初期応力下の軸対称容器の横荷重による座屈*

高柳政明**, 小久保邦雄**, 長島英明**

Buckling of Prestressed Axisymmetric Tanks Subjected to Lateral Load

by Masaaki TAKAYANAGI, Kunio KOKUBO, and Hideaki NAGASIMA

A procedure for the analysis of buckling of axisymmetric liquid storage tanks subjected to static lateral load is proposed. The procedure is based on the expansion of local buckling mode using vibration modes calculated by FEM considering the effect of initial stress. Calculated natural frequencies of water-filled Al tank and buckling loads of empty or water containing polyester tanks under lateral end load are compared to experimental results. The comparisons show good agreement.

During vibration tests of the water-filled Al tank using shaking table, two buckling modes were observed. The first is local elastic buckling at lower part of water level caused by negative pressure from water-shell interaction. The second is diamond buckling at fixed end. The first is simulated applying the pressure in static. Calculated buckling mode is very similar to observed one by high speed camera. The second is evaluated by the classical buckling stress.

Key Words: Structural Analysis, Vibration, Buckling, Lateral Load, Axisymmetric Tanks, Initial Stress, FEM, Experiment

1. 緒 言

石油タンクやワインタンクなどの液体を貯蔵する薄肉の容器が地震時に座屈を生ずる被害を受けることが、以前から問題となっている^{(1)~(3)}。これに対して、従来は主として振動の面から研究が進められてきたが、近年、座屈に関して、実験および解析による研究が行われている。本研究も地震時の横荷重に対する軸対称容器の座屈解析法に関するものであり、一例ではあるが、実験も行い、検討を加えたものである。

軸圧縮荷重や外圧などの軸対称荷重による座屈に関する研究は古くから行われ、解析、実験ともぼう大な数の報告がなされている。他方、地震時に容器に加わる荷重は軸対称とはならず、周方向波数 $n=1$ の分布となる。この場合、周方向の座屈モードは1種類の周方向波数 n で表せる周期的なものではなく、部分的に卓越したモードとなる。このため、軸対称荷重が加わる場合に比較して、解析は複雑になり、研究例も比較的少ない。八巻らは、Schröderの方法を拡張し、Donnellの式にガレルキン法を適用して、内圧または

外圧と上端に集中横荷重を受ける片持円筒殻の座屈を解析し⁽⁴⁾、実験値とよく一致することを確認している。しかし、半径に比べて長さが小さくなると、解析値のほうが実験値よりやや低くなる場合があり、この原因は試験体の下端の境界条件がほぼ固定に近いのに対し、解析では境界条件を単純支持としているためであると考察している。山田⁽⁵⁾も、内・外圧は考慮しないが、片持円筒の軸方向に分布する横せん断力による座屈を分布のこう配を変えて解析している。手法は八巻らとほぼ同様のものを用い、下端の境界条件をやはり単純支持として解析している。半谷らも、横荷重が加わった場合の軸圧縮による座屈荷重を Brazier 効果を考慮することにより解析している⁽⁶⁾。

また、横荷重による座屈の静的実験としては、八巻⁽⁷⁾、内藤⁽⁸⁾、内山ら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾、半谷⁽¹¹⁾によるものがあり、振動台を用いた動の実験としては Niwa ら⁽¹²⁾、Shih ら⁽¹³⁾、国内の委員会による LNG タンク模型⁽³⁾や高圧ガス製造施設の鋼製塔⁽¹⁴⁾に関するものがある。

本研究では横荷重による薄肉容器の座屈モードを、静水圧等による初期応力下の流体・シェル連成振動モードの線形結合として近似する静的座屈解析法を提案する。座屈前の膜応力状態、振動解析には FEM を用いるため、前述のガレルキン法と異なり、境界条件、

* 昭和59年11月29日 第929回講演会において講演、原稿受付 昭和59年5月31日。

** 正員、(株)日立製作所機械研究所 (〒300 土浦市神立町502)。

荷重様式、容器形状に関する制限はほとんどない。円筒容器の水との連成振動および静的座屈を解析し、実験値⁽⁷⁾⁽⁸⁾あるいは解析値⁽⁷⁾と比較検討する。また、円筒容器の振動台による加振実験を行い、従来知られていなかった座屈モードを生じさせることができたので、その発生機構を本法により検討する。

