平面弾性ならびに熱弾性 BEM の高精度・高能率化について*

仙波卓弥**, 谷 泰 弘**, 佐藤 壽 芳**

Improvement of Accuracy and Efficiency on 2-Dimensional Elastic
and Thermo-Elastic Boundary Element Method

by Takuya SEMBA, Yasuhiro TANI, and Hisayoshi SATO

Special schemes for numerical integrations to overcome singularities of integrands are required to be developed so that the numerical solutions with sufficient accuracy may be generally obtained by the conventional Boundary Element Method (BEM). In this paper, the investigation is made to improve the accuracy and the efficiency on linear elastic and thermo-elastic BEM. Namely, the comparison between the numerical results derived by the double exponential formula and by the high-ordered Legendre-Gauss formulae is shown on source points which are very close to the boundary element. It is made obvious that sufficiently accurate solutions can be obtained with better efficiency than that by the conventional method by adopting integral domain which can erase the positive and the negative symmetry of integrands.

Key Words: Numerical Analysis, Boundary Element Method, Singular Integration, Elasticity, Thermo-Elasticity

1. 緒 言

細分化された微小積分区間で、線形もしくは非線形の変位場を仮定する有限要素法 (FEM) の場合と異なり、例えば線形弾性・境界要素法 (BEM) では Navier 方程式を満たす二点関数 (基本解) により境界を含む領域内での変位 (応力) 場を近似する。したがって数値計算誤差を FEM と同等の程度にまで抑え得たとすれば、BEM により FEM と同等あるいはより高精度の解を得ることが可能である。

しかし定点近傍における被積分関数の変化が極めて急峻であることから、数値積分に際しなんらかの工夫をしない限り、一般に高精度解は得られていない現状にある⁽¹⁾。また本論文中にて Dirichlet (Neumann)-Neumann 境界と称している、応力指定境界 (Neumann 形境界) と変位指定境界 (Dirichlet 形境界)、あるいは異種応力が作用する応力指定境界の隣接点に位置するような節点に対しては、同節点において表面力を二重に定義しないと、工学上許容される結果は得られない⁽¹⁾⁽²⁾。一方、他の離散化解析法に比べ

て、より広い範囲を数値解析の対象として選択することが可能であるという BEM のもつ最大の特徴は、上記の欠点を補いあまりある。

こうした観点より、本論文では、平面弾性ならびに熱弾性 BEM を例にとり求解の高精度・高能率化に関する検討を試みている。すなわち離散化された積分方程式の数値積分に、(1) 二重指数関数形の特異積分公式を用いる岡本らの手法⁽¹⁾、(2) 被積分関数の対称性を考慮した積分区間の分割を行った後、通常の Gauss-Legendre 公式を用いる本論文の手法、等をそれぞれ適用し両結果の比較を試みた結果、本論文の手法の有用性が認められたので報告する。ただし、Dirichlet (Neumann)-Neumann 境界の隣接点に位置するような境界節点に関しては、変位の適合条件と表面力の不連続性とを同時に考慮する新しい試みを適用している。

2. 基礎方程式

二次元熱弾性問題に対し、境界積分方程式は、

$$C_i U_i + \int_{\Gamma} U_k P_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k U_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mu \delta_{im} \theta U_{mk}^* d\Omega \cdots \cdots (1)$$

* 昭和 60 年 7 月 11 日 北陸信越支部北陸地方講演会において講演、原稿受付 昭和 59 年 10 月 27 日。

** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

ただし、平面応力問題を例にとれば μ は、弾性率 E 、線膨張係数 α 、ポアソン比 ν を用い、

$$\mu = Ea / (1 - \nu) \dots \dots \dots (1)'$$

と表される⁽³⁾⁽⁴⁾。ここに、 C_i は定点 i を含む境界の幾何学的な形状により決定される定数、 U_i は定点 i に生じる l 方向変位、 U_k 、 P_k は定点 i に単位力が作用する時、影響点に生じる変位と表面力、さらに U_k^* 、 P_k^* はNavier方程式(均質等方・線形弾性体)を満たす基本解である。また δ_{ik} はKroneckerのデルタ、 θ は影響点での温度を表す。境界要素を用いて式(1)を離散化することにより、

