直流電流下の導体内き裂端近傍温度分布
と径路独立積分*

坂 真 澄**, 阿 部 博 之**

Path-Independent Integrals for Heat Conduction Analysis
in Electro-Thermal Crack Problems

by Masumi SAKA and Hiroyuki ABÉ

A path-independent integral, j_e , is newly introduced for the analysis of steady temperature distribution near the tip of a crack in a homogeneous isotropic conductive plate with the steady current. By making use of the j_e -integral together with the j_c -integral, which has been introduced by the authors for the electric crack problems, an asymptotic solution is presented for the steady temperature distribution. It is shown that directly ahead of the crack, the temperature remains constant along the crack line. Finally, the temperature along the crack line of an edge crack in a conductive strip is determined analytically as a function of the crack length, the far-field temperature, and the total current introduced on the strip.

Key Words: Fracture, Conductive Plate, Crack, Electric Current, Temperature, Path-Independent Integral

1. 緒 言

工学上、き裂材に電流を流す問題にしばしば遭遇する。たとえばき裂初生の検出ならびにき裂長さの計測に用いられる電気ポテンシャル法では、き裂を有する試験片あるいは構造物に一定の直流電流を流し、き裂をはさんで位置する2点間の電位差を測定することによりき裂長さを評価する⁽¹⁾。また将来のエネルギーとして期待される核融合炉構造物の健全性評価においては、構造物内を流れる電流と磁場との相互作用下における破壊が重要な問題となる⁽²⁾。

ところで電流を流された導電体中ではジュール熱が発生する。特に導電体中にき裂が存在する場合には、き裂端近傍において発熱電力が非常に大きくなる。著者ら⁽³⁾は先に導電体からなる物体の定常直流電流下における二次元き裂問題を取扱い、き裂端近傍における発熱電力の分布が径路独立 j_e 積分により支配されることを明らかにした。

このように導電体中でジュール熱が発生すれば、これに伴う温度上昇により導電体の諸物性値の変化ある

いは熱応力の発生などが誘起されよう。したがってき裂材に電流を流す問題では、材料内の電流密度分布、電位分布のみならず温度分布をも決定することが必要になる。

ここではまずこの種の問題に対する基礎研究として、き裂を有する導電体に定常直流電流が流された場合のき裂端近傍における定常温度分布について理論的な検討を行う。解析にあたっては二次元定常熱伝導問題を対象とした径路独立積分 (j_e 積分と呼ぶ) を新たに導入し、 j_e 積分と j_c 積分を併用することによりき裂端近傍の温度分布を求める。

2. Laplace の方程式への基礎式の変換

二次元の定常熱伝導方程式はよく知られているように次の Poisson の方程式で表される。

$$\lambda \nabla^2 T + Q = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ であり、 T, λ, Q はそれぞれ温度、熱伝導率ならびに単位時間、単位体積当たりの熱発生量である。また (x_1, x_2) は直角座標系を表す。なお本報で現れる諸物性値は領域内で一定であるものとする。

導電体に定常直流電流が流される場合、 Q は単位面積当たりの電流ベクトル J の成分 J_a を用いて次のよ

* 昭和60年3月31日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月8日。

** 正員、東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉)。

うに表される。

$$Q = A \rho J_a J_a \dots\dots\dots (2)$$

ここに A は仕事の熱当量であり、 ρ は抵抗率である。
なお式(2)をはじめとし本論文では総和規約を用い、
ギリシャ文字の添字は 1, 2 の数値をとるものとする。
ところで Ohm の法則より

$$\rho J_a = -\frac{\partial \phi}{\partial x_a} \dots\dots\dots (3)$$

ここに ϕ は電位を表す。式(3)を式(2)に代入すれば

$$Q = \frac{A}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \dots\dots\dots (4)$$

さらに式(4)を式(1)に代入することにより、定常直流電流を流された導電体の二次元定常熱伝導問題の基礎式として次式を得る。

$$\lambda \nabla^2 T + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで式(3)および電流保存則

