日 第929回講演会において講演、原稿受付 昭和59年5月31日。

** 正員、東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉)。

*** 学生員、東北大学大学院。

($\dot{}$)は時間微分を表す。

Perzyna は弾粘塑性材の構成則として次式を提案している。

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \\ &= \left[\frac{1}{2G} \dot{\sigma}' + \frac{1-2\nu}{E} \text{tr} \dot{\sigma} I \right] + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ &\dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

ここに $\epsilon, \sigma, E, G, \nu$ はそれぞれひずみテンソル, 応力テンソル, 縦弾性係数, せん断弾性係数, ポアソン比を表す。また添字 e, p はそれぞれ弾性成分, 非弾性成分を表す。なお F は次式で表される静的降伏関数である。

$$F(\sigma, \epsilon^p) = \frac{f(\sigma, \epsilon^p)}{\kappa} - 1 \dots\dots\dots(2)$$

ここに $f(\sigma, \epsilon^p)$ は σ および ϵ^p の関数である。また κ は次式で表されるひずみ硬化パラメータである。

$$\kappa = \kappa \left[\int_0^{\epsilon^p} \sigma_{st}(\epsilon^p) : d\epsilon^p \right] \dots\dots\dots(3)$$

ここに $\sigma_{st}(\epsilon^p)$ は ϵ^p に対応する静的応力を表す。さらに応力空間における降伏曲面 $F=0$ は正則かつ凸曲面であるとする。式(1)における $\langle \Phi(F) \rangle$ は次式で定義される。

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0) \\ \Phi(F) & (F > 0) \end{cases} \dots\dots\dots(4)$$

ここに $\Phi(F)$ は実験により定まる F の関数である。また γ は $\gamma = \gamma_0 / \kappa$ (γ_0 : 定数) で表される ϵ^p に依存する粘性係数であり, 実験により定められる。

金属材料に対する式(1)の表示を求めるにあたり Mises の降伏条件を考慮して, $f(\sigma, \epsilon^p) = J_2^{1/2}$ を採用する。ここに J_2 は偏差応力テンソルの第2不変量を表す。このとき1軸状態において式(1)は

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left\langle \Phi \left[\frac{\sigma}{\Psi(\epsilon^p)} - 1 \right] \right\rangle \dots\dots\dots(5)$$

ここに ϵ, σ はそれぞれ1軸のひずみ, 応力であり, また $\gamma^* = \gamma / \sqrt{3}$, $\Psi(\epsilon^p) = \sqrt{3} \kappa$ である。さらに式(5)にお

いて非弾性成分のみを考えることにより

$$\sigma = \Psi(\epsilon^p) \left[1 + \Phi^{-1} \left[\frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right] \right] \dots\dots\dots(6)$$

ここに $\sigma = \Psi(\epsilon^p)$ は静的な1軸引張試験における応力-ひずみ関係を表す。なお図2には式(6)に基づく動的応力-ひずみ曲線を示す。

3. 定常き裂進展

いま簡単のために2章の金属材料に対する表示において, κ が定数の場合つまり弾粘完全塑性体を考える。このとき

$$F = \frac{\sigma_e}{\sigma_0} - 1 \dots\dots\dots(7)$$

となる。ここに $\sigma_e = [(3/2)\sigma' : \sigma']^{1/2}$ は相当応力, $\sigma_0 = \sqrt{3}\kappa$ は静的な引張降伏応力を表す。また $\Phi(F)$ として次式を用いる。

$$\Phi(F) = BF^n \dots\dots\dots(8)$$

ここに B, n は実験により定まる定数である。Freund-Douglas は進展き裂の解析において式(8)と類似の式を用いている。なお図3は一例として Clark-Duwez の1軸実験より得られた軟鋼の動的降伏応力とひずみ速度の関係を式(5), (7), (8)を用いて表現したものである。式(5), (7), (8)に基づく実線は, 実験結果の大体の傾向を表していることがわかる。

ここで図4に示すように x_3 軸を板厚方向にとり, き裂端とともに動く移動直角座標系 (x_1, x_2, x_3) および極座標系 (r, θ, x_3) を導入する。また簡単のためにモードIII形の変形に現れる応力テンソル成分 σ_{3i} ($i=1, 2$), σ_{3r} , $\sigma_{3\theta}$, ひずみテンソル成分 ϵ_{3i} ($i=1, 2$), ϵ_{3r} , $\epsilon_{3\theta}$ を次のように略記する。

