き裂エネルギー密度の立場から見たクリープき裂進展挙動と き裂進展シミュレーション*

渡 辺 勝 彦**, 番 政 広***

Behavior of Creep Crack Growth and Its Simulation from the Standpoint of Crack Energy Density

by Katsuhiko WATANABE and Masahiro TSUGAI

The general condition by which the rate of crack growth is controlled is discussed based on the concept of crack energy density $\mathcal{E}$, and especially the parameters of creep crack growth rate are proposed, that is, it is shown that the average values of $\partial\mathcal{E}_I/\partial t$, $\partial\mathcal{E}_{X_I}/\partial X_I$ concerning with $\mathcal{E}$ which correspond to the increase rate and the gradient of $\mathcal{E}$ at the crack tip respectively are the parameters of creep crack growth rate based on the creep crack model in which a crack extends discontinuously with respect to time. And the crack growth of center notched specimen in tensile creep under plane stress condition is simulated by means of Finite Element Method. In the analysis, the condition of constant $\mathcal{E}_c$ (critical value of $\mathcal{E}$) is used. The validities of $\partial\mathcal{E}_I/\partial t$, $\partial\mathcal{E}_{X_I}/\partial X_I$ as parameters of creep crack growth are numerically verified through this analysis.

Key Words: Fracture, Creep, Crack Growth Rate, Crack Energy Density, Creep Crack Parameter, Crack Growth Simulation

1. 緒 言

破壊力学において最も基本的な役割を担うものとしてき裂エネルギー密度の概念が著者の一人により提唱され、き裂エネルギー密度は任意の構成則に従うき裂材に対して常にその物理的意味が明確であるゆえに、線形、非線形を問わず、広い範囲の現象に対してき裂の一生を通じて有効なき裂パラメータとして期待されることが明らかにされてきた⁽¹⁾⁽²⁾。またこのき裂エネルギー密度は、連続体モデルの場合、熱、慣性力、体積力をも考慮した最も一般的な場において径路独立な $\mathcal{E}_I$, $\mathcal{E}_J(t, X_I)$ 積分によりそれぞれき裂先端およびその前方の分布が評価されることが示され、弾塑性およびクリープき裂などにおいて、有限要素解析を通じて、その評価法が確立されつつある^{(3)~(6)}。

本研究はこのき裂エネルギー密度のクリープき裂進展挙動への適用を試みたものであり、はじめにき裂エネルギー密度の立場からの時間変化に対して連続な、滑ら

かに進展するき裂の進展速度についての一般的な考え方を確立し、さらに時間的に不連続なき裂進展を想定してクリープき裂速度およびそれを支配するパラメータについての考察を行うとともに、連続体モデルにおける、き裂進展速度に関連する量の径路独立積分による表示について述べる。また有限要素解析による破壊条件として限界き裂エネルギー密度一定とする場合の弾性クリープき裂進展シミュレーションを行い、前半の理論的考察結果についての検証ならびに検討を行う。

2. き裂進展速度の満たすべき条件

本章においては、まずき裂エネルギー密度およびその分布についての定義を与え、引き続きき裂エネルギー密度の立場から見たき裂進展速度の満たすべき一般的条件、さらにはクリープき裂進展速度についての考察を行う。またき裂進展速度に関連する量の径路独立積分による表示を与える。

2.1 き裂エネルギー密度とその分布 現実のき裂先端近傍に生じる変形を反映したモデルにおいてはき裂エネルギー密度はき裂端前方に分布する⁽²⁾⁽⁷⁾。連続体モデルによるとき、有限先端曲率半径を有する切欠きを考えればこのき裂エネルギー密度分布の効果も含めた議

* 昭和 60 年 3 月 31 日 第 62 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 59 年 10 月 31 日。

** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

*** 准員、三菱電機(株) (〒661 尼崎市南清水平字中野 80)。

論が可能になるということがあるので⁽⁶⁾⁽⁸⁾、本論文においては、き裂モデルとして適当な先端曲率半径を有する切欠きを考えて論を進めるが、次の2・2、2・3節における議論は現実のき裂端近傍に生じる変形を反映したモデルを考える場合にも有効である。

さて、図1(a)に示すような時刻 $t=0$ (初期状態) において長さ a_0 であったき裂が負荷を受けて進展を始め、現在の時刻 $t=t$ においてその長さが a となっている状況を考える。き裂エネルギー密度分布は

$$\mathcal{E}(t, X_1) = \int_{\Gamma(X_1)} W dX_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし

$$W = \int_0^t \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

によって定義され、図1(b)に示すようにき裂端前方に分布する⁽⁶⁾⁽⁸⁾。ここで σ_{ij} , ϵ_{ij} は応力、ひずみのテンソル成分でありひずみエネルギー密度 W は実際の負荷経路に沿って積分するものとする。また $\Gamma(X_1)$ は現在のき裂端の形状にそった経路 $\Gamma(a)$ と同一形状のき裂端前方の経路であり、厚さ方向には単位厚さを考えるものとする。