$$HU = GP + Q \dots \dots \dots (2)$$

なる平衡方程式を得る。 H 、 G はそれぞれ式(1)の左辺ならびに右辺第1項より導かれる係数マトリックス、 Q は式(1)右辺第2項より得られるベクトルである。ただし角点がちょうどDirichlet (Neumann) - Neumann境界の隣接点に位置する場合の離散化に際しては、角点において変位と表面力とを二重に定義し、式(1)を

$$\begin{aligned} C_i U_i + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k P_k^* d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \mu \delta_{lm} \theta U_{m,k,k}^* d\Omega \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

と書き直した上で、式(3)を離散化するとともに、

$$U_m = U_m^*, \quad P_m = P_m^* \dots \dots \dots (4)$$

なる付帯条件の下で平衡方程式を解くことにしている(使用記号については図1参照)。なお、 $\bar{U}_k$ 、 $\bar{P}_k$ は境界にて既知の変位、ならびに表面力を表す。また内点でのひずみの算出に際し右辺第2項の領域積分に関する積分項は、

$$\begin{aligned} U_{i,l} = \lim_{\substack{\alpha \epsilon \rightarrow 0 \\ \alpha \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\Omega \epsilon} \mu \theta U_{i,k}^* d\Omega + \lim_{\substack{\alpha \epsilon \rightarrow 0 \\ \alpha \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\Omega \epsilon} \mu \theta U_{i,k}^* d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mu \theta U_{i,k}^* d\Omega + \frac{\alpha(1+\nu)}{2} \theta \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

と変形され、右辺第2項に示したCauchyの主値を取

図1 角点処理

ることに注意を要する。なお θ は定点での温度である。

3. 解析精度に及ぼす数値積分法の影響

標本点の個数 n に対し、被積分関数が有限区間内で $(n-1)$ 次以下の多項式で補間され得る場合についてはGauss-Legendre公式(n 点公式)の適用が有効である⁽⁵⁾。しかし基本解が例えば⁽⁴⁾、

$$\begin{aligned} P_k^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-\nu)\delta_{ik} + 2(1-\nu) \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right\} \right. \\ \left. - (1-\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right) \right] \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

と定点($r=0$)において特異となることから、離散化された式(3)の数値積分に低次のGauss積分を用いると、通常満足のいく解の精度は得られない。特に、内点での変位やひずみに関する解析精度は劣悪となる。以下平面弾性、ならびに熱弾性問題を例にとり、式(3)の数値積分に関する高精度化についての考察を試みている。ただし解析対象は 5×5 mmの正方形板、弾性率は210 GPa、ポアソン比は0.3、線膨張係数 α は $0.1 \times 10^{-2} / ^\circ\text{C}$ である。

3.1 平面弾性問題の高精度化について 上記の正方形板を例にとり、二軸均等な伸長変形時($\epsilon_x = \epsilon_y = 0.1\%$)における、内点($y=0.5$ mm, $\Delta x=0.1$ mm)での y 軸方向変位(U_y) _{$y=0.5$} 、ならびに y 軸方向ひずみ(ϵ_y) _{$y=0.5$} を求めると、図2に示す結果を得る。縦軸は解析解と厳密解との比、横軸は x 座標値、ならびに図中○、△、□印は境界要素の総数をそれぞれ8、12、16と変位させた場合に得られる結果を表す。ただし線積分には8次のGauss積分を用いている。同図に示した結果からも明らかなように、内点に関する解析精度は境界分割数を増すにつれ向上する。一方最も粗い要

図2 内点の解析精度に及ぼす境界分割数の影響

素分割時 (以下, 最粗分割時と略す), $0.5 < x < 4.5$ mm の範囲内では, 変位で最大 1%, ひずみで最大 20% 程度の誤差が生じている。また $x=0$ mm ならびに $x=0.5$ mm の境界に近接する内点での解析解は, 領域分割数の変化に依存せず発散の傾向を呈している。