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

より

$$\nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (7)$$

が成立することを考慮し、式(5)の左右両辺に $(A/\rho)\phi \nabla^2 \phi$ を加えれば

$$\lambda \nabla^2 T + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} + \frac{A}{\rho} \phi \nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (8)$$

式(8)は次のように Laplace の方程式に変換される。

図 1 二次元導電平板内の閉曲線 Γ^*

図 2 二次元導電き裂材内の曲線 Γ

$$\nabla^2 \left(T + \frac{A}{2\lambda\rho} \phi^2 \right) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

3. 経路独立積分

ここで次式で表されるベクトル $\mathbf{p}$ を新たに定義する。

$$\mathbf{p} = -\lambda \text{grad} \left(T + \frac{A}{2\lambda\rho} \phi^2 \right) \dots\dots\dots (10)$$

なお式(3)および Fourier の法則

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } T \dots\dots\dots (11)$$

を用いれば、 $\mathbf{p}$ は次のように書き換えることができる。

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} + A\phi \mathbf{J} \dots\dots\dots (12)$$

ここに $\mathbf{q}$ は単位時間、単位面積当たりの熱流束である。

いま二次元導電平板の中に図 1 に示すように閉曲線 Γ^* をとる。図 1 において $\mathbf{n}$ は Γ^* 上の外向き単位法線ベクトル、 ds は Γ^* の線素、 A^* は Γ^* により囲まれる領域の面積を表す。ここで次式で定義される線積分 Ψ を考えてみよう。

$$\Psi = \int_{\Gamma^*} \left\{ W dx_2 + p_a n_a \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T + \frac{A}{2\lambda\rho} \phi^2 \right) ds \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに

$$W = \int_0^p \frac{1}{\lambda} p_a dp_a = \frac{1}{2\lambda} p_a p_a \dots\dots\dots (14)$$

であり、 p_a, n_a はそれぞれ $\mathbf{p}, \mathbf{n}$ の成分を表す。Green-Gauss の定理を用いれば式(13)は次のように面積分に変換される。

$$\Psi = \int_{A^*} \left[\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ p_a \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T + \frac{A}{2\lambda\rho} \phi^2 \right) \right\} \right] dx_1 dx_2 \dots\dots\dots (15)$$

ところで式(14)より

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial x_1} = \frac{p_a}{\lambda} \frac{\partial p_a}{\partial x_1} \dots\dots\dots (16)$$

また式(9)、(10)より

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ p_a \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T + \frac{A}{2\lambda\rho} \phi^2 \right) \right\} \\ &= -\frac{p_a}{\lambda} \frac{\partial p_a}{\partial x_1} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

式(16)、(17)を式(15)に代入することにより恒等的に

$$\Psi = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となることがわかる。

ここでき裂材を対象として次式で定義される線積分 J_I を導入する。なおき裂面は x_1 軸に平行にあるものとし、電気的ならびに熱的に絶縁されているものとする。

る。

$$j_t = \int_{\Gamma} \left\{ W dx_2 + p_a n_a \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T + \frac{A}{2\lambda\rho} \phi^2 \right) d\Gamma \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに Γ は図2に示すようにき裂の下面から上面まで物体内にとった曲線であり、 $d\Gamma$ はその線素である。き裂面上で

$$dx_2=0, n_1=0, p_2=0 \dots\dots\dots (20)$$

となることを考慮すれば、式(18)より j_t 積分は経路独立となることがわかる。なお対象とする領域内でジュール熱の発生がない熱伝導問題に対しても j_t 積分が経路独立となることは明らかである。

4. き裂端近傍における温度分布

き裂を有する導電平板に定常直流電流を流した場合のき裂端近傍における電位分布は次のように表される⁽³⁾。

$$\phi = 2B_1 \sqrt{\frac{\rho j_e r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \phi_0 \quad (B_1=1, -1) \dots\dots\dots (21)$$

