半無限弾性体に被覆した弾性表面膜の接触応力*

志摩政幸**, 佐藤準一**, 古口日出男***

Contact Stresses of an Elastic Surface Layer Bonded to
a Half-Space Elastic Body

by Masayuki SHIMA, Jun'iti SATO, and Hideo KOGUCHI

This paper is concerned with the plane-strain problem of an elastic surface layer bonded to a half-space elastic body on which an elastic cylinder is pressed by a normal load or inclined load. Contact stresses of the layer are calculated as a function of the elastic properties of the layer material and the layer thickness. Especially, contact stresses at the layer-body interface are investigated in detail for the possible practical applications. The results show that maximum shear stress at the interface which can lead to coating debonding is markedly affected by the Young's modulus and the layer thickness and that normal stress parallel to the interface can be in tension under a normal load only if the Young's modulus of the layer is greater than that of the body.

Key Words: Contact Stresses, Surface Layer, Elastic Body, Material Properties, Layer Thickness

1. 緒 言

表面処理技術の進歩と相まって、摺動部のトライボロジ特性を改善するため、表面に被膜を施すことが多い。このような被膜が所期の目的を果たすためには、被膜作製時の残留応力および接触応力に耐え得る被膜自体の強度と下地との接着力を必要とする。

後者の検討には、まず被膜の接触応力状態の把握が重要であるが、被膜と下地の材質が異なれば、接触圧力の算出にしばしば利用される Hertz の式は適用できない。過去、下地と異なる材質をもつ被膜の接触応力解析はいくつか報告されているが、そのほとんどは下地を剛体と仮定し、また球と平面の接触を扱っている⁽¹⁾⁻⁽³⁾。このほかに円筒と平面の接触に対する解もある⁽⁴⁾が、いずれも垂直力のみが作用するいわゆる押込み問題であり、実用上重要な摩擦を伴う接触を扱った報告はほとんどないようである。

筆者らは、半無限弾性体に施された弾性被膜になめ

らかな曲率を有する二次元弾性体が押し付けられ、さらに摩擦力が付加されるモデルを扱う。以下に、まずこのモデルの解析方法を述べ、次に被膜を有する半無限体と円柱の接触を取り上げ、被膜の接触応力、主に被膜と下地の接合面における応力を、被膜材質、厚さを種々変えて解析した結果について述べる。

2. 解 析

2.1 解析方法の概要 次の方法⁽⁵⁾により、接触問題の定式化を行う。今、二つの物体が線荷重 P (単位厚さ当り) を受けてある領域にわたって接触するものとする、接触面内では次式が成立する。

$$\alpha - (w_{1,i} + w_{2,i}) = z_{1,i} + z_{2,i} \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここに、 α は 2 物体の相対接近量、 $z_{1,i} + z_{2,i}$ は $x = x_i$ における初期すきまでである。また $w_{1,i}$, $w_{2,i}$ はそれぞれ次式で与えられる物体 1 と 2 の表面変位である。

$$w_{1,i} = \sum_{j=1}^r p_j D_{ij}^1 \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$w_{2,i} = \sum_{j=1}^r p_j D_{ij}^2 \cdots \cdots \cdots (3)$$

ここに、 r は予想される接触域よりも大きな領域を微小領域に分割した時の分割個数、 p_j は微小領域 j に一様に分布する接触圧力、 D_{ij}^1 , D_{ij}^2 は物体 1, 2 の表

* 昭和 59 年 3 月 16 日 東海支部第 33 期総会講演会および昭和 59 年 9 月 7 日 北陸信越支部信越地方(長岡)講演会において講演、原稿受付 昭和 59 年 10 月 11 日。