2・2 滑らかに進展するき裂の進展速度が満たすべき一般条件 ある負荷条件下において実際に実現されるき裂進展を考え、刻々のき裂先端に実際に生じるき裂エネルギー密度を $\mathcal{E}_c$ とする。このとき

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(a_r(t)) \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表すことができ、 $a_r(t)$ は時間に対する実際のき裂長さの変化を表わすことになる。一方、同じ負荷条件下において力学的には任意のき裂進展速度を想定する

ことが可能であり、この任意のき裂進展に対して生じるき裂エネルギー密度を

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a(t)) \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表す。このように考えるとき「実際のき裂進展は力学的に可能なき裂進展のうち、常に $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$ (すなわち $a(t) = a_r(t)$) を満たすものとして実現される」というようにとらえることができ、 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$ が現実に得られるき裂進展速度を定める必要十分条件となる。さらにき裂がなめらかに進展する場合き裂先端における $\mathcal{E}$ のき裂長さに対する変化率が

$$\frac{d\mathcal{E}}{da} = \frac{d\mathcal{E}_c}{da_r} \text{ or } \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を満足することが必要であり、 $d\mathcal{E}/dt$ は $\mathcal{E}$ が X_1 方向に分布する量であることを考えるとき

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}^+}{\partial t} + a \frac{\partial \mathcal{E}^+}{\partial X_1} \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表されるので、式(4)は

$$\dot{a} = \left(\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} - \frac{\partial \mathcal{E}^+}{\partial t} \right) / \left(\frac{\partial \mathcal{E}^+}{\partial X_1} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

とも表されることになる。ただし $(\partial \mathcal{E}^+)/(\partial t) = \lim_{X_1(t-a) \rightarrow a} [\partial \mathcal{E}(t, X_1)]/(\partial t)$, $(\partial \mathcal{E}^+)/(\partial X_1) = \lim_{X_1(t-a) \rightarrow a} [\partial \mathcal{E}(t, X_1)]/(\partial X_1)$ である。式(6)の右辺各項は一般にはき裂進展速度 $\dot{a} (= da/dt)$ に依存するため、この式は $\dot{a}$ を陽な形で与えるものではないことに注意したい。

2・3 クリープき裂進展速度について 2・2節の議論は、き裂が滑らかに進展する場合を想定しているが、現実のき裂進展は、微小き裂発生、成長、合体などによって引き起こされる時間的に不連続な現象であり、時間依存性破壊であるクリープき裂進展もそのき裂進展速度は、そのような不連続なき裂進展現象を平均化して定まる量である。したがって、クリープき裂進展現象はき裂先端におけるき裂エネルギー密度 $\mathcal{E}$ がその限界き裂エネルギー密度 $\mathcal{E}_c$ に達したときに、例えば破壊様式などにより定まる距離 ρ_s だけき裂が進展するものとしてとらえることができ、このとき、き裂エネルギー密度 $\mathcal{E}$ がクリープ損傷を表す量となる。さてこのようにモデル化するときき裂進展に要する時間は、き裂先端のき裂エネルギー密度 $\mathcal{E}$ が限界き裂エネルギー密度 $\mathcal{E}_c$ に達するまでの上のせに必要とされる時間に等しくなり、このような時間的に不連続なき裂進展モデルを考える場合式(5)に相当するき裂先端におけるき裂エネルギー密度の時間変化率は図2を参照して次のように表すことができることになる。

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ps}}{\partial t} \right) + \frac{\rho_s}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}_{X_1}}{\partial X_1}$$

図1 進展するき裂（切欠き）とき裂エネルギー密度

$$= \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial t} + \tilde{a} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{X_1}}{\partial X_1} \dots\dots\dots (7)$$

ここに $\sim$ を付したものは平均値を表し、 $\Delta \mathcal{E}_{ps}$ はき裂長さが変化することによる弾塑性変化に伴う上のせ量であり、このモデルにおいては時間に依存しない量である。図2はこのようなモデルを考える場合におけるき裂エネルギー密度のき裂先端における時間変化とその X_1 方向分布を定性的に示したものであり、 ρ_s だけき裂が進展した瞬後に破線で示される分布となり、その後時間の経過とともにき裂エネルギー密度の値は増していき、 Δt 後 $\mathcal{E}_c(t + \Delta t, X_1)$ の分布となる。さてこの場合滑らかにき裂が進展する場合のき裂進展速度 $\tilde{a}$ の満足すべき条件、式(6)に対応して、式(7)より $\tilde{a}$ は

$$\tilde{a} = \left(\frac{d\tilde{\mathcal{E}}_c}{dt} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_c}{\partial t} \right) / \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{X_1}}{\partial X_1} \right) \dots\dots\dots (8)$$

で与えられることになり、関係する諸量は前段階までの $\tilde{a}$ には依存するが現段階での $\tilde{a}$ には依存しないことに注意したい。このことは $\tilde{a}$ が式(8)の形で陽な形で与えられることを意味しており、き裂進展速度は $\tilde{\mathcal{E}}_c$ 、 $\partial \tilde{\mathcal{E}}_c / \partial t$ 、 $\partial \tilde{\mathcal{E}}_{X_1} / \partial X_1$ をパラメータとして与えられるということになる。なお特に $(d\tilde{\mathcal{E}}_c)/(dt) = 0$ である場合には

$$\tilde{a} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial t} / \left(- \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{X_1}}{\partial X_1} \right) \dots\dots\dots (9)$$