2. 解析 法

2.1 初期応力下の振動解析 本研究では座屈モードを振動モードの線形結合として近似する手法を提案する。内・外圧や静水圧などによる初期応力の影響は振動解析の段階で考慮する。手法は有限要素法を用いる。図1, 2にシェル要素⁽¹⁵⁾と流体要素⁽¹⁶⁾を示す。

初期応力下の固有振動方程式は次のように書ける⁽¹⁵⁾。

$$[(K + K_{G0}) - \omega^2 M]x = 0 \quad (1)$$

ここに、 K は初期応力の影響を考慮していない剛性マトリックス、 M は質量マトリックスで流体との連成効果も含む。 x は固有振動モードベクトル、 ω は固有振動数である。 K_{G0} が初期応力による曲げ剛性の変化分を表すもので幾何剛性マトリックスと呼ばれる。

2.2 幾何剛性マトリックス 幾何剛性マトリックスは面外変形による付加的な面内ひずみと面内初期応力により生ずるひずみエネルギーを評価することにより求められる⁽¹⁵⁾。今回用いるリング状のシェル要素の場合、この非線形の付加ひずみによるひずみエネルギーは次式のように表せる⁽¹⁷⁾。

$$U_{NL} = \int \left[N_s \left(\frac{1}{2} \phi_s^2 \right) + N_\theta \left(\frac{1}{2} \phi_\theta^2 \right) + N_{s\theta} (\phi_s \phi_\theta) \right] r d\theta ds \quad (2)$$

ここに、 N_s , N_θ は図1に示すシェル要素の軸と周方向の面内力、 $N_{s\theta}$ は面内のせん断力である。式(2)の( )内の値が面外変形により生じた付加的な面内ひずみであり、非線形になっている。線形のひずみ・変位関係式はNovozhilovによるものを用いている⁽¹⁵⁾ため、非線形のひずみ・変位関係式についても、Novozhilovによるものを用いることとする。この時、 ϕ_s , ϕ_θ は次のように表せる⁽¹⁷⁾。

図1 シェル要素

図2 流体要素

$$\phi_s = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (3)$$

$$\phi_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right) \quad (4)$$

ここに w , v は線形の場合と同様なものを用いることとし、以下に示す。

$$\begin{aligned} w = & [-(1-3s'^2+2s'^3) \cos n\theta \sin \phi, \\ & (1-3s'^2+2s'^3) \cos n\theta \cos \phi, \\ & L(s'-2s'^2+s'^3) \cos n\theta, 0, \\ & -(3s'^2-2s'^3) \cos n\theta \sin \phi, \\ & (3s'^2-2s'^3) \cos n\theta \cos \phi, \\ & L(-s'^2+s'^3) \cos n\theta, 0] \{\delta\}_e \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & [0, 0, 0, (1-s') \sin n\theta, \\ & 0, 0, 0, s' \sin n\theta] \{\delta\}_e \quad (6) \end{aligned}$$

$$\{\delta\}_e = \{u_i, w_i, \beta_i, v_i, u_j, w_j, \beta_j, v_j\}^T \quad (7)$$

$$s' = s/L \quad (8)$$

式(3)~(8)より

$$\{\phi_s\} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 \\ 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} [G] \{\delta\}_e \quad (9)$$

式(9)を式(2)へ代入する。内圧、静水圧など、軸対称荷重の場合、 $N_{s\theta} = 0$ とできて、

$$\begin{aligned} U_{NL} = & \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \int [G]^T \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 \\ 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s & 0 \\ 0 & N_\theta \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 \\ 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} [G] r d\theta ds \} \{\delta\}_e \\ = & \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [K_{G0}]_e \{\delta\}_e \quad (10) \end{aligned}$$