** 正員、東京商船大学商船学部 (〒135 東京都江東区越中島 2-1-6)。

*** 正員、長岡技術科学大学工学部 (〒949-54 長岡市上富岡町字長 1603-1)。

面変位の影響係数である。式(1)を力のつりあい式(4)および $p_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, r)$ の両式を考慮して解けば α, p_i が定まる。

$$\sum_{j=1}^r 2a_j p_j = P \quad \dots\dots\dots (4)$$

$2a_j$: 微小領域 j の分割幅

次に接線力 T (単位長さ当たり) が付加された場合を (i) 静摩擦係数 μ は接触面全域で一定とする, (ii) P による圧力分布の T の付加による変化は無視する, として定式化する⁽⁶⁾。図1に示すように, 接触面内の点 i の横方向変位を物体1側に含まれる点と2側のそれについて考える。前者には, 物体1の剛体変位 β_1 から弾性変形による変位 $u_{1,i}$ を引いた変位 $\beta_1 - u_{1,i}$ が, また後者には $\beta_2 - u_{2,i}$ なる変位が生じる。これらの和 δ が零となる接触域は固着し, 次式が成立する。

$$\beta - (u_{1,i} + u_{2,i}) = 0, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

一方, $\delta \neq 0$ なる接触域ではすべりを生じる。接触域を構成する r' 個の微小領域の各領域内では, 接線応力を一定とすると

$$u_{1,i} = \sum_{j=1}^{r'} \tau_j S_{1j}^i \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$u_{2,i} = \sum_{j=1}^{r'} \tau_j S_{2j}^i \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに, τ_j は領域 j の接線応力, S_{1j}^i と S_{2j}^i は横方向表面変位の影響係数である。式(5)を力のつりあい式

$$\sum_{j=1}^{r'} 2a_j \tau_j = T \quad \dots\dots\dots (8)$$

および $\tau_i \leq \mu p_i (i=1, 2, \dots, r')$ を考慮して解けば β, τ_i が定まる。なお, すべりを生じる領域では $\tau_i = \mu p_i$ とする。

2.2 被膜の表面変位および応力の影響係数

ここでは, 被膜を有する半無限板の境界に図2に示すような一様分布荷重 p_s または q_s が作用する時の表面変位と応力の影響係数を定める。これらの解析には直角座標 (x, y) 表示による Airy の応力関数 ϕ を用いる。今, 応力場を支配する重調和方程式に, x に関するフーリエ変換を行えば

$$\begin{aligned} \phi(\xi, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi e^{-j\xi x} dx \\ &= (A + By)^{-1} e^{\xi y} + (C + Dy)^{-1} e^{-\xi y} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

また, 応力成分に同様の変換を行えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x e^{-j\xi x} dx = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y e^{-j\xi x} dx = -\xi^2 \phi \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} e^{-j\xi x} dx = -j\xi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (12)$$

平面ひずみを考えると, x と y 方向の変位 u と v は,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \nu \xi^2 \phi \right] e^{j\xi x} \frac{d\xi}{\xi} \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1-\nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right. \\ &\quad \left. + (\nu-2) \xi^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] e^{j\xi x} \frac{d\xi}{\xi^2} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

まず, 被膜表面に p_s が作用する場合を考える。この場合には p_s , 被膜と下地の接着面に働く垂直応力 p_i および接線応力 q_i は次のように置くことができる。

$$p_s(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(n\omega x) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$q_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$p_i(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega x) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに, $\omega = 2\pi/L$, L は周期である。以下 Σ は $n=1, 2, \dots, \infty$ とする。被膜の境界条件は,

$$\begin{aligned} y &= -t \text{ で,} \\ \sigma_y &= -p_s(x) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} y &= +t \text{ で,} \\ \sigma_y &= -p_i(x) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = -q_i(x) \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(9)の四つの未定係数は, これらの境界条件をフーリエ変換した式に, 式(11), (12)および式(15)~(17)に同様の変換を施した式を代入すれば定まる。接着面における被膜の変位 $u_{y=+t}, v_{y=+t}$ は, 式(9)を式

図1 横方向の接触変形

図2 被膜に作用する力と座標系

(13), (14)に代入することにより得られる。ただし、式(15), (17)の第1項による変位はこの方法では定まらないため、 $y = \pm t$ で $\sigma_y = -a'_0/2$, $\tau_{xy} = 0$ を満足する応力関数 $\phi = -(a'_0/4)x^2 + (\sigma_0/2)y^2$, σ_0 : 定数, および $x=0$ で $u=0$ なる条件より求めた。