であり、 $\partial \tilde{\mathcal{E}}_{X_1} / \partial X_1$ は一般には履歴の影響を受けるが、この影響が一様である場合には式(9)右辺分母の項 $\partial \tilde{\mathcal{E}}_{X_1} / \partial X_1$ は一定値とみなせ、き裂進展速度 $\tilde{a}$ は、単一パラメータ $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial t$ により支配されることになる。またクリープ挙動が弾塑性挙動に比べて著しい場合 $(\Delta \mathcal{E}_c / \Delta t) \gg (\Delta \mathcal{E}_{ps} / \Delta t)$ となって $\Delta \mathcal{E}_{ps} / \Delta t$ の項は無視でき、この場合には $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial t$ は静止き裂における $\mathcal{E}$ の時間変化率に対応する量となり、先に静止き裂におけるき裂端の $\mathcal{E}$ の時間変化率 $\dot{\mathcal{E}}_{st}$ について論じ、修正 J 積分 J' との関係性を明らかにしてこの $\dot{\mathcal{E}}_{st}$ のクリープき

図2 クリープき裂進展に伴うき裂エネルギー密度の変化

裂進展速度パラメータとしての可能性を示したか⁽⁵⁾⁽⁶⁾、静止き裂に対する $\dot{\mathcal{E}}_{st}$ は $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial t$ の代用としての意味をもつことがわかる。修正 J 積分 J' はクリープポテンシャル W' が存在するような場合に対して定義され⁽⁹⁾、クリープき裂進展速度パラメータとしての有効性が主張されているが⁽¹⁰⁾、この J' は静止き裂の $\dot{\mathcal{E}}_{st}$ と定数倍の関係にあることが示されているので⁽⁵⁾、 J' が存在する場合にはそれもやはり $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial t$ の代用としての意味をもつものとして位置づけられることがわかる。いずれにせよ、クリープき裂進展速度は式(8)で与えられ、分母の $-(\partial \tilde{\mathcal{E}}_{X_1} / \partial X_1)$ はき裂先端付近の損傷領域が大きい場合小さくなる量であり、損傷領域が広がっているとき、き裂進展速度は大きくなるということが定性的に言えることになる。

2.4 $\mathcal{E}(t, X_1)$, $\partial \mathcal{E} / \partial t$, $\partial \mathcal{E} / \partial X_1$ の経路独立積分による表示 図1(a)において Γ をき裂を囲む任意の経路、 Γ_u , Γ_w , Γ_a , Γ_d を図に示す経路、 $A(X_1)$ を閉経路 $\Gamma + \Gamma_u + \Gamma_w + \Gamma(X_1) + \Gamma_d + \Gamma_a$ によって囲まれる領域の面積とする。このとき領域 $A(X_1)$ に対し

$$\int_{\Gamma + \Gamma_u + \Gamma_w + \Gamma(X_1) + \Gamma_d + \Gamma_a} \left\{ \left(W + T - \int_0^t B_i du_i \right) n_i - \int_0^t T_i du_{i,1} \right\} ds - \int_{A(X_1)} \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} dA = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ただし

$$T = \int_0^t dT, dT = d \left(\frac{1}{2} \gamma \dot{u}_i \dot{u}_i \right)$$

なる関係が成り立ち⁽³⁾、したがって

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J(t, X_1) = & \int_{\Gamma} \left\{ \left(W + T - \int_0^t B_i du_i \right) n_i - \int_0^t T_i du_{i,1} \right\} ds - \int_{\Gamma(X_1)} \left(T - \int_0^t B_i du_i \right) n_i ds \\ & - \int_{\Gamma_u + \Gamma_w + \Gamma(X_1) + \Gamma_d + \Gamma_a} \int_0^t T_i du_{i,1} ds \\ & - \int_{A(X_1)} \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} dA \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

とするときこの積分は経路独立積分となり、式(1)より

$$\mathcal{E}(t, X_1) = \mathcal{E}_J(t, X_1) \dots\dots\dots (12)$$

が成り立つ。ここに T , B_i , u_i , n_i , T_i , γ はそれぞれ単位体積当たりの運動エネルギー、体積力、変位、方向余弦の X_1 方向成分、表面力、密度であり、 $(\)_i = \partial(\) / \partial X_i$, $(\dot{\ }) = \partial(\) / \partial t$ である。これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = & \frac{\partial \mathcal{E}_J}{\partial t} = \int_{\Gamma} \{ (\dot{W} + \dot{T} - B_i \dot{u}_i) n_i - T_i \dot{u}_{i,1} \} ds \\ & - \int_{\Gamma(X_1)} (\dot{T} - B_i \dot{u}_i) n_i ds \\ & - \int_{\Gamma_u + \Gamma_w + \Gamma(X_1) + \Gamma_d + \Gamma_a} T_i \dot{u}_{i,1} ds \end{aligned}$$

