不均質半無限体の定常熱応力解析*

畑 俊 明**

Thermal Stresses in a Nonhomogeneous Semi-Infinite Elastic Solid
under Steady Distribution of Temperature

by Toshiaki HATA

The principal aim of this paper is to investigate the thermoelastic problems in a non-homogeneous semi-infinite elastic solid whose shear modulus increases with its depth according to relation $\mu_T(z) = \mu_0 z^\alpha$ (μ_0 and α are constants). The solution of the problem is determined by using two kinds of displacement functions.

In this paper, the case $\alpha\nu = 1 - 2\nu$, ν = Poisson's ratio, corresponding to an alloy made in a process of binary diffusion coupled with a large concentration gradient is discussed in detail.

Numerical results are presented for the thermal stress distribution in a nonhomogeneous semi-infinite elastic solid with surface radiation.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Nonhomogeneity, Semi-Infinite Solid

1. 緒 言

従来の熱応力の研究は、主に、均一な材料を対象とするものであったが、近年、解析の困難な不均質弾性体の熱応力解析が重要性を増してきた。この種の不均質弾性体は、浸炭や振散溶接などによりしばしば生ずるものである⁽¹⁾。

しかし、この種の不均質弾性体の熱応力解析は、ほとんど行われていないようである⁽²⁾⁽³⁾。それは、不均質弾性体に熱応力が生ずる問題を厳密に解析しようとする、基礎式が複雑になるため、これが解析のあい路になっているようである。

だが最近著者は、新しい2種類の変位関数を導入⁽⁴⁾して、Kassir の不均質弾性体⁽⁵⁾の熱応力解析法を確立した。そして、その解を用いて表面から熱放散のある不均質厚板の定常熱応力を解析し解の有効性を明らかにした。

本報では、前報の解析法を不均質半無限体に適用し解の有効性と不均質弾性体の工学的価値を明確にしようとするものである。

本報では、不均質弾性体に生ずる熱応力解析を、横弾性係数 $\mu(z) = \mu_0 z^\alpha$ (μ_0, α は一定) で、 $\alpha\nu = 1 - 2\nu$ となる Kassir の不均質弾性体について一般解を求めた。この際、不均質体の線膨張係数は場所の任意関数とし、熱伝導率は、 $K(z) = K_0 z^\beta$ (β : 一定) とした。一般解は、まず、変位関数 ϕ, ψ を導入して熱応力場の基礎式を求め、ハンケル変換を用いて一般解を求めた。更に、この解を用いて、表面から熱放散のある不均質半無限体の定常熱応力を解析し、数値計算を行い解の有効性を明らかにした。

また、本報では、不均質弾性体を固体拡散により作成する方法についても言及した。拡散対としては、すず-銅の対を対象とした。そして、この不均質半無限体に熱応力が生ずる場合、上記の解析が適用でき、近似解が得られることについても検討を加える。

2. 解 法

ここでは、円筒座標系 (r, θ, z) の軸対称問題を対象とする。したがって応力-ひずみ関係は次式とする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu_T e_r + \lambda_T e - (3\lambda_T + 2\mu_T)\alpha_T(z)T \\ \sigma_\theta &= 2\mu_T e_\theta + \lambda_T e - (3\lambda_T + 2\mu_T)\alpha_T(z)T \\ \sigma_z &= 2\mu_T e_z + \lambda_T e - (3\lambda_T + 2\mu_T)\alpha_T(z)T \\ \tau_{rz} &= 2\mu_T e_{rz} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

* 昭和60年4月1日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月1日。

** 正員、静岡大学教育学部(〒422 静岡市大谷 836)。

ここで、 λ_T, μ_T はラーメの定数、 $\alpha_T(z)$ は線膨張係数である。また、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ は、軸対称円筒座標系での応力であり、 $e_r, e_\theta, e_z, e_{rz}$ は対応するひずみで、 $e = e_r + e_\theta + e_z$ 、 T は温度である。