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= \sigma_{3i}, \quad \gamma_i = 2\epsilon_{3i}, \quad i=1, 2 \\ \tau_r &= \sigma_{3r}, \quad \tau_\theta = \sigma_{3\theta}, \quad \gamma_r = 2\epsilon_{3r}, \quad \gamma_\theta = 2\epsilon_{3\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

き裂はき裂面から十分に離れた位置において τ_2 のみの負荷を受け, 速度 $\dot{a}$ でき裂線上を進展するものと

図1 弾粘塑性材の応答モデル

図2 動的応力-ひずみ曲線

する。構成則式(1)は次のようになる。

$$-\dot{a} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_1} = -\frac{\dot{a}}{G} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_1} + \sqrt{3} B^* \left\langle \left[\frac{\tau_e}{\tau_0} - 1 \right]^n \right\rangle \frac{\tau_i}{\tau_e} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに $B^* = \gamma^* B$ である。また $\tau_e = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2}$ は相当せん断応力、 $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$ は静的なせん断降伏応力である。ここで進展き裂先端近傍でのひずみ速度が非常に大きくなることおよび式(5), (7), (8)を考慮して、 $r \rightarrow 0$ のとき $\tau_e \rightarrow \infty$ と仮定すれば、き裂先端近傍では式(10)より次式が成立する。

$$-\dot{a} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_1} = -\frac{\dot{a}}{G} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_1} + \bar{B} \tau_e^{n-1} \tau_i \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに $\bar{B} = \sqrt{3} B^* / \tau_0^n$ である。

ところで式(11)は Hui-Riedel⁽⁴⁾がノートン則に従う粘弾性材中のき裂に対して行った漸近解析における構成則と形が一致している。そこで本報において Hui-Riedel の解析結果を直接利用すれば、き裂先端近傍の応力場、ひずみ場は $n \geq 3$ のとき次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_i(r, \theta) &= a_n \left[\frac{\dot{a}}{\bar{B} G r} \right]^{1/(n-1)} \bar{\tau}_i(\theta) \\ \tau_e(r, \theta) &= a_n \left[\frac{\dot{a}}{\bar{B} G r} \right]^{1/(n-1)} \bar{\tau}_e(\theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\gamma_i(r, \theta) = \frac{a_n}{G} \left[\frac{\dot{a}}{\bar{B} G r} \right]^{1/(n-1)} \bar{\gamma}_i(\theta) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで

図3 軟鋼における動的降伏応力とひずみ速度の関係

図4 移動座標系

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\gamma}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\tau}_r \\ \bar{\gamma}_r \end{bmatrix} \cos \theta - \begin{bmatrix} \bar{\tau}_\theta \\ \bar{\gamma}_\theta \end{bmatrix} \sin \theta \\ \begin{bmatrix} \bar{\tau}_2 \\ \bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\tau}_r \\ \bar{\gamma}_r \end{bmatrix} \sin \theta + \begin{bmatrix} \bar{\tau}_\theta \\ \bar{\gamma}_\theta \end{bmatrix} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

なお $\bar{\tau}_e(\theta)$, $\bar{\tau}_r(\theta)$, $\bar{\tau}_\theta(\theta)$, $\bar{\gamma}_r(\theta)$, $\bar{\gamma}_\theta(\theta)$ と θ との関係および a_n の値は文献(4)に記されている。

4. き裂端の極近傍における強変形域の形成

4.1 強変形域の導入 3章では $\phi(F)$ の関数形として式(8)を用い、さらにき裂端近傍においてひずみ速度が非常に大きくなることを考慮して $\tau_e \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow 0$) を仮定することにより、き裂端近傍の応力場の表示として式(12)に到達した。ところで実際式(12)で表されるように応力は発散するであろうか。次にこの問題について考えてみる。図3に示される動的降伏応力の増加率はひずみ速度の増加に伴い減少傾向を示している。また Clark-Duwez は図3に示す軟鋼のほかに2種類の合金鋼においても同様の結果を得ている。さらに Clark-Duwez によるこれらの実験結果はひずみ速度が約 200 s^{-1} 以下の範囲で得られたものであるが、彼らはひずみ速度が 200 s^{-1} 以上の範囲においては Clark-Wood⁽⁵⁾の衝撃引張試験結果より動的降伏応力はもはやほとんど変化しないと考えられることを指摘している。以上の Clark-Duwez の考察に従うと、き裂先端の極近傍においては図5に示すようにひずみ速度の影響を受けない弾完全塑性領域すなわち強変形域が形成されるものと考えられる。