下地の接着面における変位 $u_{y_1=0}$, $v_{y_1=0}$ は

$y_1=0$ で,

$$\sigma_{y_1} = -p_i(x) \dots\dots\dots (22)$$

$$\tau_{xy_1} = -q_i(x) \dots\dots\dots (23)$$

および $y_1 \rightarrow \infty$ で応力は有限となる条件を用いることにより同様にして得られる。

接着面における変位の連続条件

$$u_{y=\pm t} = u_{y_1=0} \dots\dots\dots (24)$$

$$v_{y=\pm t} = v_{y_1=0} \dots\dots\dots (25)$$

より式(16), (17)の未定係数 b_n, c_n が得られる。

$$b_n = \frac{A_n G_n - D_n F_n}{A_n^2 - B_n D_n} \cdot a', (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (26)$$

$$c_n = \frac{A_n F_n - B_n G_n}{A_n^2 - B_n D_n} \cdot a', (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \left[\frac{K_f^P \{-a_n^2 - (1-2\nu_P)sh^2(a_n)\}}{\Delta_n} + K_f^I \right], \quad B_n = \left[\frac{2K_f^P \{a_n - sh(a_n)ch(a_n)\}}{\Delta_n} - 2K_f^I \right] \\ D_n &= \left[\frac{-2K_f^P \{a_n + ch(a_n)sh(a_n)\}}{\Delta_n} - 2K_f^I \right], \quad F_n = \left[\frac{-2K_f^P a_n sh(a_n)}{\Delta_n} \right] \\ G_n &= \left[\frac{-2K_f^P \{sh(a_n) + a_n ch(a_n)\}}{\Delta_n} \right], \quad \sigma_0 = \left(\frac{\nu_P}{1-\nu_P} + \frac{K_f^I}{K_f^P} \right) \left(-\frac{a'_0}{2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

ここに, $ch(a_n) = \cosh(a_n)$, $sh(a_n) = \sinh(a_n)$, $a_n = 2n\omega t$, $\Delta_n = sh^2(a_n) - a_n^2$, $K_f^P = (1-\nu_P^2)/E_P$, $K_f^I = (1+\nu_P)/E_P$, $K_f^I = (1-\nu_f^2)/E_f$, $K_f^I = (1+\nu_f)(1-2\nu_f)/E_f$, E_P, ν_P : 被膜のヤング率とポアソン比, E_f, ν_f : 下地のヤング率とポアソン比。

被膜の表面変位 $u_{y=-t}$, $v_{y=-t}$ は

$$\begin{aligned} u_{y=-t} &= -\frac{a'_0}{2} K_f^I x + K_f^P \sum \left[\frac{-a_n^2 - (1-2\nu_P)sh^2(a_n)}{\Delta_n} \right] \frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \cdot a'_n \\ &+ K_f^P \sum \left[\frac{2\{a_n ch(a_n) - sh(a_n)\}}{\Delta_n} \right] \frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \cdot b_n + K_f^P \sum \left[\frac{2a_n sh(a_n)}{\Delta_n} \right] \frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \cdot c_n \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{y=-t} &= K_f^P \sum \left[\frac{2\{a_n + sh(a_n)ch(a_n)\}}{\Delta_n} \right] \frac{\cos(n\omega x)}{n\omega} \cdot a'_n \\ &+ K_f^P \sum \left[\frac{-2a_n sh(a_n)}{\Delta_n} \right] \frac{\cos(n\omega x)}{n\omega} \cdot b_n + K_f^P \sum \left[\frac{-2\{a_n ch(a_n) + sh(a_n)\}}{\Delta_n} \right] \frac{\cos(n\omega x)}{n\omega} \cdot c_n \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