応力の釣り合い方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

変位とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{rz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式(3)を式(1)に代入し、それを式(2)に代入すると、変位の釣り合い方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} + 2 \frac{\mu_{T,z}}{\mu_T} e_{rz} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} [\alpha_T(z) T]_{,r} &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} + 2 \frac{\mu_{T,z}}{\mu_T} \left[e_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} [\alpha_T(z) T]_{,z} - \frac{\mu_{T,z}}{\mu_T} \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} [\alpha_T(z) T] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r)(\partial / \partial r) + \partial^2 / \partial z^2 \dots\dots\dots (5)$$

式(4)を解析する際、本報では、Kassir の不均質弾性体の仮定⁽⁴⁾を導入する。この不均質弾性体では、横弾性係数は、 $\mu_T(z) = \mu_0 z^\alpha$ (μ_0, α は一定)で与えられ、かつ、 α はポアソン比 ν と、 $\alpha\nu = 1-2\nu$ の関係が成り立つものとする。このようにすれば、 $0 < \nu < 1/2$ の時、 α は $(0, \infty)$ の値をとり得ることができる。また、線膨張係数 $\alpha_T(z)$ は z の任意関数である。

ここで、式(4)の解を得るために、二つの変位関数 ϕ, ψ を導入して変位を表示する。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} + z \frac{\partial \psi}{\partial r}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \phi + z \frac{\partial \psi}{\partial z} \dots\dots\dots (6)$$

式(6)を式(4)に代入すると次式が得られる。

$$\nabla^2 \psi + \frac{\alpha}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1+\nu}{\nu} \alpha_T(z) T = 0, \nabla^2 \phi + \frac{\alpha}{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\alpha}{z^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\alpha}{z} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T(z) T = 0 \dots\dots\dots (7)$$

対応する応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2\mu_T \left[- \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\alpha}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T(z) T \right] \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= 2\mu_T \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (\psi + z\phi) \right] \\ \sigma_z &= 2\mu_T \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T(z) T \right] \\ \tau_{rz} &= 2\mu_T \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

3章で、これらの変位関数を用いて実際に、工学的に重要な不均質半無限体の熱応力解析を行う。

3. 不均質半無限体の定常熱応力

本報では、図1に示されるような、 $z \geq h$ にある不均質半無限体の表面から熱放散がある場合について定常熱応力解析を行う。

温度条件は、 $z=h$ の表面の半径 a の円形領域が T_0 に加熱されているものとする。したがって、この場合の温度場の境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial T}{\partial z} - H(T - \Theta) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 H は相対熱伝達率であり、 $\Theta(r, h)$ は次式で与えられる。

$$\Theta(r, h) = \begin{cases} T_0 & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

不均質半無限体の温度場の基礎式は、定常状態では次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\text{div}(K \nabla T) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 K は熱伝導率で次式で与えられるものとする。

$$K(z) = K_0 z^\beta (\beta: \text{一定}) \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を式(11)に代入すると、不均質半無限体の熱伝導の基礎式は次式となる。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\beta}{z} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

式(13)を解析する際、次式のハンケル変換および逆変換を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}(\xi, z) &= \int_0^\infty r T(r, z) J_0(\xi r) dr \\ T(r, z) &= \int_0^\infty \xi \bar{T}(\xi, z) J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $J_0(\xi r)$ は零次のベッセル関数である。

次に、式(14)を式(13)に適用すると次式が求まる。

$$\bar{T}(\xi, z) = A_0(\xi) z^\mu K_\mu(\xi z) \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $\mu = (1-\beta)/2$ 、 $K_\mu(\xi z)$ は次数 μ の第2種変形ベッセル関数である。

また、式(15)の未知関数 $A_0(\xi)$ は温度条件式(9)より次式のように決定される。

$$A_0(\xi) = HT_0 \frac{a J_1(\xi a)}{\xi} \frac{h^{-\mu}}{\xi K_{\mu-1}(\xi h) + HK_\mu(\xi h)} \dots\dots\dots (16)$$