ここに (r, θ) はき裂端近傍で定義される極座標系である。 ϕ_0 はき裂先端 $(r=0)$ における電位を表す。また B_1 はき裂端近傍において電流が $\theta > 0$ の方向から $\theta < 0$ の方向に流れる場合には $B_1=1$ となり、 $\theta < 0$ の方向から $\theta > 0$ の方向に流れる場合には $B_1=-1$ となる。

ところで j_e 積分を用いた式(21)の誘導⁽³⁾と同様に、 j_t 積分を用いることによりき裂端近傍での $T + (A/2\lambda\rho)\phi^2$ の分布として次の表示を得る。

$$T + \frac{A}{2\lambda\rho} \phi^2 = 2B_2 \sqrt{\frac{j_e r}{\lambda\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + C_1 \quad (B_2=1, -1) \dots\dots\dots (22)$$

ここに C_1 は定数である。式(22)に式(21)を代入することにより、き裂端近傍における温度分布は次のように求められる。

$$T = T_0 + 2\eta \sqrt{\frac{r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{2A}{\pi\lambda} j_e r \sin^2 \frac{\theta}{2} \dots\dots\dots (23)$$

ここに

$$\eta = B_2 \sqrt{\frac{j_e}{\lambda}} - \frac{AB_1\phi_0}{\lambda} \sqrt{\frac{j_e}{\rho}} \dots\dots\dots (24)$$

なお $T_0 = C_1 - (A/2\lambda\rho)\phi_0^2$ はき裂先端における温度を表す。

ここで式(23)に基づき、き裂端近傍における温度分布の様相をもう少し詳細に調べてみよう。き裂端近傍の温度分布は $\eta > 0$, $\eta < 0$, $\eta = 0$ に応じて図3に示す三

とおりの特徴的な様相を呈する。

$\eta > 0$ の場合〔図3(a)〕には、き裂先端ではなく $\theta > 0$ の領域においてき裂先端から $r=r^*$ だけ離れた位置で温度は $T = T_0 + (\eta^2\lambda/2Aj_e)$ となり最大値を示し、 $r=4r^*$ でき裂先端の温度と同一温度になる。なお

(a) $\eta > 0$ の場合

(b) $\eta < 0$ の場合

(c) $\eta = 0$ の場合

図3 き裂端近傍における温度分布の概念図

$$r^* = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{\eta \lambda}{A j_e \sin(\theta/2)} \right\}^2 \dots\dots\dots (25)$$

である。またこの場合、 $\theta < 0$ の領域ではき裂先端から離れるに伴い温度は単調に減少する。

つぎに $\eta < 0$ の場合〔図 3 (b)〕には、 $\eta > 0$ の場合とは逆に $\theta < 0$ の領域においてき裂先端から $r = r^*$ だけ離れた位置で温度は最大となり、 $r = 4r^*$ でき裂先端の温度と同一温度になる。またこの場合、 $\theta > 0$ の領域ではき裂先端から離れるに伴い温度は単調に減少する。

最後に $\eta = 0$ なる特別な場合〔図 3 (c)〕には、温度分布はき裂線に対し対称となり、 θ によらず ($\theta = 0$ は除く) き裂先端から離れるに伴い温度は単調に減少する。またこの減少こう配は j_e 積分の大きさにより決定される。

なお η の値によらずき裂端近傍のき裂線上 ($\theta = 0$) では場所によらず温度は一定である。

5. リガメント上の温度の評価

4 章ではき裂先端の電位 ϕ_0 、温度 T_0 をそれぞれ未定数として扱った。これらの値の決定は、境界条件が複雑な場合には有限要素解析等の数値計算にたよるざるを得ない。しかしながら以下に示す境界条件が簡単な基本問題においては、これらの値を解析的に評価できる。