被膜の応力は式(10)~(12)の逆フーリエ変換より,

$$\sigma_x = \sigma_0 + \sum \left[\left(\frac{-H_n^1}{Q_n} + \frac{H_n^2}{Q_n} \right) a'_n + \left(\frac{H_n^1}{Q_n} + \frac{H_n^2}{Q_n} \right) c_n + \left(\frac{H_n^3}{Q_n} + \frac{H_n^4}{Q_n} \right) b_n \right] \cos(n\omega x) \dots\dots\dots (31)$$

$$\sigma_y = -\left(\frac{a'_0}{2} \right) + \sum \left[\left(\frac{H_n^5}{Q_n} - \frac{H_n^6}{Q_n} \right) a'_n - \left(\frac{H_n^5}{Q_n} + \frac{H_n^6}{Q_n} \right) c_n + \left(\frac{H_n^7}{Q_n} + \frac{H_n^8}{Q_n} \right) b_n \right] \cos(n\omega x) \dots\dots\dots (32)$$

$$\tau_{xy} = \sum \left[\left(\frac{H_n^3}{Q_n} - \frac{H_n^7}{Q_n} \right) a'_n - \left(\frac{H_n^3}{Q_n} + \frac{H_n^7}{Q_n} \right) c_n + \left(\frac{H_n^4}{Q_n} + \frac{H_n^8}{Q_n} \right) b_n \right] \sin(n\omega x) \dots\dots\dots (33)$$

ここに,

$$Q_n = sh(2n\omega t) + 2n\omega t, \quad \bar{Q}_n = sh(2n\omega t) - 2n\omega t$$

$$H_n^1 = \{\beta_n sh(\beta_n) - ch(\beta_n)\} sh(\lambda_n)$$

$$- \lambda_n ch(\beta_n) ch(\lambda_n)$$

$$H_n^2 = \{\beta_n ch(\beta_n) - sh(\beta_n)\} ch(\lambda_n)$$

$$- \lambda_n sh(\beta_n) sh(\lambda_n)$$

$$H_n^3 = \{\beta_n ch(\beta_n) - 2 sh(\beta_n)\} sh(\lambda_n)$$

$$- \lambda_n sh(\beta_n) ch(\lambda_n)$$

$$H_n^4 = \{\beta_n sh(\beta_n) - 2 ch(\beta_n)\} ch(\lambda_n)$$

$$- \lambda_n ch(\beta_n) sh(\lambda_n)$$

$$H_n^5 = \{\beta_n sh(\beta_n) + ch(\beta_n)\} sh(\lambda_n)$$

$$- \lambda_n ch(\beta_n) ch(\lambda_n)$$

$$\begin{aligned}
H_n^3 &= \{\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n) + \operatorname{sh}(\beta_n)\} \operatorname{ch}(\lambda_n) \\
&\quad - \lambda_n \operatorname{sh}(\beta_n) \operatorname{sh}(\lambda_n) \\
H_n^4 &= -\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n) \operatorname{sh}(\lambda_n) + \lambda_n \operatorname{sh}(\beta_n) \operatorname{ch}(\lambda_n) \\
H_n^5 &= -\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n) \operatorname{ch}(\lambda_n) + \lambda_n \operatorname{ch}(\beta_n) \operatorname{sh}(\lambda_n), \\
\beta_n &= n\omega t, \lambda_n = n\omega y
\end{aligned}$$

次に、被膜表面に一様分布荷重 q_s が作用するときの表面変位と応力を求める。この場合には、 q_s と接着面に働く接線応力 q'_i および垂直応力 p'_i は次式のように置くことができる。

$$q_s(x) = p_s(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum a'_n \cos(n\omega x) \quad (34)$$

$$q'_i(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum b'_n \cos(n\omega x) \quad (35)$$

$$p'_i(x) = \sum c'_n \sin(n\omega x) \quad (36)$$

被膜の境界条件、

$$y = -t \text{ で、}$$

$$\sigma'_y = 0 \quad (37)$$

$$\tau'_{xy} = -q_s(x) \quad (38)$$

$$y = +t \text{ で、}$$

$$\sigma'_y = -p'_i(x) \quad (39)$$

$$\tau'_{xy} = -q'_i(x) \quad (40)$$

を用いて、前述と同様の方法により接着面における被

膜の変位 $u'_{y=+t}, v'_{y=-t}$ を求める。ただし、式(34)、(35)の第1項による変位は、フーリエ変換による方法では定まらないため、 $y = \pm t$ で $\tau'_{xy} = -a'_0/2, \sigma'_y = 0$ を満足する応力関数 $\psi' = (a'_0/2)xy$ と、 $x=0$ で $v'=0$ なる条件より直接求めた。