式(15)で $\beta=0$ のとき

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{H}{2z}} e^{-z}$$

図1 座標系

の関係を用いると、温度場は次式の解となる。

$$\bar{T}(\xi, z) = A(\xi) e^{-\xi z} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$A(\xi) = \left\{ \frac{HaT_0}{(\xi a + Ha)} \frac{a^2 J_1(\xi a)}{\xi a} \right\} e^{\xi h} \dots\dots\dots (18)$$

次に、熱応力場の解を求める。この際、温度場は式(17)を用い、線膨張係数 $\alpha_T(z) = \alpha_0$ (一定)として、解析を行う。変位関数を得るために、式(7)にハンケル変換を用い、次式の解を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}(\xi, z) &= C_1 z^p K_p(\xi z) + C_2 z^p I_p(\xi z) - \frac{\alpha_0(1+\nu)}{\xi} \frac{(1+\xi z)}{\xi} A(\xi) e^{-\xi z} \\ \bar{\phi}(\xi, z) &= D_1 z^p K_p(\xi z) + D_2 z^p I_p(\xi z) - \frac{\nu \xi}{(1-\nu)} [C_1 z^p K_{p-1}(\xi z) - C_2 z^p I_{p-1}(\xi z)] + (1+\nu) \alpha_0 A(\xi) \frac{e^{-\xi z}}{\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $p = (1-\alpha)/2$ 、また、 $I_p(\xi z)$ は次数 p の第1種変形ベッセル関数である。

式(19)の未定定数 C_1, C_2, D_1, D_2 は、次の応力の境界条件式より決定される。

$z=h$ で

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

また、半無限体であるから、 $z \rightarrow \infty$ ですべての応力、変位成分は零とならなければならないので、式(19)の定数 C_2, D_2 は $C_2 = D_2 = 0$ となる。このようにすればすべての未定定数は決定される。最終的に、半無限体に生ずる応力は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{\mu_0^* \alpha_0 T_0} &= 2 \left(\frac{z}{h} \right)^a \int_0^\infty \left[C_1^* \left[\xi^2 z^p K_p(\xi z) + \left\{ \alpha - \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} (1-\xi^2 z^2) \right\} \xi z^{p-1} K_{p-1}(\xi z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \xi^2 z^p K_{p-2}(\xi z) \right] + D_1^* \left[\xi^2 z^{p+1} K_p(\xi z) + (1+\alpha) \xi z^p K_{p-1}(\xi z) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2(1-2\nu) \frac{1+\nu}{1-\nu} A(\xi) e^{-\xi z} \right] \xi J_0(\xi r) d\xi \\ \frac{\tau_{rz}}{\mu_0^* \alpha_0 T_0} &= 2 \left(\frac{z}{h} \right)^a \int_0^\infty \left[C_1^* \xi z^p \left[K_{p-1}(\xi z) + \frac{\nu}{1-\nu} \{ K_{p-1}(\xi z) - \xi z K_{p-2}(\xi z) \} \right] \right. \\ &\quad \left. + D_1^* \xi z^{p+1} K_{p-1}(\xi z) \right] \xi^2 J_1(\xi r) d\xi \\ \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{\mu_0^* \alpha_0 T_0} &= 2 \left(\frac{z}{h} \right)^a \int_0^\infty \left[- (C_1^* + D_1^*) \xi \left[\xi z^p K_p(\xi z) + \alpha z^{p-1} K_{p-1}(\xi z) \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{C_1^*}{\nu} + \frac{D_1^*}{\nu} z + \frac{\nu}{1-\nu} C_1^* \xi^2 z^2 \right) \xi z^{\rho-1} K_{\rho-1}(\xi z) - \frac{2\nu}{1-\nu} C_1^* \xi^2 z^{\rho} K_{\rho-2}(\xi z) \\
& - (1+\nu) A(\xi) e^{-\xi z} \Big] \xi J_0(\xi r) d\xi \\
\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\mu_0^* \alpha_0 T_0} = & 2 \left(\frac{z}{h} \right)^\alpha \int_0^\infty \left[(C_1 + D_1 z) z^\rho K_\rho(\xi z) - \frac{\nu}{1-\nu} C_1^* \xi z^{\rho+1} K_{\rho-1}(\xi z) \right. \\
& \left. - (1+\nu) A(\xi) \xi^{-2} e^{-\xi z} \right] \left[-\xi^2 J_0(\xi r) + 2 \frac{\xi J_1(\xi r)}{r} \right] \xi d\xi
\end{aligned}
\tag{21}$$