5.1 リガメント上の電位 いま図 4 (a) に示すように導電体からなる片側き裂付き帯板にき裂面から $l/2$ なる距離だけ離れた端面 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ 上で密度 J_2^* なる一様電流が流されるものとする。端面 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ を除く帯板の境界は電氣的ならびに熱的に絶縁されているものとする。帯板の幅を b 、厚さを t 、き裂長さを a とする。また端面 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ 間の電気抵抗を R とする。 j_e 積分と R との間には次の関係が成立する⁽⁴⁾。

$$j_e = \frac{I^2}{2t} \frac{dR}{da} \dots\dots\dots (26)$$

ここに

$$I = -J_2^* b t \dots\dots\dots (27)$$

である。

ところで導電体からなる物体の定常直流電流下における二次元き裂問題と縦せん断荷重下の弾性き裂問題の基礎式の類似性より、両問題は次に示す記号の置き換えにより数学的に同一な問題として扱うことができる⁽⁴⁾。

$$j_e \leftrightarrow J, \quad J_2^* \leftrightarrow \sigma_{32}^*, \quad \rho \leftrightarrow 1/\mu \dots\dots\dots (28)$$

ここに J は J 積分、 σ_{32}^* は応力テンソル、 μ はせん断弾性係数を表す。そこでいま図 4 (a) の問題を対象と

するに先立ち、図 4 (b) に示す縦せん断荷重を受ける片側き裂付き弾性帯板の応力問題を考える。同じ裂の応力拡大係数 K_{III} は次のように与えられる⁽⁵⁾。

$$K_{III} = \sigma_{32}^* \sqrt{2b \tan \frac{\pi a}{2b}} \dots\dots\dots (29)$$

さらに J 積分と K_{III} の関係⁽⁶⁾

$$J = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \dots\dots\dots (30)$$

を用いれば

$$J = \frac{b}{\mu} \sigma_{32}^{*2} \tan \frac{\pi a}{2b} \dots\dots\dots (31)$$

ここで式 (28) に示す記号の対応関係を考慮すれば、式 (26)、(27)、(31) より

$$\frac{dR}{da} = \frac{2\rho}{bt} \tan \frac{\pi a}{2b} \dots\dots\dots (32)$$

式 (32) の左右両辺を a で積分することにより

$$R = -\frac{4\rho}{\pi t} \ln \left(\cos \frac{\pi a}{2b} \right) + \frac{\rho l}{bt} \dots\dots\dots (33)$$

ここに式 (33) の右辺第 2 項は $a=0$ の場合の端面 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ の間の電気抵抗を表す。ところで式 (21) よりリガメント上で電位は一定値 ϕ_0 をとる。したがって図 4 (a) において端面 $\overline{CD}$ 上の電位を ϕ_1 とすれば、Ohm の法則から ϕ_0 および ϕ_1 を用いることにより R は次のようにも表される。

$$R = \frac{2(\phi_1 - \phi_0)}{I} \dots\dots\dots (34)$$

故に式 (33)、(34) より ϕ_0 の表示として次式を得る。

$$\phi_0 = \phi_1 + I \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\cos \frac{\pi a}{2b} \right) - \frac{l}{2b} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

片側き裂付き帯板の寸法、抵抗率、端面の電位、電流の諸値が与えられれば、式 (35) よりリガメント上の電位が決定される。

5.2 リガメント上の温度 電流問題と電流下の

(a) 一様電流が流される導電帯板 (b) 縦せん断荷重を受ける弾性帯板

図 4 片側き裂付き帯板

熱伝導問題の基礎式の類似性, すなわち式(7)と式(9), 式(3)と式(10)の類似性より両問題は次に示す記号の置き換えにより数学的に同一な問題として扱うことができる。

$$J_a \rightarrow p_a, \quad \phi \rightarrow T + \frac{A}{2\lambda\rho}\phi^2, \quad \rho \rightarrow \frac{1}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (36)$$