ここに添字 e は要素に関することを示す。要素の幾何剛性マトリックスが求まれば系全体のマトリックスは容易に得られ、式(1)より初期応力下の振動特性を解析できる。

2.3 横荷重に対する座屈解析 軸圧縮荷重や外圧が加わるとシェルの固有振動数は低下し、荷重を増やしていくと固有振動数が零になる。この時の荷重がオイラーロードと呼ばれるものである。式(1)を書き直して次式が得られる。

$$(K + \lambda K_G)y = 0 \quad (11)$$

ここに、 K_G は単位の荷重における幾何剛性マトリックス、 y は座屈モード、 λ は座屈が生じた時の荷重の大きさを示す固有値である。軸対称荷重の場合は、式(10)により幾何剛性マトリックスを求め、式(11)へ代入することにより、容易に座屈荷重が求められる。

周方向に $n=1$ の波数で変化する横荷重が加わる場合、式(10)は零となり、軸対称荷重と同様な方法では解は求められない。これは周方向の座屈モードが周期

的ではなくなるためである。この座屈モードを振動モードの線形結合として仮定する。

$$y = \sum_i^m a_i x_i \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 m は振動モードの数である。式(12)と式(9)より

$$\begin{Bmatrix} \psi_s \\ \psi_\theta \end{Bmatrix} = \sum_i^m \begin{bmatrix} \cos n_i \theta & 0 \\ 0 & \sin n_i \theta \end{bmatrix} [G] \{x_i\}_e a_i = \sum_i^m \begin{Bmatrix} \psi_s^i \\ \psi_\theta^i \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)を式(2)へ代入すると、単位の大さの横荷重による要素当たりの非線形のひずみエネルギーは

$$\begin{aligned} U_{NLe} &= \frac{1}{2} \iint \sum_i^m \sum_j^m \begin{Bmatrix} \psi_s^i \\ \psi_\theta^i \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_s & N_{s\theta} \\ N_{s\theta} & N_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_s^j \\ \psi_\theta^j \end{Bmatrix} r d\theta ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^m \sum_j^m \iint a_i \{x_i\}_e^T [G_i]^T \begin{bmatrix} \cos n_i \theta & 0 \\ 0 & \sin n_i \theta \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} N_{s0} \cos \theta & N_{s\theta 0} \sin \theta \\ N_{s\theta 0} \sin \theta & N_{\theta 0} \cos \theta \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \cos n_j \theta & 0 \\ 0 & \sin n_j \theta \end{bmatrix} [G_j] \{x_j\}_e a_j r d\theta ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^m \sum_j^m a_i (K_{Gij}^*)_e a_j \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

全要素数を N とすると系全体の非線形ひずみエネルギーは、

$$U_{NL} = \sum U_{NLe} \quad \dots\dots\dots (15)$$

座屈時の非線形のひずみエネルギーを λU_{NL} とし、全ひずみエネルギーを最小にするよう a_i を決定する。

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (U + \lambda U_{NL}) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 U は線形分のひずみエネルギーで、振動解析の際求められる一般化剛性を用いて次のように表せる。

$$U = \sum_i^m \frac{1}{2} a_i K_i^* a_i \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$K_i^* = x_i^T (K + K_{G0}) x_i \quad \dots\dots\dots (18)$$

以上より、次の m 元の固有値方程式が得られる。

$$(K^* + \lambda K_G^*) z = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに

$$K^* = \begin{bmatrix} K_1^* & 0 \\ & K_2^* \\ & & \ddots \\ 0 & & & K_m^* \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$z = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}^T \quad \dots\dots\dots (21)$$

K_G^* の i 行、 j 列の成分は式(14)より

$$K_{Gij}^* = \sum (K_{Gij}^*)_e \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(19)の固有値方程式を解けば固有値 λ から座屈荷重が、固有ベクトル z を式(12)へ代入して座屈モードが次式より求められる。

$$y = Xz \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに X は固有振動モードから成る行列である。