ここで $C_1^* = C_1/\alpha_0 T_0$, $D_1^* = D_1/\alpha_0 T_0$, かつ, $\mu_0^* = \mu_0 h^\alpha$,

未定定数 C_1^* , D_1^* は境界条件式(20)より次式のように決定される。

$$\left. \begin{aligned}
C_1^* &= - \frac{h K_{\rho-1}(\xi h)}{K_{\rho-1}(\xi h) + \{\nu/(1-\nu)\} \{K_{\rho-1}(\xi h) - \xi h K_{\rho-2}(\xi h)\}} D_1^* \\
C_1^* \left[\xi^2 h^\rho K_\rho(\xi h) + \left\{ \alpha - \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} (1-\xi^2 h^2) \right\} \xi h^{\rho-1} K_{\rho-1}(\xi h) - \xi^2 h^\rho K_{\rho-2}(\xi h) \right] \\
&+ D_1^* [\xi^2 h^{\rho+1} K_\rho(\xi h) + (1+\alpha) \xi h^\rho K_{\rho-1}(\xi h)] = -2(1-2\nu) \frac{1+\nu}{1-\nu} A(\xi) e^{-\xi h}
\end{aligned} \right\} \tag{22}$$

式(21)で, $\nu=1/2(\alpha=0)$ を代入すると, 均質半無限体の解が得られる。更に, $\lim_{z \rightarrow 0} K_\nu(z) z^{-\nu} = 2^{-\nu-1} \Gamma(\nu)$ で, $h=0$, $Ha \rightarrow \infty$ を代入すると, 均質半無限体の表面での熱応力分布が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\sigma_r}{\alpha_0 \mu_0 T_0} &= -3 \int_0^\infty \frac{J_1(\xi a) J_1(\xi r)}{r \xi} d(\xi a) = \left\{ -\frac{3}{2} \frac{a^2}{r^2} (r > a), -\frac{3}{2} (0 < r < a) \right\} \\
\frac{\sigma_\theta}{\alpha_0 \mu_0 T_0} &= -3 \int_0^\infty J_1(\xi a) \left\{ J_0(\xi r) - \frac{J_1(\xi r)}{r \xi} \right\} d(\xi a) = \left\{ \frac{3}{2} \frac{a^2}{r^2} (r > a), -\frac{3}{2} (0 < r < a) \right\}
\end{aligned} \right\} \tag{23}$$

4. 数値計算および考察

数値計算例として, $a/h=1$ であるような不均質半無限体を対象とした。また, 横弾性係数を $\mu_r = \mu_0 z^\alpha$ と表した時の α の値は, 次の二つの場合を取扱った。

(I) 不均質半無限体 $\alpha=1/2(\nu=0.4)$

(II) 均質半無限体 $\alpha=0$ ($\nu=0.5$)

場合(I)において, $\mu_0 z^{1/2}$ でポアソン比0.4となる不均質半無限体を採るのは, 一般に困難なように思われるが, 図1で明らかなように, $z=h$ から $z>h$ で半無限体が広がると考え, この幾何学的な定数 h を適当に選べば, 実際の不均質弾性体の横弾性係数にほぼ一致させることができる。このことについては, 後でもう一度検討を加える。

数値計算に際しては, 名古屋大学大型計算機センタの FACOM M-200 機を用いた。数値計算の結果は, 図2~5に示すとおりである。これらの図で実線は, 場合(I)の不均質半無限体を, また, 破線は場合(II)の均質半無限体を表す。

図2は, $Ha=\infty$ の場合の半径方向の応力 σ_r^* を, z/h をパラメータとして, 半径方向の変数 r/a を横軸にして描いたものである。

図2から明らかなように, $0 < r/a < 1.0$ の表面が加熱されている領域では, 不均質体の応力分布は均質体の応力分布より, 約50%高くなる。しかし, $r/a > 1.0$ の領域