下地の接着面における変位 $u'_{y_1=0}, v'_{y_1=0}$ は、

$$y_1 = 0 \text{ で、}$$

$$\sigma'_{y_1} = -p'_i(x) \quad (41)$$

$$\tau'_{xy_1} = -q'_i(x) \quad (42)$$

および $y_1 \rightarrow \infty$ で応力は有限なる条件から得られる。

接着面における変位の連続条件、

$$u'_{y=+t} = u'_{y_1=0} \quad (43)$$

$$v'_{y=+t} = v'_{y_1=0} \quad (44)$$

より式(35)、(36)の未定係数 b'_n, c'_n が定まる。

$$b'_n = -\frac{A_n F_n + D_n G'_n}{A_n^2 - B_n D_n} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (45)$$

$$c'_n = -\frac{A_n G'_n + B_n F_n}{A_n^2 - B_n D_n} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (46)$$

ここに、

$$G'_n = G_n + 4K_1^p a_n \operatorname{ch}(a_n)/\Delta_n$$

被膜の表面変位 $u'_{y=-t}, v'_{y=-t}$ は

$$\begin{aligned}
u'_{y=-t} &= K_1^p \sum \left[\frac{-2\{a_n \operatorname{sh}(a_n) \operatorname{ch}(a_n)\}}{\Delta_n} \right] \frac{\cos(n\omega x)}{n\omega} \cdot a'_n \\
&\quad + K_1^p \sum \left[\frac{2\{a_n \operatorname{ch}(a_n) - \operatorname{sh}(a_n)\}}{\Delta_n} \right] \frac{\cos(n\omega x)}{n\omega} \cdot b'_n + K_1^p \sum \left[\frac{-2a_n \operatorname{sh}(a_n)}{\Delta_n} \right] \frac{\cos(n\omega x)}{n\omega} \cdot c'_n \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'_{y=-t} &= \frac{a'_0}{2} K_1^p x + K_1^p \sum \left[\frac{a_n^2 + (1-2\nu_p) \operatorname{sh}^2(a_n)}{\Delta_n} \right] \frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \cdot a'_n \\
&\quad + K_1^p \sum \left[\frac{2a_n \operatorname{sh}(a_n)}{\Delta_n} \right] \frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \cdot b'_n + K_1^p \sum \left[\frac{-2\{a_n \operatorname{ch}(a_n) + \operatorname{sh}(a_n)\}}{\Delta_n} \right] \frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \cdot c'_n \quad (48)
\end{aligned}$$

被膜の応力は

$$\sigma'_x = \sum \left[\left(-\frac{H_n^3}{Q_n} + \frac{H_n^4}{Q_n} \right) a'_n - \left(\frac{H_n^3}{Q_n} + \frac{H_n^4}{Q_n} \right) b'_n + \left(\frac{H_n^1}{Q_n} + \frac{H_n^2}{Q_n} \right) c'_n \right] \sin(n\omega x) \quad (49)$$

$$\sigma'_y = \sum \left[\left(-\frac{H_n^7}{Q_n} + \frac{H_n^8}{Q_n} \right) a'_n - \left(\frac{H_n^7}{Q_n} + \frac{H_n^8}{Q_n} \right) b'_n - \left(\frac{H_n^5}{Q_n} + \frac{H_n^6}{Q_n} \right) c'_n \right] \sin(n\omega x) \quad (50)$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{a'_0}{2} + \sum \left[\left(\frac{H_n^2}{Q_n} - \frac{H_n^1}{Q_n} \right) a'_n + \left(\frac{H_n^2}{Q_n} + \frac{H_n^1}{Q_n} \right) b'_n + \left(\frac{H_n^8}{Q_n} + \frac{H_n^7}{Q_n} \right) c'_n \right] \cos(n\omega x) \quad (51)$$

