繊維強化形複合材積層平板の変形と応力 の確率有限要素解析*

谷 周 一**, 高 畑 秀 行***
中 桐 滋****, 久 田 俊 明****

Stochastic Finite Element Analysis of Uncertain Static Response of Fiber Reinforced Plastic Laminated Plate

by Syuichi TANI, Hideyuki TAKABATAKE,
Shigeru NAKAGIRI, and Toshiaki HISADA

The effect of uncertain stacking sequence on static response of fiber reinforced plastic laminated plate is estimated based on the stochastic finite element method. The variation of the stiffness matrix of the laminated plate is evaluated by means of Taylor series expansion with respect to the probabilistic variables representing the fluctuation of orientation and layer thickness. The second order perturbation technique is applied to the determination of the deterministic term and rates of change of unknown displacements up to the second order. Numerical analyses are carried out in regard to rectangular Boron/Epoxy laminated plate under compression. The expectations and variances of deflection and stress are computed with the aid of the second order approximation by taking all the probabilistic variables as uncorrelated Gaussian. It is shown that the orientation is more influential on the response fluctuation than the layer thickness.

Key Words: Structural Analysis, Composite Materials, Stochastic FEM, Uncertainty, Stacking Sequence

1. 緒 言

繊維強化形複合材積層平板(以後、積層平板と略記する)は高強度の繊維を配向させることにより比強度、比剛性の高いものが得られ、先進複合材料ではテーラーリング設計が試みられる現状に至っている⁽¹⁾。しかしながら直交異方性を有し、また積層により均質性が失われているのでその挙動の解析は均質等方性の仮定が成立する金属材料のそれに比較して複雑となる。更に積層序列(stacking sequence, 積層角と層厚)はその製作工程管理いかんによっては設計値から外れることもあり得る。

本研究においては、積層平板の挙動解析と積層設計に関する研究の一環として、確率有限要素法⁽²⁾による変形と応力の変動の定量的推定を試みる。すなわち、材料定数は確定的で積層角と層厚のみが確率的であるとして変形と応力の変動率を二次摂動法により求める。確率変数の共分散マトリックスを入力して二次近

似法により変形と応力の分散を評価する。剛性マトリックスを評価する際には、積層平板は弾性平面応力状態にあり、曲げに関してはキルヒホッフ・ラブの仮定が成立するものとし⁽³⁾、異方弾性板の高度理論⁽⁴⁾には依らない。解析例は一方向圧縮をうけるボロン/エポキシ製長方形板の連成効果による曲げ変形と巨視的な層内応力の変動を取扱う。

2. 剛性と変位解の変動の評価

2.1 積層平板の剛性 図1に積層角 θ 、層厚 t の積層序列を示す。層数を N として板厚方向の z 座標の原点は常に平板中央面にとる。前述の仮定に基づき面内剛性 $[A]$ 、カップリング剛性 $[B]$ 、面外剛性 $[D]$ は $[Q]_n$ を独立な4個の材料定数 E_L , E_T , G_{LT} , ν_{LT} と積層角 θ より定められる平面応力状態における応力-ひずみマトリックスとして次式で与えられる⁽³⁾。

$$[A] = \sum_{n=1}^N [Q]_n (z_{n+1} - z_n) \dots\dots\dots (1)$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [Q]_n (z_{n+1}^2 - z_n^2) \dots\dots\dots (2)$$

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N [Q]_n (z_{n+1}^3 - z_n^3) \dots\dots\dots (3)$$

このときそれぞれ3成分で単位長さ当たりの面内力を

* 昭和60年4月2日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月31日。

** 正員、三菱電機(株) (〒661 尼崎市塚口本町8-1-1)。

*** 正員、高松工業高等専門学校 (〒761 高松市勅使町355)。

**** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

N , 中央面基準のモーメントを M , 同じく 3 成分の中央面の面内ひずみを ϵ_0 , 曲率を κ とすると本研究で用いる応力-ひずみマトリックス $[R]$ は対称となり次式で定義される.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots (4)$$

ϵ_0, κ と節点変位を結びつけるマトリックスを $[S]$ とすると要素剛性マトリックス $[k]$ は次式で求められる. ここでは, 面内ひずみに関しては要素内一定, 曲げに関しては非適合三角形 15 自由度 BCIZ 要素⁽⁵⁾を用い, $[S]$ は確定的である.