では, 実線と点線の応力分布の差は, r/a が大となるに従って, 著しく減少する。

図3は, $Ha=\infty$ の場合の円周方向の応力 σ_θ^* の半径方向の分布を, z/h をパラメータとして図示したものである。

この場合も, 図2と同様に, $0 < r/a < 1.0$ の領域では, 不均質体の応力分布は, 均質体の応力分布より応力値が高い。例えば, $r/a=0$ の点で, $z/h=1.0$ の σ_θ^* は, 実線のほうが点線より, 50%程度応力値が高い。 $z/h=2.0$ の応力値についても同様である。

しかし, $r/a > 1.0$ の領域では, 不均質体の応力分布は, 均質体の応力分布とほぼ一致する。

図4は, 半無限体の表面に生ずる応力 σ_r^* の分布を相対熱伝導率をパラメータとして描いたものであり, 実線は場合(I)の不均質半無限体に, 破線は場合(II)の均質半無限体の応力分布に対応している。図5は, 半無限体の表面に生ずる応力 σ_θ^* について, 同様の図を描いたものである。

図4と図5で, 実線と点線の応力分布を比較するとこの場合も, $0 < r/a < 1.0$ では, 実線と点線の応力値の差は大であるが, $r/a > 1.0$ では, ほぼ実線と点線の応力値は一致する。

図4で, $0 < r/a < 1.0$ では, $Ha=\infty$ のとき, 実線の応力 σ_r^* の応力値の絶対値は最大で, $Ha=1.0$ のとき $Ha=\infty$ の約60%, $Ha=0.1$ のとき, $Ha=\infty$ の約40

%である。また、破線の応力 σ_r^* の応力値の絶対値は $Ha=\infty$ のとき最大で、 $Ha=1.0$ のとき $Ha=\infty$ の約45%、 $Ha=0.1$ のとき、 $Ha=\infty$ の約10%である。この傾向は、図5の場合についても同様である。

また、図4、5より明らかなように、 $0 < r < a$ の領域では、等しい相対熱伝導率 Ha の実線と破線の応力値の差は、ほぼ等しくなる。

次に、実線に生ずる半無限体の解析に、本解を適用すると、近似解が得られることを示そう。

まず、不均質半無限体は、すずを C_0 %含む青銅板を銅板に拡散溶接⁽¹⁾する場合を対象とする。この際、拡散はフィックの法則に従うものとする。

$t=0$ のときの初期条件として、青銅板(すず C_0 %含む)は、 $h \leq z \leq h+h_1$ を、銅板は、 $z > h+h_1$ を占めるものとする。したがって、初期条件は、

$t=0$ で

$$\left. \begin{aligned} C &= C_0 \quad (h \leq z \leq h+h_1) \\ C &= 0 \quad (z > h+h_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 C はすずの重量百分率である。

拡散方程式は、拡散係数を D とすると次式で与えられる。

$$DC_{,zz} = C_{,t} \dots\dots\dots (25)$$

境界条件より、

—: 不均質半無限体
---: 均質半無限体

図2 半無限体に生ずる応力 $\sigma_r^*(\sigma_r/\alpha_0\mu_0 T_0)$ の分布

—: 不均質半無限体の場合
---: 均質半無限体の場合

図4 半無限体の表面に生ずる応力 $\sigma_r^*(\sigma_r/\alpha_0\mu_0 T_0)$ の分布

—: 不均質半無限体
---: 均質半無限体

図3 半無限体に生ずる応力 $\sigma_\theta^*(\sigma_\theta/\alpha_0\mu_0 T_0)$ の分布

—: 不均質半無限体の場合
---: 均質半無限体の場合

図5 半無限体の表面に生ずる応力 $\sigma_\theta^*(\sigma_\theta/\alpha_0\mu_0 T_0)$ の分布

$$z=h \text{ で } C_z=0 \cdots \cdots (26)$$

式(25)の解は、文献(6)より次式のように与えられる。

$$C = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{h+h_1-z}{2\sqrt{Dt}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{h_1-h+z}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \cdots \cdots (27)$$