4.2 強変形域の寸法の見積もり 強変形域は一般に二次元的広がりをもっているが、ここでは代表的寸法として x_1 軸つまりき裂線上における同領域の大きさについて考えてみよう。飽和した動的降伏応力を σ_{sat} とし、 $k = \sigma_{\text{sat}} / \sigma_0 = \tau_{\text{sat}} / \tau_0$ ($\tau_{\text{sat}} = \sigma_{\text{sat}} / \sqrt{3}$) とする。まず第一近似として式(12)において、 $\tau_e(r, 0) [= \tau_2(r, 0)] = \tau_{\text{sat}} (= k \tau_0)$ を満たす r を強変形域と弾粘塑性領域の境界までのき裂先端からの距離と考えることができる。この r を r^* とすれば、文献(4)より $\bar{\tau}_e(0) = 1$ となることを考慮して

図5 き裂先端の極近傍における強変形域の形成

$$r^* = \frac{\dot{\alpha}}{BG} \left[\frac{\alpha_n}{k\tau_0} \right]^{n-1} = \frac{\dot{\alpha}\tau_0}{\sqrt{3}B^*G} \left[\frac{\alpha_n}{k} \right]^{n-1} \quad \dots (15)$$

しかしながら実際には動的降伏応力が飽和したために、式(12)の応力分布において図6の斜線を施した M なる面積で表される荷重負担分が、斜線を施した N なる面積と等しくなるような応力分布とならねばならない。そこで線形破壊力学における小規模降伏状態の塑性域の補正⁽⁶⁾と同様に、図6において面積 $ABDE$ と面積 $FCDE$ が近似的に等しいと仮定することにより、補正された強変形域の寸法 r_c を次式のように求めることができる。

$$r_c = \frac{1}{k\tau_0} \int_0^{r^*} \tau_2(r, 0) dr = \frac{n-1}{n-2} r^* \quad \dots (16)$$

式(15)、(16)より強変形域の大きさはき裂進展速度に比例して決定されることがわかる。

4.3 強変形域の応力場とひずみ場 面外せん断形の変形を受ける弾完全塑性材が平衡状態にある場合降伏域において x_3 軸に垂直な面に作用する応力ベクトルの大きさは一定である。また応力ベクトルに接し応力ベクトルの向きを正方向とする曲線を β 線とし、 β 線、 x_3 軸とともに右手系の直交曲線座標系 (α, β, x_3) を構成する α 線は直線となることが知られている⁽⁷⁾。き裂が存在する場合、Hult-McClintock⁽⁸⁾は塑性域においては α 線はき裂先端から放射状に形成することを示している。Hult-McClintock に従い Rice⁽⁷⁾ はモードIII形の変形を受ける進展き裂問題において、き裂端から出る放射状の α 線を考えることによりき裂線に沿ったひずみ分布を求めている。そこで本問題における強変形域の応力場、ひずみ場を評価するにあたり、Rice の解の利用を試みる。相当せん断応力 τ_e が $k\tau_0$ であることを考慮し、また図7に示すように強変形域と弾粘塑性域との境界線を $r = R(\theta)$ とすれば、Rice の解を若干修正することによりき裂線上におけるひずみ分布の表示として次式を得る。

$$0 < x_1 < R(0), \quad x_2 = 0 \quad (\theta = 0)$$

$$\gamma_2(x_1, 0) = \gamma_2[R(0), 0] - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta} [R(0), 0]$$

図6 強変形域の代表寸法の見積もり

$$+ \frac{k\tau_0}{2G} \left[\log \frac{R(0)}{x_1} \right]^2 \quad \dots (17)$$

ここで $R(0) = r_c$ である。また $\gamma_2[R(0), 0]$, $(\partial \gamma_1 / \partial \theta)[R(0), 0]$ は強変形域と弾粘塑性域との境界における連続条件より決定される量である。そこで次にこれらの量を決定するにあたり、強変形域の外に形成される弾粘塑性域の応力場、ひずみ場について検討してみよう。