$$[k] = \iint [S]^T [R] [S] dx dy \quad \cdots \cdots (5)$$

2・2 積層序列と確率変数 積層序列の確率的変動は, α と β をその期待値が零である微小確率変数として, 各層ごとに式(6), (7)で表されたとする.

$$\theta_n = \bar{\theta}_n + \alpha_n \quad \cdots \cdots (6)$$

$$t_n = \bar{t}_n(1 + \beta_n) \quad \cdots \cdots (7)$$

ここで $\bar{\theta}_n, \bar{t}_n$ は n 層の積層角と層厚の期待値を意味するものとし, 積層序列は各層ごとに確率量であり, 板面内では一様である場合を取扱う. 更に以後の定式化を簡潔にするため, 層厚変動を z 座標の変動に置き換えると, r 層下面の z 座標について式(8)を得る.

$$z_r = \bar{z}_r + \gamma_r \quad \cdots \cdots (8)$$

ここで $\bar{z}_r$ と γ_r は式(7)の t_n より次式で定められる.

$$\bar{z}_r = \sum_{n=1}^{r-1} \bar{t}_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \bar{t}_n \quad \cdots \cdots (9)$$

$$\gamma_r = \sum_{n=1}^{r-1} \bar{t}_n \beta_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \bar{t}_n \beta_n \quad \cdots \cdots (10)$$

ここで確率変数の記号を ϵ に統一し, $k=1 \sim N$ について $\epsilon_k = \alpha_k$, $k=N+1 \sim M$ について $\epsilon_k = \gamma_{k-N}$ とする. $M=2N+1$ は確率変数の総数である.

2・3 剛性マトリックスの変動 上述の確率変数 ϵ_k を用いると, 積層序列が確率的変動をするとき式(4)の応力-ひずみマトリックスの変動は確率変数に関するテイラー展開の二次項までをとり式(11)として評価する. 以後(ˆ)は確定項を意味する.

$$[R] = [\bar{R}] + \sum_k [R_k] \epsilon_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l [R_{kl}] \epsilon_k \epsilon_l \quad \cdots \cdots (11)$$

ここで

$$[R_k] = \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} [R] \quad \cdots \cdots (11 \cdot a)$$

$$[R_{kl}] = [R_{lk}] = \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_k \partial \epsilon_l} [R] \quad \cdots \cdots (11 \cdot b)$$

ただし, 微分値は以後確率変数 $\epsilon=0$ における値とし

て定める. これより式(5)の要素剛性マトリックスを経て, その重ね合せにより系全体の剛性マトリックス $[K]$ の変動が式(12)により評価される.

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_k [K_k] \epsilon_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l [K_{kl}] \epsilon_k \epsilon_l \quad \cdots \cdots (12)$$

2・4 変位解の変動の評価 式(12)で評価される剛性マトリックスの変動に対して, 変位変動も式(13)の確率変数に関する二次多項式で表されると仮定する. 式(12)と式(13)を剛性方程式(14)に代入し, その結果に二次摂動法を適用することにより, 変位の確定項 $\{\bar{U}\}$, 一次と二次変動率 $\{U_k^I\}, \{U_{kl}^{II}\} = \{U_{lk}^{II}\}$ は同一の逆マトリックス $[\bar{K}]^{-1}$ の演算処理により決定することができる⁽²⁾. 荷重 $\{F\}$ は確定的とする.

$$\{U\} = \{\bar{U}\} + \sum_k \{U_k^I\} \epsilon_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \{U_{kl}^{II}\} \epsilon_k \epsilon_l \quad \cdots \cdots (13)$$

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad \cdots \cdots (14)$$

3. 層内応力の変動の評価

3・1 層内のひずみ分布 キルヒホッフ・ラブの仮定に基づき, 中央面から z の位置での面内ひずみ 3 成分 ϵ は中央面での面内ひずみ ϵ_0 と曲率 κ より

$$\epsilon = \epsilon_0 + z\kappa \quad \cdots \cdots (15)$$

で与えられる. ひずみ-節点変位マトリックス $[S]$ を中央面内ひずみおよび曲率に関する 2 個の部分マトリックス $[S_\epsilon]$ および $[S_\kappa]$ に区分すると, 第 r 層下面における面内ひずみ $\epsilon(z_r)$ は関与する節点変位ベクトルを $\{u\}$ として次式で表される.

$$\begin{aligned} \epsilon(z_r) &= [S_\epsilon]\{u\} + (\bar{z}_r + \gamma_r)[S_\kappa]\{u\} \\ &= ([S_\epsilon] + \bar{z}_r[S_\kappa])\{u\} + \gamma_r[S_\kappa]\{u\} \end{aligned} \quad \cdots \cdots (16)$$

r 層上面のひずみ値も同様に評価し得る. 式(16)を確率変数 ϵ について次式に書き換える.