$$-\int_{A(X_1)} (\sigma_{ij,1} \dot{u}_i)_{,j} dA \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_1} &= \frac{\partial \mathcal{E}_I}{\partial X_1} = \int_r \left\{ W + T - \int_0^t B_i du_i \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \right\}_{,1} n_1 ds \\ &= \int_{r(X_1)} \left\{ T - \int_0^t B_i du_i - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \right\}_{,1} n_1 ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_u = \Gamma_u - \Gamma(X_1) - \Gamma_d + \Gamma_d} \int_0^t (T_i du_{i,1})_{,1} ds \dots\dots (14) \end{aligned}$$

となり、これらは $\partial \mathcal{E} / \partial t$, $\partial \mathcal{E} / \partial X_1$ の経路独立積分表示を与えたものとなる。ここで式(14)の導出にあたっては領域 $A(X_1)$ を X_1 方向に平行移動した領域を考え、さらにガウスの定理を用いている。なお、滑らかなき裂進展を考えると $\partial \mathcal{E} / \partial t = \partial \mathcal{E}_I / \partial t = \lim_{X_1(t-a) \rightarrow a} \partial \mathcal{E}_I / \partial t$, $\partial \mathcal{E} / \partial X_1 = \partial \mathcal{E}_I / \partial X_1 = \lim_{X_1(t-a) \rightarrow a} \partial \mathcal{E}_I / \partial X_1$ であること、また不連続なき裂進展を考えると、き裂が停止している状態でのき裂端き裂エネルギー密度の時間変化率 $\dot{\mathcal{E}}_{st}$ が $\dot{\mathcal{E}}_{st} = \partial \mathcal{E} / \partial t(t, a) = \partial \mathcal{E}_I / \partial t(t, a)$ で与えられることはいうまでもない。

図3 解析に用いた試験片の形状と積分経路

図4 き裂進展時に作用させる等価節点力の例

3. クリープき裂進展シミュレーション

2章において、時間的に不連続なクリープき裂進展モデルを想定し、クリープき裂進展速度についての考察を行った。本章では、有限要素法により現実にクリープき裂(実際は切欠き)進展のシミュレーションを行い、この結果を通じてき裂エネルギー密度のき裂進展速度に関する諸量、き裂進展パラメータについての考察を行う。

3.1 解析方法と対象 弾性クリープき裂を対象として、そのクリープ構成則が Norton 則に従う場合のクリープき裂進展挙動を、進展条件として限界き裂エネルギー密度 $\mathcal{E}_c = \text{const}$ を仮定して有限要素法によりシミュレーションを行った。き裂エネルギー密度分布 $\mathcal{E}(t, X_1)$ の評価は式(11)の $\mathcal{E}_I(t, X_1)$ 積分を用いて行っている。有限要素法による弾性クリープ解析法としては微小時間中に生じるクリープひずみを初期ひずみと見なすいわゆる初期ひずみ法⁽¹¹⁾を用いており、要素として三角形定ひずみ要素を用い、 $\mathcal{E}_I(t, X_1)$ 積分などに含まれる応力、ひずみの X_1 方向微分さらには時間微分項、時間積分項の評価法は、文献(5)で用いている手法と同じである。解析対象は、中央き裂材であり試験片の形状および寸法を図3(a)に、切欠きを囲む任意の経路(Path 1~5)を図3(b)に、き裂エネルギー密度分布解析に用いた経路を図3(c)に示す。解析は、き裂エネルギー密度評価に現実的に有効な切欠き曲率半径 $\rho/W = 0.125$ を有する切欠き材⁽⁶⁾に対して行っており、総要素数 745、総節点数 419、試験片上下面に一様引張応力 $\sigma_0 = 58.8 \text{ MPa} \{6 \text{ kgf/mm}^2\}$ が一定に負荷される場合の平面応力状態のき裂進展をシミュレートしている。試験片材料としては、SUS304 鋼を想定し、ヤング率 $E = 137.2 \text{ GPa} \{1400 \text{ kgf/mm}^2\}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、Norton 則 $\dot{\epsilon}^{cr} = D\sigma^n$ ($\dot{\epsilon}^{cr}$: 相当ク

$$\mathcal{E}_c = 0.8 \text{ KJ/m}, T = 0.1885 \times 10^4 \text{ h}$$

	F_{x1} (N)	F_{x2} (N)
1	-0.143×10^{-2}	0.218×10^{-2}
2	-0.468×10^{-2}	0.478×10^{-2}
3	-0.494×10^{-2}	0.967×10^{-2}
4	-0.47×10^{-3}	0.922×10^{-2}
5	0.16×10^{-2}	0.608×10^{-2}
6	0.191×10^{-2}	0.288×10^{-2}
7	0.176×10^{-2}	0.145×10^{-2}
8	0.180×10^{-2}	0.109×10^{-2}
9	0.185×10^{-2}	0.527×10^{-3}
10	0.942×10^{-2}	0.115×10^{-3}