弾粘塑性域と強変形域との境界に課せられる条件として応力、変位、変位速度などの連続性が考えられる。またそのほかに境界上の応力ベクトルの大きさが $k\tau_0$ であり、その方向がき裂先端から放射状に伸びる α 線に垂直になるという条件、 $R(0) = r_c$ となる条件がある。以上の諸条件を考慮して弾粘塑性領域の応力場、ひずみ場を決定しなければならない。そこでまず式(12)および文献(4)より一例として $n=4$ の場合について、 $\tau_e = k\tau_0$ を満足する曲線および同曲線上の応力ベクトル (τ_r, τ_θ) を求め、図8にそれぞれ破線ならびにベクトルで示す。図8において $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ はそれぞれ x_1, x_2 を r^* で無次元化した量である。ここで $n=4$ の場合には $r_c = (n-1)r^*/(n-2) = 1.5r^*$ となることを考慮し、上記曲線および応力ベクトルを実線で示すように $\bar{x}_1$ 軸の正方向に距離 $r_c - r^* (= 0.5r^*)$ だけ平行

図7 強変形域と弾粘塑性域との境界線

図8 強変形域の形状、寸法の近似

図9 き裂端近傍き裂線上のひずみ分布

移動してみる。いま点Oから放射状に伸びる直線を引き、同直線は実線で示す曲線との交点において応力ベクトルとほぼ直交することがわかる。この事実より、近似的に点Oから放射状に伸びる直線を強変形域における α 線とみなすことができる。なお同様の結果は $n=6, 10$ の場合についても得られている。以上の考察より弾粘塑性領域の応力場、ひずみ場は、式(12)、(13)をき裂線上において距離 r_c-r^* すなわち $r^*/(n-2)$ だけき裂進展方向に平行移動させたもので近似できる。これより式(17)における $\gamma_2[R(0), 0]$, $(\partial\gamma_1/\partial\theta)[R(0), 0]$ の値は式(13)および文献(4)において $r=r^*$, $\theta=0$ とした時の値として評価される。例として $n=4$ の場合の無次元化したひずみ $\bar{\gamma}_2=\gamma_2/(k\tau_0/G)$ のき裂端近傍き裂線上における分布を図9に示す。図9よりき裂端近傍においては強変形域が形成されると考えることによりひずみの特異性の強さは同領域の形

成を考慮しない場合に比べ弱められることがわかる。

5. 結 言

Perzynaの式に従う弾粘完全塑性材中をき裂がモードIII形の変形を受けつつ進展する場合のき裂先端近傍における応力場、ひずみ場について検討した。Clark-Duwezの実験結果に基づきき裂先端の極近傍における高ひずみ速度の領域においては、もはや動的降伏応力に与えるひずみ速度の影響はなくなることを考慮に入れ、強変形域を導入し、同領域の形状、寸法およびき裂先端近傍のき裂線に沿ったひずみ分布を明らかにした。

最後に、本文の清書にあたり東北大学工学部 庄子孝夫技官および洞口智子技術補佐員の協力を得たことを記し感謝の意を表する。

文 献

- (1) Freund, B. L. and Douglas, A. S., *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 803-1 (1983), 5.
- (2) Clark, D. S. and Duwez, P. E., *Proc. ASTM*, 50 (1950), 560.
- (3) Perzyna, P. (Chernyi, G. G. ほか7名編), *Advances in Applied Mechanics*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (4) Hui, C. Y. and Riedel, H., *Int. J. Fract.*, 111-4 (1981), 409.
- (5) Clark, D. S. and Wood, D. S., *Trans. Am. Soc. Met.*, 42 (1950), 45.
- (6) Tetelman, A. S. and McEvily, A. J. Jr. (宮本訳), 構造材料の強度と破壊, 1 (昭51), 59, 培風館.
- (7) Rice, J. R. (Liebowitz, H. 編), *Fracture*, II (1968), 246, Academic Press.
- (8) Hult, J. A. and McClintock, F. A., *Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech.*, 8 (1956), 51.