図 1 積層序列と z 座標

$$\epsilon(z_r) = [G]\{u\} + \sum_{k=1}^M [H_k]\{u\}\epsilon_k \dots\dots\dots (17)$$

$$[G] = [S_\epsilon] + \bar{z}_r[S_x] \dots\dots\dots (17\cdot a)$$

$$[H_k] = \begin{cases} [0] & (k \neq N+r) \\ [S_x] & (k = N+r) \end{cases} \dots\dots\dots (17\cdot b)$$

式(13)の一部として得られる節点変位ベクトル $\{u\}$ の変動を式(17)に代入し、 ϵ について三次以上の高次項を省略すると面内ひずみの変動の二次近似式は式(18)の形で得られる。

$$\begin{aligned} \epsilon(z_r) = & [G]\{\bar{u}\} + \sum_k^M ([G]\{u_k'\} \\ & + [H_k]\{\bar{u}\})\epsilon_k + \frac{1}{2} \sum_k^M \sum_l^M ([G]\{u_{kl}''\} \\ & + [H_k]\{u_l'\} + [H_l]\{u_k'\})\epsilon_k \epsilon_l \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

3・2 層内応力の分布 一方、第 r 層の平面応力状態における応力-ひずみマトリックス $[Q]_r$ は積層角変動の影響を受け、その変動の確率変数 ϵ に関する二次近似式は下式となる。

$$\begin{aligned} [Q]_r = & [\bar{Q}]_r + \sum_k^N [Q_k^I]_r \epsilon_k \\ & + \frac{1}{2} \sum_k^N \sum_l^N [Q_{kl}^{II}]_r \epsilon_k \epsilon_l \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$[Q_k^I]_r = \frac{\partial [Q]_r}{\partial \epsilon_k} (k=r), \quad = 0 (k \neq r) \dots\dots\dots (19\cdot a)$$

$$\begin{aligned} [Q_{kl}^{II}]_r = & \frac{\partial^2 [Q]_r}{\partial \epsilon_k^2} (k=l=r), \quad = 0 (\text{その他}) \\ & \dots\dots\dots (19\cdot b) \end{aligned}$$

層内の面内応力 3 成分 σ は面内ひずみ ϵ に対して式(20)で求められるので、 $[Q]_r$ の変動も考慮すると最終的に式(21)の形に二次近似される。

$$\sigma = [Q]_r \epsilon \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma(z_r) = & \bar{\sigma}(z_r) + \sum_k^M \sigma_k^I(z_r) \epsilon_k \\ & + \frac{1}{2} \sum_k^M \sum_l^M \sigma_{kl}^{II}(z_r) \epsilon_k \epsilon_l \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで応力値は第 r 層下面での値を示し、上面も同様に応力評価できる。また式(21)各項は次のとおりである。

$$\bar{\sigma}(z_r) = [\bar{Q}]_r [G]\{\bar{u}\} \dots\dots\dots (21\cdot a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k^I(z_r) = & [\bar{Q}]_r [G]\{u_k'\} \\ & + ([\bar{Q}]_r [H_k] + [Q_k^I]_r [G])\{\bar{u}\} \dots\dots\dots (21\cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}^{II}(z_r) = & [\bar{Q}]_r [G]\{u_{kl}''\} \\ & + ([\bar{Q}]_r [H_k] + [Q_k^I]_r [G])\{u_l'\} \\ & + ([\bar{Q}]_r [H_l] + [Q_l^I]_r [G])\{u_k'\} \\ & + ([Q_k^I]_r [H_l] + [Q_l^I]_r [H_k] \\ & + [Q_{kl}^{II}]_r [G])\{\bar{u}\} \dots\dots\dots (21\cdot c) \end{aligned}$$

3・3 応答統計量の評価 式(13)および式(21)により荷重に対する積層平板の変位または応力は一般に

式(22)の形にまとめられる。

$$\begin{aligned} X = & \bar{X} + \sum_k^M X_k^I \epsilon_k \\ & + \frac{1}{2} \sum_k^M \sum_l^M X_{kl}^{II} \epsilon_k \epsilon_l \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