(unit thickness is considered)

リープひずみ速度, σ : 相当応力)における定数としては $D = 1.55 \times 10^{-20} (\text{MPa})^{-n}$, $n = 7.66$ を用いている⁽¹⁰⁾. き裂の進展は切欠き先端におけるき裂エネルギー密度 $\mathcal{E}$ がその限界値 $\mathcal{E}_c$ に達したとき, 進展後新たに切欠き表面となる節点に進展直前に生じていた表面力 T_i を等価点力として逆方向に振り分け加えることにより行っている. 図4にはこの時加える等価節点力 F_{x1} , F_{x2} の一例が示してある. なお, き裂進展とともに新たに切欠き先端およびその付近となる領域の要素分割は同一にしている.

3.2 解析結果とその考察 解析においては4種の限界き裂エネルギー密度 $\mathcal{E}_c = 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 \text{ kJ/m}^2$ を設定してシミュレーションを行ったが, 結果としては特に $\mathcal{E}_c = 0.6, 0.8 \text{ kJ/m}^2$ に対応するものを挙げ考察することにする. まず, 図5(a), (b)に $\mathcal{E}_c = 0.6, 0.8 \text{ kJ/m}^2$ のそれぞれについて各き裂進展段階のき裂先端からの X_1 方向におけるき裂面上相当応力 σ の分布の様子を示す. 1段階のき裂(切欠き)進展量は Δa

$= 0.25 \text{ mm}$ である. 図5より, $t = 0^+$ (初期弾性変形直後の時間を $t = 0^+$ として, 実時間の $t = 0$ と区別する)におけるき裂前方応力分布は, $\mathcal{E}_c = 0.6, 0.8 \text{ kJ/m}^2$ とともに同一であるが, $\mathcal{E}_c$ の違いにより初期き裂開始時間つまりはクリープ変形量に差が生じ, その後の各き裂進展直前直後におけるき裂前方応力分布が, $\mathcal{E}_c$ が小さいほど大きな値を示している点に注意される. 図5には示していないが $\mathcal{E}_c = 0.5 \text{ kJ/m}^2$ の場合は, この傾向がさらに強く, 進展直後の応力分布は, $t = 0^+$ におけるそれとほとんど変わらなく, クリープ変形よりはむしろ弾性変形支配形のき裂進展と言える. 図5に見られるように $\mathcal{E}_c = 0.6 \text{ kJ/m}^2$ の場合には, き裂長さ 5 mm 以後不安定破壊(進展直後の $\mathcal{E}$ が $\mathcal{E}_c$ を上まわるためにその後のクリープ変形を伴うことなく瞬時に破壊する)を生じている点に注意したい(図示していないが, $\mathcal{E}_c = 0.5 \text{ kJ/m}^2$ の場合は, き裂長さ 4.5 mm 以後不安定破壊を生じた). また, 図6は各き裂長さにおいてき裂進展直前までに蓄積されたき裂先端からの X_1 方向

図5 き裂進展に伴うき裂端前方の相当応力分布

図6 き裂進展に伴うき裂端前方の相当クリープひずみ分布

き裂面上相当クリープひずみ $\bar{\varepsilon}^{cr}$ の分布を示したものであるが、 $\varepsilon_c = 0.8 \text{ kJ/m}^2$ の場合における $\bar{\varepsilon}^{cr}$ の各き裂長さにおける蓄積量は $\varepsilon_c = 0.6 \text{ kJ/m}^2$ に比較して、特にき裂長さが長くなるにつれ大きな違いを示しており、 ε_c の値が大きいほどクリープ変形を顕著に受ける様子がわかる。次に図 7(a), (b) は、図 2 に対応する計算結果図であり、それぞれ $\varepsilon_c = 0.6, 0.8 \text{ kJ/m}^2$ の場合についてき裂進展に伴うき裂エネルギー密度分布の変化を示したものであり、またこれに対応してクリープき裂進展速度に係る各パラメータの具体的な数値を表 1(a), (b) に、同様に各 ε_c に対して示す。時間の経過に伴うクリープ変形、き裂進展とともに、き裂エネルギー密度とその分布が、図 2 で予想された変化をしていくことが分かる。まず、各き裂長さにおいてき裂進展直後のき裂先端におけるき裂エネルギー密度の上乗せ量 $\Delta\varepsilon_{ps}$ であるが、図 5(a), (b)、図 6 より予想されたとおりクリープ変形量の違いによりこの値に大きな差が認められる。つまり、表 1(a), (b) に示した数値を比較すると、 $\varepsilon_c = 0.6 \text{ kJ/m}^2$ におけるき裂先端の $\Delta\varepsilon_{ps}$ は $\varepsilon_c = 0.8 \text{ kJ/m}^2$ におけるそれに対して約 2 倍程度の値を示しており $\varepsilon_c = 0.5, 1.0 \text{ kJ/m}^2$ の場合においても共通に ε_c が小さいほどこの値が大きくなる、 $\Delta\varepsilon_{ps}$