表面変位の影響係数 D_{ij}^1 または D_{ij}^2, S_{ij}^1 または S_{ij}^2 はそれぞれ式(30)、式(47)に次式で与えられる $a'_0, a'_n (n=1, 2, \dots)$ を代入すれば得られる。

$$a'_0 = \frac{4a}{L}, a'_n = \frac{4}{n\omega L} \sin(n\omega a) \quad (52)$$

応力の影響係数も同様にして得られる。

2.3 影響係数の検討 前節で述べた結果を、被膜の存在しない半無限板の理論解と比較した。この理論解は、次式で与えられる応力関数 $\chi^{(7)}$ 、

$$\chi = -(Q/\pi) r \theta \sin \theta \quad (53)$$

Q : 荷重, r, θ : 荷重作用点を原点とした極座標, を利用して求めたものであり、次式となる。ただし座標系は単位

分布荷重の中心に原点をもち、境界に沿って x 軸、それに直角に z 軸をとったものを用いている。

$$u_{z=0} = v_{z=0} = -K'f(x)(|x| \leq a), = -K'fa(a \leq x), = K'fa(x \leq -a) \quad (54)$$

$$v_{z=0} = u'_{z=0} = \frac{2K'f}{\pi} \left[x \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + a \ln |(x+a)(x-a)| - 2a \right] \quad (55)$$

$$\sigma_x = \tau_{xz} = \frac{z}{\pi} \left[\frac{-(x-a)}{(x-a)^2+z^2} + \frac{(x+a)}{(x+a)^2+z^2} + \frac{1}{z} \tan^{-1} \left(\frac{x-a}{z} \right) - \frac{1}{z} \tan^{-1} \left(\frac{x+a}{z} \right) \right] \quad (56)$$

$$\sigma_z = \frac{z}{\pi} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2+z^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+z^2} + \frac{1}{z} \tan^{-1} \left(\frac{x-a}{z} \right) - \frac{1}{z} \tan^{-1} \left(\frac{x+a}{z} \right) \right] \quad (57)$$

$$\tau_{xz} = \sigma'_z = \frac{z^2}{\pi} \left[-\frac{1}{(x-a)^2+z^2} + \frac{1}{(x+a)^2+z^2} \right] \quad (58)$$

$$\sigma'_x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-z^2}{(x-a)^2+z^2} + \frac{z^2}{(x+a)^2+z^2} + \ln \frac{(x+a)^2+z^2}{(x-a)^2+z^2} \right] \quad (59)$$

ここで、ダッシュを付した応力、変位は分布荷重が接線力の時を意味し、また $2a$ は荷重作用幅を意味する。

前述の式をこれらの理論解と比較するには、周期 L を $2a$ に比べて十分大きくとる必要がある、 $L/a=800, 400, 200, 100, 50$ として計算すると、荷重作用位置付近ではどの場合も理論値とよく近似するが、遠のくに従って誤差はこの順に大きくなる。以下の計算では、 $L/a=800$ 、項数 $n=600$ を用いたが、この条件下では理論値との差は 0.1% 以内である。

3. 計 算 例

計算例として図 3 に示す円柱と被膜を有する平面の接触を取り上げた。下地と円柱の材料特性は同一とし、被膜のそれは $E_p=0.1E_f \sim 10E_f$, $\nu_p=\nu_f=0.3$ とした。また、鋼面(ヤング率 $E_s=205.9$ GPa, ポアソン比 $\nu_s=0.3$)に Al_2O_3 セラミックス ($E_A=343.2$ GPa, $\nu_A=0.25$) が被覆され、鋼円柱と接触する場合、および銅 ($E_c=122.5$ GPa, $\nu_c=0.34$) が鋼面に被覆されて鋼円柱と接触する場合についても計算した。被膜の厚さ

図 3 計算モデル

図 4 接触圧力分布の例

T_i は $0.1a_H \sim 3a_H$ (a_H : 被膜が存在しない時の理論接触半幅) とした。

図 4 に接触圧力分布の例を、接触圧力 p を被膜が存

図 5 最大接触圧力

図 6 垂直力による接着面上の最大圧縮応力

在しない時の最大ヘルツ圧 p_H で無次元化して示す。この結果は接触圧力を各分割領域の中央（表面変位のマッチング点）に対してプロットし、なめらかに結んだものである。どの場合にも接触圧力はほぼだ円に近い分布形をとることがわかる。図5は、種々の E_p/E_f に対して無次元被膜厚さ T_i/a_H と無次元最大接触圧力 $p_{\max}/p_H$ の関係を示したものである。 $p_{\max}/p_H$ の変化は $T_i/a_H=0\sim 0.25$ で顕著であり、それ以上では被膜の材料特性をもつ物体と相手物体の接触における最大ヘルツ圧に近い。