その原因を明らかにするため, 境界分割数が 8 の場合に限定し, y 軸方向変位を基本解 U_{ik}^* の積分により得られる成分 $(U_{yu})_{y=0.5}$ と, P_{ik}^* の積分により得られる成分 $(U_{yp})_{y=0.5}$ とに分離し図示すると, 図 3 に示す結果を得る。縦, 横軸は図 2 のそれと同一, 図中実線は $(U_y)_{y=0.5}$, ならびに $\circ, \bullet$ 印はそれぞれ $(U_{yu})_{y=0.5}$ および $(U_{yp})_{y=0.5}$ を表す。参考のため, 横軸には Gauss 点の位置を付記している。同図に示した結果によれば $(U_{yu})_{y=0.5}$ は x 軸方向に一樣連続な変化をしているのに対し, $(U_{yp})_{y=0.5}$ の x 軸方向変化は必ずしも一樣ではなく, 内点が Gauss 点と近接した場合に正の最大誤差が生じていることがわかる。

これは内点が近接する積分区間内にて, 被積分関数 P_{ik}^* が特異性を有することに起因する。すなわち, 図 4 に実線でその一例 ($l=k=y, r_{\min}=0.1$) を示したとおり, 内点が境界要素と最も近接する $\xi=0$ においては, 被積分関数が特異となるため今の場合, 7 次の多項式をもってしても被積分関数の補間に関する精度が不十分であったためと考えられる。なお同図縦軸は P_{yy}^* の値 (—), 横軸は一般化座標にて表した積分区間を表す。

この特異関数の積分法として, 岡本ら⁽⁴⁾は二重指数関数形の積分公式⁽⁵⁾を用いている。この手法は図 4 にその概略を示したとおり, 被積分関数 $f(\xi)$ が積分区間内で実線に示す変化をする時, 特異点を端点に移した後 [$f(\xi')$: 一点鎖線], 変数変換

$$\xi' = \phi(u) = \tanh(\pi/2 \cdot \sinh u) \cdots \cdots (7)$$

図 3 U_{ik}^*, P_{ik}^* の積分により得られる変位の成分

により特異点近傍のみを拡大し [$f(\phi(u))$: 破線] $f(\xi)$ の代わりに $f(\phi(u))$ を台形積分しようとする手法である。

図 5 に上記の特異積分により求めた, 内点での変位ならびにひずみの x 軸方向分布を示す。縦, 横軸は図 2 のそれと同一, 図中 $\circ, \triangle, \square$ 印は台形積分に際し, 刻み幅 Δu を 0.1, 0.05, 0.01 と変化させた場合に得られる結果を表す。なお特異積分は, 定点から境界要素までの垂直距離を h , 要素長さを l とする時, $h < l$ を満たす要素についてのみ行い, 他は 8 次の Gauss 積分を用いることとしている。また境界分割数は 8, 積分の収束判定値として 10^{-5} を用いた。

図 5 に示したように, 内点に関する解の精度は刻み幅 Δu を小さくするに従い向上する。特に Δu が 0.01 の場合には, 変位, ならびにひずみとも解析解は厳密解と完全に一致する。しかし, Δu の減少に伴う演算時間の増加は無視し難く, 変数変換の後の数値積分に際しなんらかの工夫がなされない限り, 解析効率の悪さは免れない。

そこで, 定点が近接する ($h < l$) 境界要素 Γ_e に関してのみ, 定点の最近接点 ξ_0 と $2\xi_0+1$ を満たす ξ_1 とで積分区間を三分割し (図 6 参照), 積分方程式を

図 4 二重指数関数形積分の実施概略図

図 5 特異積分により求めた内点での変位, ひずみの分布

$$\int_{\Gamma_k} P_k U_{l_k}^* d\Gamma = \sum_{n=1}^3 \int_{\Gamma_{kn}} P_k U_{l_k}^* d\Gamma \quad \dots\dots\dots (8)$$

と書き直した後、Gauss 積分することとした。すなわち、これは細分化された各領域内での被積分関数の変化が、高次の多項式で精度よく補間されることを期した方法である。