次に文献(7)より、銅と青銅(30% Sn)ともポアソン比は0.4とみなすべく、ヤング係数 E はすずの重量百分率により次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$E(x) = (0.1174 - 0.2246x + 1.347x^2 - 5.814x^3 + 8.495x^4) \times 9.8 \times 10^5 \text{ MPa} \cdots (28)$$

$$x: (\text{すずの重量}\% \div 100) \quad (0 \leq x \leq 0.3)$$

図6の左図は、 $C_0=30\%$ 、 $(Dt/h^2)^{1/2}=0.06$ 、 $h_1/h=0.5$ のときの横弾性係数の変化を描いたものである。

図6の右図は、 $\mu_r(z) = \mu_0^* \sqrt{z/h}$ 、 $(\mu_0^* = 3 \times 9.8 \times 10^3 \text{ MPa})$ のときの値を実線で描き、白丸印は、左図の濃度分布に対応する横弾性係数を描いたもので、両者はほぼ一致していることは明らかである。

5. 結 論

本報の結果を要約すれば以下になる。

(1) 本報は、Kassirの不均質半無限体の熱応力を解析する際に、まず、変位関数 ϕ, ψ を導入することにより、不均質体の熱応力場の基礎式を求めた。そして、この基礎式に、ハンケル変換を用いて一般解を求めた。更に、この解を表面から熱放散のある不均質半無限体の定常熱応力解析に適用した。

(2) 数値計算例として、 $a/h=1$ で横弾性係数 $\mu_r = \mu_0 z^{1/2}$ ($\nu=0.4$)となる不均質半無限体の定常熱応力を解析し、均質半無限体の結果と比較した。その結果、 $0 < r < a$ の表面が加熱されている領域では、不均質体の応力分布は均質体の応力分布より約50%程度応力値が高くなる。したがって、不均質半無限体の熱応力解析に際しては、材質の不均質性の効果を考慮しなければならない。

—: $\mu_r = \mu_0^* (z/h)^{1/2}$ の横弾性係数
 ...: 左図に対応する横弾性係数
 図6 左図: 青銅-銅の濃度分布
 右図: 横弾性係数の分布

(3) 実際の不均質半無限体に、本解析を適用する場合、 h と μ_0 の値を実際の数値より決定すれば、本解析は近似解となるということを示すために、青銅-銅拡散対を対象として検討を加えた。

最後に、本研究にあたり終始懇切なご教示とご指導を賜った東北大学工学部 渥美光教授に深く感謝致します。また、本研究は、昭和59年度文部省科学研究費補助金をいただきましたことをここに記し、あわせて感謝の意を表します。

文 献

- (1) 溶接学会編, 溶接便覧, (昭52), 613, 丸善.
- (2) Olszak, W. 編, *Proc. Symp. IUTAM*, (1959).
- (3) Awojobi, A. and Gibson, R. E., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 26-3 (1973), 285-300.
- (4) Hata, T., *J. Thermal Stresses*, 5-1 (1982), 1.
- (5) Kassir, K., *ASCE*, 98 (1972), 457.
- (6) Carslaw, H. S. and Jager, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd. ed. (1959), 11, Oxford.
- (7) 日本機械学会編, 金属材料の弾性係数, (昭55), 142, 日本機械学会.

討 論

〔質問〕 谷川 義 信 [大阪府立大学工学部]

難解な不均質体に対する熱弾性問題を見事に解析されたことに敬服する。以下の点についてご教示いただきたい。

(1) $\alpha=1/2$ の場合について解析されているが、文献(4)の厚板などの解析においては、 $\alpha=1/2$ と設定したまま、 h を調節することにより、板厚方向の不

均質性を十分表現できるものなのか。また、 $\alpha \neq 1/2$ の場合に対する解析の取扱いおよび非定常問題を扱う場合についての見通しはどうか。

(2) 熱的物理定数、例えば熱伝導率、線膨張係数の設定に関し、温度依存性を無視するとしても、横弾性係数と同じく、 z の関数として考慮すべき必要性の有無についてはどうか。