このとき、二次近似法⁽⁶⁾によれば X の期待値と分散は式(23)、(24)として評価される。

$$E[X] = \bar{X} + \frac{1}{2} \sum_k^M \sum_l^M X_{kl}^{II} E[\epsilon_k \epsilon_l] \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} Var[X] = & \sum_k^M \sum_l^M X_k^I X_l^I E[\epsilon_k \epsilon_l] \\ & + \sum_k^M \sum_l^M \sum_p^M \sum_q^M X_k^I X_l^I X_p^I X_q^I E[\epsilon_k \epsilon_l \epsilon_p \epsilon_q] \\ & + \frac{1}{4} \sum_k^M \sum_l^M \sum_p^M \sum_q^M X_{kl}^{II} X_{pq}^{II} (E[\epsilon_k \epsilon_l \epsilon_p \epsilon_q] \\ & - E[\epsilon_k \epsilon_l] E[\epsilon_p \epsilon_q]) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

上式の右辺の $E[\cdot]$ は確率変数のモーメントである。確率変数が正規分布に従う場合には三次モーメントは零となり、四次モーメントは二次モーメントの積和で表される。したがって正規分布を仮定するとき二次近似法による統計量評価において必要となるのは確率変数の二次モーメントまでである。

一方、本研究においては積層序列が確率的に変動するとし、層厚の変動を確率変数 β で表現し、変位と応力の変動の定式化においては z 座標の確率変動 γ に置き換えて統一的な確率変数 ϵ で記述している。 γ と β の線形関係式(10)を式(25)と書き換えれば、 γ の共分散は式(26)として計算される⁽⁶⁾。

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^N a_i^k \beta_i \dots\dots\dots (25)$$

$$E[\gamma_k \gamma_l] = \sum_i^N \sum_j^N a_i^k a_j^l E[\beta_i \beta_j] \dots\dots\dots (26)$$

本研究においては、積層角と層厚の確率変動を共分散マトリックスの形で与え、式(26)を用いて積層角と z 座標変動の共分散マトリックスに変換して式(23)、(24)の二次モーメントの入力とした。

4. 数値計算例

数値解析例は一樣な面内圧縮を受ける長方形積層平板でその要素分割を図2に示す。材料定数はポロン/エポキシ材を想定して $E_L = 206.9$ GPa, $E_T = 20.69$ GPa, $G_{LT} = 6.89$ GPa, $\nu_{LT} = 0.3$ とした⁽⁷⁾。各層厚の期待値はすべて 0.1 mm とし、積層数は積層角の期待値を表1に示す2例を取扱う。ケース1は板中央面に関して上下対称であり、擬似等方性⁽⁸⁾を示し得るとされている3層、積層角位相差 60° を2個重ねたものである。この積層序列の期待値に対してカップリング剛性は零となり、面外変形と面内変形は連成しない。ケ

ース2は異方性が顕著で、またカップリング剛性が非零となる場合である。図2のAB, CD辺の面外、面内境界条件はすべて自由でAC, BD辺は面外変形に対して単純支持条件である。

図3, 4にケース1について積層角 θ_1 の変化に対するたわみと層厚 t_1 の変化に対するせん断応力の変化を示す。たわみは図3中 P_1 点における値で、せん断応力は第1層下面(板面内一様)における値である。積層角を確定的に変化させた場合のプロットと摂動解の一致から一次、二次変動率計算の正しさが検証されている。

この検証の後、式(23), (24)によるたわみと応力の統計量の推定を行う。ケース1について、6個の積層角の標準偏差をすべて 2° 、6個の層厚の標準偏差をすべて 0.001 mm とし、 α と β はすべて無相関で正規確率変数であるとする。したがって、本計算例では各変数の分散のみを入力している。図5はこのときのAB,

CD辺のたわみの標準偏差を示す。たわみの期待値は一次近似による結果とほとんど一致し、カップリング剛性が零の場合に予想されるように零となっている。一方、面内変形については圧縮方向の縮みの期待値は 0.101 mm 、変動係数は 4.2% 、 y 方向の伸びは期待値 0.0084 mm 、変動係数 27.4% の結果が得られた。擬似等方性を期待値において示す積層序列においても、その変動に対する変形と応力の変動幅が大きい。特にたわみは積層角の変化に対して敏感に変動することが図3, 5に示されている。