上記の手法により求めた、内点での変位、ならびにひずみの分布を図7に○印で示す。ただし境界分割数は8, 16次の Gauss 積分を用いている。縦、横軸は図2に用いたそれと同じである。○印で示した結果から明らかなように、式(8)の手法は、内点での変位やひずみの高精度化に関し極めて有効である。また演算時間も図5に○印で示した場合に比較し格段に短く、図2に○印で示した場合の1.4倍程度と、十分実用に耐え得る範囲内のものである。ただし、この手法を用いたとしても、定点が境界要素に極めて近接した場合 ($h/l=1/20$) については、図7に○印で示したとおり、解の精度はいくぶん劣化する。これは被積分関数の補間が不十分であることに起因するものであり、図7に△印にて示した結果等を勘案すると、 $0.1 < h/l < 1$ の範囲内にある内点での変位やひずみの算出に限り、本論文の手法の適用が有効であると考えるのが妥当である。なお $h/l < 0.1$ の範囲内にある内点に関しては、上記の条件を満たすよう要素長さを決定し直す必要がある。

3・2 平面熱弾性問題の高精度化について 前節と同様、一辺5mmの正方形板を例にとり、二軸均等な膨張変形時 ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.1\%$) における内点 ($y=0.5$ mm, $\Delta x=0.1$ mm) での y 軸方向変位 (U_y) _{$y=0.5$} , ならびに y 軸方向ひずみ (ε_y) _{$y=0.5$} を求めると図8に示す結果を得る。縦軸は解析解と厳密解との比、横軸は x 座標値、ならびに図中○, △, □印は領域要素の総数をそれぞれ8, 16, 36と変化させた場合に得られる

結果を表す。ただし、線積分には本論文の手法、領域積分には定点を含む要素に対し24次、それ以外の要素に対し16次の Gauss-Legendre 公式を適用した。

同図に示した結果によれば、領域要素数の増加は必ずしも解析精度の向上には寄与しておらず、領域要素数=16 (境界要素数=16) の場合には変位で最大7% ひずみで最大700%の大きな誤差の生じていることがわかる (ただし領域分割数に依存せず、 x 座標が0.5, 2.0, 3.0, 4.5の4点において (ε_y) _{$y=0.5$} は正解もしくはそれに近接した値を有する)。

その原因を明らかにするため、最も大きな誤差の生じている領域要素数が16の場合に限定し、 y 軸方向変位を線積分により得られる成分 (U_{yT}) _{$y=0.5$} と、領域積分により得られる成分 (U_{yQ}) _{$y=0.5$} とに分離し図示すると、図9に示す結果を得る。縦軸は解析解と厳密解との比、横軸は x 座標、ならびに図中実線は (U_y) _{$y=0.5$} , ○, △印はそれぞれ (U_{yT}) _{$y=0.5$} および (U_{yQ}) _{$y=0.5$} を表す。横軸に付記した Gauss 点と内点との幾何学的関係に留意すれば、(U_{yQ}) _{$y=0.5$} にみられる局部的な不連続性は、いずれも内点と Gauss 点とが

図7 領域分割法により求めた内点での変位、ひずみの分布

図6 積分領域の三分割化

図8 内点の解析精度に及ぼす領域分割数の影響

極めて近接した場合に限り生じていることが明らかである。

これは定点を含む領域区間内において、被積分関数 $U_{m,k,k}^*$ が特異性を有していることに起因する。すなわち、図 10(a) にその一例 ($U_{xi,i}^* ; i=x, y$) を示したとおり、被積分関数が定点の ξ 座標 ξ_0 を線対称の軸とし、定点において $\pm\infty$ に発散するような特異関数となるため、被積分関数の対称性を考慮した数値積分を行わない限り、数値積分が発散積分になることに原因している。(ε_y)_{y=0.5} に関する解析精度が劣悪であったのも、図 10(b) にその一例 ($U_{xi,ix}^* ; i=x, y$) を示し