+ $\Delta\varepsilon_{ps}$ にしめる割合が大きくなっており、また前述したが $\varepsilon_c = 0.5, 0.6 \text{ kJ/m}^2$ においては弾性不安定破壊を生じていることから、 ε_c が小さいほど、クリープ変形支配形き裂進展から弾性変形支配形のそれへ移行する傾向が見うけられる。つぎに、初期のき裂進展速度 $\bar{a}$ であるが、 $\varepsilon_c = 0.6 \text{ kJ/m}^2$ に対して $\varepsilon_c = 0.8 \text{ kJ/m}^2$ の場合は、同じ ε_c において他のき裂段階における $\bar{a}$ に比較して大きな値 (13.23×10^{-5}) を示しているが、これは $t = 0^+$ における応力分布に比して図 5(b) に示したように進展直後の応力分布が小さくなるのが原因で初期における $\partial\bar{\varepsilon}/\partial t$ が 0.518 と他のき裂進展段階に比較して大きくなっていることに起因するものと考えられる。したがって ε_c が大きいほど、初期の $\bar{a}$ は、その後の各き裂進展段階に比して大きくなるものと考えられる。さらにこれらのことから、き裂進展速度パラメータとしての $\partial\bar{\varepsilon}/\partial t$ は各 ε_c に対して、 ε_c が大きいほど相対的に小さくなりこれより $\bar{a}$ も小さくなるもの、つまりは構成則がほぼ同じの場合、低延性材料ほど $\bar{a}$ は、高延性材に比較して相対的に大きいものと考えられる。上記の議論は常に $\varepsilon_c = \text{const}$ の仮定を行ったうえでの議論であり、計算結果からこれらの傾向が確認される。ところでもう一方のき裂進展速度パラメータ $\partial\bar{\varepsilon}_{x_I}/\partial X_I$ であるが、図 7(a), (b) を見ても確認されるが表 1(a), (b) に示すとおり、クリープ変形の顕著な $\varepsilon_c = 0.8 \text{ kJ/m}^2$ の場合はき裂進展とともにこの絶対値が小さくなっており、 $\varepsilon_c = 1.0 \text{ kJ/m}^2$ の場合も同様の傾向にある。これに対して、弾性変形支配形き裂進展と考えられる $\varepsilon_c = 0.5, 0.6 \text{ kJ/m}^2$ の場合にはこの値はほぼ一定値を示している ($\varepsilon_c = 0.6 \text{ kJ/m}^2$ における値のみここでは示している)。したがって、理論上で予想されたとおりクリープ変形が進行し、履歴の影響を受けるに従いき裂前方 X_I 方向のき裂エネ

図 7 き裂進展に伴うき裂エネルギー密度分布の変化

表 1 き裂進展各段階における各量の値

 (a) $\varepsilon_c = 0.6 \text{ (kJ/m}^2\text{)}$

α (mm)	$\Delta\varepsilon$ (h)	$\bar{a}$ (m/h)	$\Delta\varepsilon_c + \Delta\varepsilon_{ps}$ (kJ/m²)	$\Delta\varepsilon_{ps}$ (kJ/m²)	$\partial\bar{\varepsilon}/\partial t$ (kJ/m²h)	$\partial\bar{\varepsilon}_{x_I}/\partial X_I$ (kJ/m³)
4.0	0.636×10^{-1}	3.93×10^{-3}	0.219	0	3.44	
4.25	0.101	2.47×10^{-3}	0.433	0.245	4.27	-1.73×10^3
4.5	0.0957	2.61×10^{-3}	0.435	„	4.55	-1.74×10^3
4.75	3.3×10^{-3}	7.58×10^{-2}	0.442	0.27	134	-1.76×10^3
5.0	0	∞				

 (b) $\varepsilon_c = 0.8 \text{ (kJ/m}^2\text{)}$

α (mm)	$\Delta\varepsilon$ (h)	$\bar{a}$ (m/h)	$\Delta\varepsilon_c + \Delta\varepsilon_{ps}$ (kJ/m²)	$\Delta\varepsilon_{ps}$ (kJ/m²)	$\partial\bar{\varepsilon}/\partial t$ (kJ/m²h)	$\partial\bar{\varepsilon}_{x_I}/\partial X_I$ (kJ/m³)
4.0	1.89	13.23×10^{-5}	0.44	0	0.518	
4.25	9.78	2.56×10^{-5}	0.52	0.12	0.053	-2.08×10^3
4.5	8.56	2.92×10^{-5}	0.45	0.112	„	-1.8×10^3
4.75	3.11	8.04×10^{-5}	0.425	0.115	0.137	-1.7×10^3
5.0	2.68	9.33×10^{-5}	0.35	0.125	0.131	-1.4×10^3