図6, 7にケース1, 2について層内応力の期待値と 3σ 限界(標準偏差3倍値の加減)を示す。入力した共分散マトリックスは前述のとおりである。期待値は板面内で一様であるが、標準偏差は板面内で変化するので、一例として図2の P_1 点における 3σ 限界を示してある。板中央面について上下対称性が成立するケース1の標準偏差は中央面に関して上下対称となっているが、対称性の成立しないケース2の場合には標準偏差

表 1 各層の積層角期待値

Layer	1	2	3	4	5	6
Case 1	120°	60°	0°	0°	60°	120°
Case 2	135°	0°	45°

図 2 長方形積層平板の有限要素分割

図 3 第1層積層角 θ_1 による点 P_1 のたわみ

図 4 第1層厚 t_1 による第1層下面せん断応力の変化

図 5 積層平板の両側辺のたわみの標準偏差

図 6 層内分布応力の期待値と 3σ 限界 (ケース 1) 図 7 層内分布応力の期待値と 3σ 限界 (ケース 2)

は中央面に対して非対称になっている。この傾向は全要素について見られる。図 6, 7 は層内応力分布を示すものであるが、層間応力の変動について定式化と図示は可能である。

図 8 は図 8 中 IJ 線に沿うケース 1 の第 2 層下面応力の変動係数分布を、図 9 はケース 2 の第 1 層下面応力のそれを示す。各応力成分の変動係数の値および分布は積層序列にかなり依存していることが示されている。

図 10 は影響の大きい積層角変動に対する第 1 層下面応力の依存性をケース 1 について示したものである。これは層厚の標準偏差をすべて零とし、すべての積層角標準偏差を無相関で同量だけ変化させて得られたものであり、影響の大きいことは変動係数値が大きいことにより示されている。層厚の影響について調べたところ、変動係数で 3% の層厚変動に対して、層内応力の変動係数は約 3% 以下であった。一次近似法によれば図 10 のプロットはすべて直線上になることになるが、特に図 10 中の τ_{xy} に見られるようにプロットは必ずしも直線上にはない。これは二次近似法と一次近似法による期待値と分散評価の差を示している。

本研究は微小たわみの線形板曲げ理論に立脚している。図 5 のようにたわみ標準偏差が板厚の約 6 倍に達する結果は線形理論の枠内で、しかも積層角標準偏差 2° に対して得られたものである。たわみがこの程度に大きく変動する場合には、確率有限要素法を大たわみ理論へと拡張し、統計量推定の確度を向上させること

図 8 層内応力の変動係数分布 (ケース 1)

図 9 層内応力の変動係数分布 (ケース 2)

図 10 層内応力変動の積層角標準偏差依存性 (P_2 点)

が今後の課題と考える。

5. 結 論

繊維強化形複合材積層平板の積層序列の確率的変動の変形と応力に及ぼす影響を推定するために確率有限要素法の適用をはかり、以下の結果が得られた。

- (1) 積層角と層厚が変動する場合の直交異方性積

層平板の線形理論の枠内における剛性マトリックスの変動の定式化を行った。

(2) 二次摂動法に基づく確率有限要素法を適用し、変位解および層内応力の変動率の定式化を行った。更に確率変数の共分散マトリックスを想定し、二次近似法により解の期待値と分散の評価を行い、ボン/エポキシ材について数値解析例を示した。

(3) 本数値解析例においては層厚変動よりも積層角変動のほうが分散により大きく影響することが示されている。

文 献

- (1) 小林, 機械の研究, 36-9 (昭 59), 993.
- (2) 中桐・久田・糸谷, 機論, 48-427, A (昭 57), 339.
- (3) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, (1975), 154, McGraw-Hill Kogakusha.
- (4) Ambartsumian, S. A. (大橋・神谷訳), 異方弾性板の理論, (昭 50), 19, 森北出版.
- (5) Zienkiewicz, O. C., (吉識・山田監訳), マトリックス有限要素法, 三訂版 (昭 59), 235, 培風館.
- (6) Ang, A. H. S. and Tang, W. H., *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, 1 (1975), 191, John Wiley and Sons.
- (7) Hirano, Y., *AIAA J.*, 17-9 (1979), 1017.
- (8) 林, 複合材料工学, (昭 49), 550, 日科技連.