また式(9), (10)より

$$\operatorname{div} p = 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

故に端面 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ 間の導電体が占める領域について Green-Gauss の定理を適用すれば, 式(12), (37)より端面 $\overline{CD}$ 上で

$$q_2^* = A J_2^* (\phi_1 - \phi_0) \quad \dots\dots\dots (38)$$

故に

$$p_2^* = -A J_2^* \phi_0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここに q_2^* , p_2^* はそれぞれ端面 $\overline{CD}$ 上における q_2 , p_2 を表す。したがって式(36)の第1式および式(27), (39)より電流問題における I に対し, 電流下の熱伝導問題の $A\phi_0 I$ が対応することがわかる。すなわち

$$I \rightarrow A\phi_0 I \quad \dots\dots\dots (40)$$

なお導電体中にはジュール熱の発生に伴う熱流束の生成のほかに, 他の熱源による熱流束はないものとする。

式(35)に式(36), (40)に示した記号の置き換えを施せば

$$T_0 = T_1 + \frac{A}{2\lambda\rho}(\phi_1^2 - \phi_0^2) + \frac{A\phi_0 I}{\lambda l} \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\cos \frac{\pi a}{2b} \right) - \frac{l}{2b} \right\} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここに T_1 は端面 $\overline{CD}$ 上の温度を表す。さらに式(41)

に式(35)を代入すれば

$$T_0 = T_1 + \frac{A I^2 \rho}{2\lambda l^2} \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\cos \frac{\pi a}{2b} \right) - \frac{l}{2b} \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (42)$$

片側き裂付き帯板の寸法, 抵抗率, 熱伝導率, 端面の温度, 電流の諸値が与えられれば, 式(42)よりリガメント上の温度が決定される。なお式(42)より a/b が1に近くなれば, 端面とリガメントの温度差が非常に大きくなることがわかる。

6. 結 言

定常直流電流が流されることによりき裂を有する導電体中でジュール熱が発生する場合の二次元定常熱伝導問題を対象として, 経路独立 j_i 積分を新たに導入した。さらに j_i 積分と既に提案されている j_e 積分を併用することにより, き裂端近傍における温度分布の様相を明らかにした。

最後に, 図の作製などにあたっては東北大学工学部 庄子孝夫技官の協力を得たことを記し, 感謝の意を表す。

文 献

- (1) Knott, J. F., *Fundamentals of Fracture Mechanics*, (1973), 241, Butterworth & Co., Ltd., London.
- (2) 矢川・吉村, 機械の研究, 35-3 (昭58), 359.
- (3) Saka, M. and Abé, H., *Int. J. Eng. Sci.*, 21-12 (1983), 1451.
- (4) 坂・阿部, 機論, 50-457, A (昭59), 1644.
- (5) Tada, H., ほか2名, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, (1973), 2.29, Del. Research Corp., Pennsylvania.
- (6) 岡村, 線形破壊力学入門, (昭51), 95, 培風館.

討 論

〔質問〕 久保 司 郎〔大阪大学工学部〕

貴論文を興味深く拝見した。

電流により温度場が誘起されたことを考えれば, 温度場に対する経路独立積分 j_i は, 電場に対するそれ j_e を用いて書き表すことができるのではないか。

〔回答〕 電流問題に対する境界条件が定められれば, j_e 積分の値は決定される。これに対し j_i 積分の値の決定には, 電流問題に対する境界条件と熱伝導問題に対する境界条件の2種の境界条件を与える必要がある。したがって j_e 積分の値が既知となるのみでは, j_i

積分の値は決定されない。

き裂端近傍の温度分布 $T(r, \theta)$ およびき裂先端の温度 T_0 , 電位 ϕ_0 を介せば, 式(23), (24)より j_i 積分と j_e 積分は次の関係にある。

$$j_i = \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{B_2} \left\{ \frac{T(r, \theta) - T_0 + \frac{2A}{\pi\lambda} j_e r \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{\frac{r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{AB_1\phi_0}{\lambda} \sqrt{\frac{j_e}{\rho}} \right\} \right]^2$$