ルギ密度分布値が蓄積されその結果 $|\partial \tilde{\epsilon}_{x1}/\partial X|$ が小さくなるものと考えられる。き裂エネルギー密度およびその分布量が損傷量に対応する量であることから、このことによりクリープ変形はき裂前方に損傷領域を広くもつ変形形態と言える。以上、クリープき裂進展速度 $\tilde{a}$ は $\epsilon_c = \text{const}$ の場合には式(9)のように表示されるが、上記の考察から判断されるように、今回の結果から値としてオーダの変化は見られないまでも、クリープ変形量が顕著な延性材で履歴の影響が無視できない場合には分母項は一定とは見なされず、現実にはこれに塑性変形も加わることも考えると、そのような取扱いには少々難があるものと思われる。

次に図8は、 $\epsilon_c = 0.8 \text{ kJ/m}^2$ の場合のき裂が停止している状態における式(13)を用いて評価したき裂先端き裂エネルギー密度の時間変化率 $\dot{\epsilon}_{st}$ の経過時間に対する変化の様子を示したものであり、また、修正 J' の値は一般に径路独立性が成立しないため、特に Path 1 および 5 について示してある(積分径路をき裂端に近づけていくときの極限として評価される J' 値は構成則が Norton 則に従うとき $\dot{\epsilon}_{st}$ との間に $J' = \{n/(n+1)\} \dot{\epsilon}_{st}$ なる関係があることが知られている⁽⁵⁾)。図8上の破線は、初期き裂長さのまま進展をしないき裂における $\dot{\epsilon}_{st}$ の計算結果をあわせて示したもの

である。図8においては、 $\dot{\epsilon}_{st}$ の値の変化に不連続な点が生じているが、これは、き裂進展のため新たなき裂先端およびその付近に弾性応力が生じ、 $\dot{\epsilon}_{st}$ 値が増大することによる。各き裂長さにおける $\dot{\epsilon}_{st}$ 値の変化の様子を見ると、初期き裂長さの進展を考えないき裂の場合に比較して遷移クリープ時間領域が短くなり、進展直後の大きな値から急激にその定常値へと向かう傾向およびその定常値が、き裂進展つまりはリガメント部減少とともに大きくなる傾向にある。これらのことは、リガメント部の減少に応じて、定常クリープ後の相当応力分布(この場合はき裂先端の相当応力値)が大きくなること、そしてこのこととあいまって少なくとも Norton 則下のもとでの停留き裂における定常クリープ後の $\dot{\epsilon}_{st}$ 値が、リガメント部が減少することにより、増大するものと考えられることと一致する。また図8から判断されるように、き裂進展とともに進展までの時間間隔が短くなっており、 $a = a + 4\Delta a$ 以後、 $\epsilon_c = 0.8 \text{ kJ/m}^2$ の場合においても不安定破壊が間近にせまっているものと予想される。 $\dot{\epsilon}_{st}$ 線上の矢印は、各 ϵ_c における初期き裂発生点であり当然のことながら ϵ_c が大きな高破壊じん性の材料ほどき裂発生点が定常クリープ域に近づいて行くことを意味する。 $\epsilon_c = 0.5 \text{ kJ/m}^2$ の場合は、初期き裂発生点が、 $t = 0.47 \times 10^{-2} \text{ h}$

図8 き裂進展に伴う $\dot{\epsilon}_{st}$ の時間に対する変化

図9 き裂が進展する場合のき裂端き裂エネルギー密度の時間に対する変化

であり、図8中の時間レンジには入らない。さて次に、図9は、 $\varepsilon_c = 0.8 \text{ kJ/m}^2$ における各き裂長さの時間経過に対するき裂端のき裂エネルギー密度 ε の変化を示したもので、図9中には、初期き裂長さにおける停留き裂の ε の変化も併せて示してあり、初期き裂進展が、図8にも見られるように遷移クリープ中の進展であり、その後のき裂進展は、時間経過に対して ε の傾斜がほぼ一定近くになっており、定常クリープでの進展に近づいているものと考えられる。以上、弾性クリープき裂進展シミュレーションの結果を通じて考察を行ってきたが、現実の延性を伴う材料は、必ずき裂先端付近に塑性域が発生し、その結果、き裂先端付近の応力値が押さえられ、 ε の時間変化に対する上のせ量つまりは、 ε_{st} 値は、弾性クリープに比較すれば相対的に低下する⁽¹²⁾はずであり、また、き裂端前方 X_1 方向

相当応力分布の増大により、き裂端前方の損傷量および履歴の影響が、さらに顕著なものとなることが考えられる。したがってクリープおよび塑性変形重畳下のき裂進展速度の単一パラメータ表示は、弾性クリープの場合に比べて、その非線形性の強さより崩れる可能性が大きいものと思われる。

4. 結 言

き裂エネルギー密度の立場からき裂進展速度の満たすべき一般的条件を導くとともに、特にクリープき裂進展速度に対する支配パラメータの考察を行った。また、有限要素法解析を用いて、弾性クリープき裂進展をシミュレートし、クリープき裂進展速度パラメータに関する理論的関係の検証を行うとともに種々の基本的知見を得た。