3. 解 析 例

3.1 円筒容器の静水圧を考慮した振動解析

図3に示す下端固定のAl製の片持円筒について静水圧による初期応力も考慮して、水・容器の連成振動の固有振動数を解析し、実験値と比較した結果を図4に示す。両者はよく一致している。静水圧による初期応力を省略した解析結果も同時に示すが、周方向波数 n が大きくなるにつれて、実験値との差は非常に大きくなる。これは、シェルの剛性が面内剛性と曲げ剛性から成っており、 n が大きくなるにつれて曲げ剛性が支配的になる⁽¹⁸⁾のに対し、初期応力は曲げ剛性への影響が大きいと考えられる。図5にはりタイプの振動モードおよびそれに対応する軸方向の圧力分布を示す。この圧力分布は後で座屈解析の荷重として使用する。

図3 Al円筒

図4 Al円筒の固有振動数

図5 振動モード

3・2 片持円筒上端の集中横荷重による座屈 図6において $R=100\text{ mm}$, $h=0.247\text{ mm}$, $H=0\text{ mm}$, $L=22.8\sim 227.6\text{ mm}$ とした場合の実験⁽⁷⁾および解析⁽⁴⁾が八巻らにより行われ, Schröder による下端単純支持の解析結果および Lundquist による鋼製円筒の実験結果と比較している。この例題を本解析法を用いて下端固定で解析する。解の収束は八巻ら⁽⁴⁾と同様式(21)の未定係数 a_i により判定する。最小と最大の n に係る a_i が a_i の最大値に比べて十分小さい時, 収束したものと判断する。以後の例題についても同様である。図7に八巻らによる結果⁽⁷⁾との比較を示す。Schröder らの下端単純支持の結果よりやや高めで, 実験値に対しても十分の精度が得られている。座屈モード図は割愛するがすべてせん断座屈モードである。

次に $R=150\text{ mm}$, $h=0.247\text{ mm}$, $L=278.7\text{ mm}$, $H=0\sim 268.8\text{ mm}$ の場合の実験⁽⁸⁾を下端固定として解析する。両者の比較を図8に示す。静水圧による初期応力により座屈荷重が大きくなるのが十分の精度で解析されている。 $H=268.8\text{ mm}$ の時の座屈モードを図9に示す。せん断座屈モードである。

3・3 片持円筒の振動台加振試験による座屈 図3のAl製円筒のはりタイプの振動の共振点近傍の周波数で振動台により加振した。周波数を一定(11.8 Hz)に保ち, 加振加速度を上げたところ400 Galで, 図10に示す座屈モードが生じた。この写真は高速カメラで撮影したものである。加振方向は紙面に直角の方向である。また, この現象は肉眼によっても観察され

図6 ポリエステル試験体

図7 円筒殻の横荷重による座屈

た。加振終了後に変形は残らなかったことから弾性座屈と考えられる。前述のように, 数例の振動台加振による座屈実験が国内外ですでに実施されているが, 大部分は基部のダイヤモンド座屈であり, 本研究のような座屈モードは報告されていない。

この座屈モードは, 円筒シェルと水との連成振動による負圧によって引き起こされたものと考え, 図5に示す圧力分布(周方向波数 $n=1$)を静的に加え, 上記の解析法を用いて解析した。静的に加えた場合の変形, 応力と動的な場合との比較を図11に示す。やや差が生じているが, 十分な精度が得られている。両者の差の原因は, 等価静的解析ではシェル本体の慣性力を無視しているためと考えられる。解析による座屈モードを図12に示す。対称性を考え, 加振方向に関して $1/2$ のみを示す。実験によるものとよく似たモードが得られている。座屈は円筒頂部の振幅が 4.32 mm の時生ずるという結果も得られた。実験では100 Gal刻みで加振加速度を上げたため, 座屈が生ずる円筒頂部の変位としては $2.7\sim 3.6\text{ mm}$ という幅をもった結果しか得られていない。静水圧を考慮しない場合は図13に示すような軸方向の広い範囲にわたって座屈すると