図7 垂直力による接着面上の最大接線応力

図6に、垂直力 P の作用下で接触面中央直下の接着部に生じる接着面上の最大圧縮応力 $\sigma_{y,max}/p_H$ を T_i/a_H で整理した結果を示す。この最大圧縮応力には E_p/E_f の影響は顕著には表れない。

図7に垂直力 P の作用下で接着面上に生じる接線応力の最大値 $\tau_{xy,max}/p_H$ を T_i/a_H で整理した結果を示す。 $\tau_{xy,max}$ には、 E_p/E_f によらずピークをとる被膜

図8 垂直力による接触面中央直下、接着部の被膜側の σ_x

図9 接線力が付加された時の接着面上の最大接線応力 ($E_p/E_f=10, 3, 1, 1/3, 1/10$)

厚さが存在し、またそのピークは E_p/E_f が小さくなるとともに厚い被膜側へと移行している。ピーク値自体は E_p/E_f が大きくなるに従い次第に増加し、 $E_p/E_f > 3$ ではほぼ一定となる。

接着部における被膜側の σ_x を計算すると、垂直力 P のみの作用下でもある領域にわたり引張応力が発生する場合がある。そこで最大の引張応力の発生がみられる接触面中央直下の接着部における σ_x/p_H を、 T_i/a_H で整理した。その結果を図8に示す。これより、 $E_p > E_f$ ではある被膜厚さ以上では引張応力が発生すること、その臨界値は E_p/E_f が大きいほど薄くなること、各 E_p/E_f に対して引張応力が最大となる被膜厚さが存在し、ピーク値は E_p/E_f が大きいほど大きいことなどがわかる。

図9に接線力 T が付加されたときの接着部に生じる接線応力の最大値 $\tau_{xy,\max}/p_H$ を、 T_i/a_H で整理した結果を示す。接線力 T としては、巨視的なすべりを生じる直前の値として $T=0.999\mu P$ を用いた。 μ は静摩擦係数である。 $\tau_{xy,\max}$ に及ぼす接線力の影響は被膜の厚さが薄いほど顕著に表れている。また、 $\tau_{xy,\max}$ がピークをとる被膜厚さは、 $\mu=0.1$ 付近までは被膜材質に関係なく押込みによるそれとほぼ同じ厚さとなるが、 $\mu=0.3$ では、 $E_p/E_f=1/10$ の場合にはそのピークはごく薄い被膜側へと移行している。さらに、 $\mu=$

0.6 ではどの場合にも同様の移行を生じる。

4. 結 言

下地と材質の異なる被膜が存在する時の接触応力を求める方法を提示し、被膜を有する平面と円柱の接触を解析した。その結果、次の結論を得た。

(1) この方法により、二次曲面の接触に限定することなく、広範囲に変化する被膜材質、被膜厚さに対して、被膜の接触応力を解析することが可能である。

(2) 二次曲面の接触における、被膜のはく離現象を調べる上で重要と考えられる下地と被膜の接着面の応力状態を、種々の被膜材質、厚さに対して明らかにできた。

文 献

- (1) Popov, G., *J. Appl. Math. Mech.* (USSR), **26** (1962), 207.
- (2) Vorovich, I. and Ustinov, J., *J. Appl. Math. Mech.* (USSR), **23** (1959), 637.
- (3) El-Sherbiny, M. G. D. and Halling, J., *Wear*, **40** (1976), 325.
- (4) Pao, Y. C., Ting-Shu Wu and Chiu, Y. P., *Trans. ASME, Ser. E*, **93-3** (1971), 608.
- (5) 例えば、尾田、機論, **40-329** (昭49), 70.
- (6) 佐藤・志摩, 潤滑, **28-6** (昭58), 442.
- (7) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill (1970), 98.