文 献

- (1) 渡辺, 機論, 47-416, A (昭55), 406.
- (2) 渡辺, 機論, 48-433, A (昭57), 1226.
- (3) 渡辺, 機論, 50-453, A (昭59), 894.
- (4) 渡辺・倉繁, 機論, 50-460, A (昭59), 1983.
- (5) 渡辺・倉繁, 機論, 50-454, A (昭59), 1291.
- (6) 渡辺・番, 機論論, No. 840-1 (昭59-4), 190.
- (7) 渡辺・群上, 機論論, No. 844-1 (昭59-3), 33.
- (8) 渡辺, 機論, 51-463, A (昭60).
- (9) 大路・小倉・久保, 機論, 42-354 (昭51), 350.
- (10) 大路・小倉・久保, 材料, 29-320 (昭55), 465.
- (11) 例えば, Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, (3rd. ed.), (1977), 471.
- (12) 渡辺・番, 機論論, No. 844-1 (昭59-3), 126.

討 論

〔質問〕 矢 富 盟 祥〔京都大学工学部〕

「式(14)の導出にあたっては、領域 $A(X_1)$ を X_1 方向に平行移動した領域を考え…」とあるが、 $\varepsilon(t, X_1)$ の X_1 に関する偏微分を考える時、変化さすのは領域 $A(X_1)$ 全体の移動でなく単に $\Gamma(X_1)$ の移動ではないか。したがって、例えば、

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \int_{\Gamma} (W + T) n_1 ds = 0$$

等となり式(14)の導出がうまくゆかないのであるが式(14)の詳しい証明をご教示願いたい。

〔回答〕 き裂エネルギー密度の X_1 方向分布を与える式(11)の $\varepsilon_f(t, X_1)$ 積分における径路 Γ は任意に選ぶことができるものである。よって $\varepsilon_f(t, X_1)$ の X_1 に関する偏微分は領域 $A(X_1)$ 全体の移動を考えても、単に $\Gamma(X_1)$ のみの移動を考えても得られることにな

る。

(a) 領域 $A(X_1)$ の X_1 方向の平行移動を考えるとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_f(t, X_1)}{\partial X_1} = & \int_{\Gamma} \left\{ \left(W + T - \int_0^t B_i du_i \right)_{,1} \right. \\ & - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \Big\} n_1 ds \\ & - \int_{\Gamma(X_1)} \left\{ \left(T - \int_0^t B_i du_i \right)_{,1} \right. \\ & - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \Big\} n_1 ds \\ & - \int_{\Gamma + \Gamma_0 + \Gamma_0' - \Gamma(X_1) + \Gamma_1 + \Gamma_1'} \int_0^t (T_i du_{i,1})_{,1} ds \\ & \dots\dots\dots(i) \end{aligned}$$

上式の導出においては、面積分の項をガウスの定理により線積分に変換している。本文式(14)は上式の誤

記である。

(b) $\Gamma(X_1)$ の移動のみを考えると

このときには、ご指摘のとおり Γ 上の積分項の X_1 方向微分等が零となり次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_f(t, X_1)}{\partial X_1} &= - \int_{\Gamma(X_1)} \left\{ \left(T - \int_0^t B_i du_i \right)_{,1} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \right\} n_1 ds \\ &\quad + \int_{\Gamma(X_1)} \int_0^t (T_i du_{i,1})_{,1} ds \quad \cdots \cdots \cdots (ii) \end{aligned}$$

ここで式(i)と(ii)は同じものを評価しているわけであるから両者を等置すると次の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left\{ \left(W + T - \int_0^t B_i du_i \right)_{,1} \right. \\ \left. - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \right\} n_1 ds - \int_{\Gamma' + \Gamma_u + \Gamma'_u + \Gamma_d + \Gamma'_d} \\ \times \int_0^t (T_i du_{i,1})_{,1} ds = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (iii) \end{aligned}$$

上式において、経路 Γ を縮めてゆき $\Gamma(X_1) - \Gamma'_u - \Gamma'_d$

の積分とすると

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(X_1)} \left\{ \left(W + T - \int_0^t B_i du_i \right)_{,1} \right. \\ \left. - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \right\} n_1 ds \\ - \int_{\Gamma(X_1) - \Gamma'_u - \Gamma'_d} \int_0^t (T_i du_{i,1})_{,1} ds = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (iv) \end{aligned}$$

が成立し、これより $\{\partial \varepsilon_f(t, X_1)\} / \partial X_1$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_f(t, X_1)}{\partial X_1} &= \int_{\Gamma(X_1)} W_{,1} n_1 ds \\ &= - \int_{\Gamma(X_1)} \left\{ \left(T - \int_0^t B_i du_i \right)_{,1} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (\sigma_{ij,1} du_i)_{,j} \right\} n_1 ds \\ &\quad + \int_{\Gamma(X_1)} \int_0^t (T_i du_{i,1})_{,1} ds \\ &\quad (\because \Gamma_u, \Gamma_d \text{ 上で } T_i = 0, T_{i,1} = 0) \end{aligned}$$

となり式(ii)と一致する。本論文においては経路独立な表示ということで式(i)を示したわけであるが、式(iii)の関係が恒等的に成り立つので経路独立性ということにはあまり意味がなかったようである。