図8 静水圧の座屈荷重への影響

図9 初期応力下の横荷重による座屈モード

いう結果が解析により得られている。頂部変位も約 1/4 の 1.12 mm で座屈する結果となっている。

加振加速度をさらに大きくすると図 14 に示すダイヤモンド座屈が、円筒頂部振幅が 7.3~9.1 mm の間に生じた。この写真は実験後に撮影したものである。頂部が単位の加速度で定常振動をする時の応力分布を解析により求め、次式の $\sigma_{cr}^{(19)}$ で座屈するものと仮定して座屈時の頂部の振幅を求めると 11.9 mm が得られる。

$$\sigma_{cr} = 1.3\sigma_{cl} = \frac{1.3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh}{R} \dots\dots\dots (24)$$

4. 結 論

本研究の内容を以下に要約する。

(1) 流体・軸対称シェルの連成振動モードの線形結合として座屈モードを近似し、横荷重による静的座屈を解析する方法を提案した。振動解析の段階で静水圧、内・外圧、軸力などによる初期応力の影響を考慮しておくことにより、初期応力下の座屈解析も可能である。

(2) 片持円筒容器について、水・シェル連成振動、上端の集中横荷重による静的座屈を静水圧による初期応力も考慮して本手法により解析し、実験値あるいは解析値と比較して工学的に十分な精度が得られること

図 11 等価静的解析

図 14 ダイヤモンド座屈

図 10 負圧による座屈モード (高速写真)

図 12 静水圧を考慮した負圧による座屈モード

図 13 静水圧を省略した負圧による座屈モード

を確認した。

(3) ほぼ満水状態の円筒容器の、振動台による加振実験を行い、2種類の座屈モードを生じさせることができた。

(4) 第1の座屈モードは、水面よりやや下の部分に生じた、水・シェル連成振動の負圧によるものと考えられる局所的な座屈であり、本論文の方法により等価静的座屈解析を行って裏づけることができた。スロッシングの負圧により座屈が生ずる可能性があることは知られていたが、液体・シェル連成振動の負圧によっても座屈が生ずることを実験および解析により実証できた。

(5) 第2の座屈モードはすでに他の実験でも得られているダイヤモンド座屈であり、第1の座屈モードより大きな加振力を要した。本論文の方法は、このような二次的な座屈には適用できないが、従来から用いられている古典的な座屈応力の式を用いて座屈時の振幅を推定できることがわかった。

最後に、本研究に対し、東京大学 柴田 碧教授より適切なお指導をいただいたことを記し、深く感謝の意を表します。また、実験面でご協力いただいた今岡 哲男、福士直己両氏はじめ関係各位に感謝いたします。

文 献

- (1) 柴田, 機誌, 75-643 (昭47), 13.
- (2) 曾我部・ほか2名, 機誌, 79-689 (昭51), 31.
- (3) 柴田, 応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭58-12), 49.
- (4) 八巻・ほか2名, 東北大学高速力学研究所報告, 49-426 (昭57), 41.
- (5) 山田, 東北大学建築学報, 21 (昭56), 173.
- (6) 半谷・ほか2名, 文献(3)の147ページ.
- (7) 八巻・ほか2名, 東北大学高速力学研究所報告, 43-390 (昭54), 77.
- (8) 内藤, 日本高圧ガス技術協会・ST委員会, ST-1-261 (昭57).
- (9) 内山・ほか2名, 日本建築学会大会学術講演梗概集, (昭54-9), 937.
- (10) 内山・ほか2名, 日本建築学会大会学術講演梗概集, (昭55-9), 1145.
- (11) 半谷, シェルの座屈, (昭58), 財団法人生産技術研究奨励会.
- (12) Niwa, A. and Clough, R. W., *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, 10 (1982), 107.
- (13) Shih, C. F. and Babcock, C. D., ASME, 80-C 2/PVP-66 (1980).
- (14) 秋山・ほか, 高圧ガス, 19-10 (昭57), 447.
- (15) Zienkiewicz, O. C. (吉識訳), マトリックス有限要素法, (昭45), 培風館.
- (16) 高柳, 機講論, No. 800-3 (昭55-4), 61.
- (17) Stricklin, A., *High Speed Computing of Elastic Structures*, (1971), 383, Université de Liège.
- (18) Sharma, C. B., *J. Sound Vib.*, 35-1 (1974), 55.
- (19) C. R. C. Japan 編, *Handbook of Structural Stability*, (1971), Corona Publishing Co.