図 9 線積分、領域積分により得られる変位の成分

図 10

たとおり上記と同様の理由によるものである。この場合、被積分関数は定点（特異点）を点対称の中心とし $(\eta - \eta_0) = (\xi - \xi_0)$ にて零となる対称な分布をしている。また発散の度合いは $u_{xi,i}$ が $O(r^{-1})$ であるのに対し、 $O(r^{-2})$ とより尖鋭である。したがって、高精度解を得るためには、被積分関数の特異性、ならびに対称性を考慮した数値積分が必要となる。

この内点と Gauss 標本点との近接を避ける一つの手法として、本論文では定点を含む領域要素 Ω_e に関してのみ Ω_e を細分化することとした。すなわち、図 11(a), (b) にその一例を示すとおり、 $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ ならびに $(\xi - \xi_0) = (\eta - \eta_0)$ の関数の対称性を考慮した領域の分割を行い、積分方程式を

$$\int_{\Omega_e} \mu \theta U_{m,k,k}^* d\Omega = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_{en}} \mu \theta U_{m,k,k}^* d\Omega \quad \dots\dots\dots (9)$$

と書き直した後、同式を Gauss 積分することとした。ここに、 N は細分化された要素の総数を表す。

図 11(b) に示した領域の分割法に従い、 $y=0.5$ mm, $\Delta x=0.125$ mm の位置にある内点での変位、ならびにひずみの y 軸方向分布を求めると、図 12 に○印で示す結果を得る。縦、横軸は図 8 に示したそれと同一、比較のため図 8 △印の結果を実線で付記してい

図 11 領域要素の細分化

図 12 式(9), (10)の方法により求めた内点での変位、ひずみの分布

る。ただし細分化された領域に関する数値積分には8次、それ以外の領域に関しては16次のGauss積分を用いている。同図に示した結果からも明らかなように、被積分関数の対称性を考慮した積分領域の細分化は、解の高精度化に極めて有効である。しかし積分区間の細分化に伴う演算時間の増加は顕著であり、図11(b)の分割に従う限り、あまり効率のよい手法であるとは言い難い。特に内点が隣接する領域要素に近接している場合には、内点を含む領域要素 Q_e だけでなく、 Q_e に隣接する領域要素についても細分化の必要があり、求解の高速化はあまり期待できない。

そこで有限要素法の場合と同様、領域要素内での変位場を、

$$U_i = \sum_{n=1}^4 \phi_n U_n^i \dots\dots\dots (10)$$

と線形近似し、内点での変位ならびにひずみを求めることとした。これは領域要素の形状を前もって正方形とすれば、少なくとも領域要素を構成する内点での解の精度は保証されることに着目した方法であり、領域要素の形状が正方形であることを前提としている。式(10)の方法により求めた内点でのY軸方向変位、ならびにひずみの分布を図12にロ印で示している。簡便法であるにもかかわらず、変位ならびにひずみとも高精度な解が得られている。また式(10)の方法によれば、領域要素を構成する内点をのぞく他の内点での変位やひずみの算出に際し、Gauss積分のような繰返し計算を全く必要としないため、式(9)の場合に比べ大幅な演算時間の短縮化が可能となる。

4. 結 言

他の離散化解析法と同様、境界要素法に関する求解の精度や効率、離散化された積分方程式の積分方法に依存する。特に被積分関数が特異となる場合、内点での変位やひずみの算出に際しては数値積分に際し特別の工夫を必要とする。上記の観点により、本論文では平面弾性ならびに熱弾性境界要素法を例にとり、内点での解析精度に関する高能率・高精度化に関する

考察を試みた。その結果、

(1) 二重指数関数形の特異積分公式は、上記の特異関数の数値積分に極めて有効である。特に、刻み幅を小さくするにつれ解析精度は向上する。しかし、刻み幅の減少に伴い、演算効率は極端に低下する。

(2) 積分区間内での関数の正負の対称性を打消するような積分区間の細分化を行った後、高次のGauss-Legendre公式を用いる本論文の手法によれば、領域分割を行わない場合に比べ、1.4倍程度の演算時間の増加は免れないが、高精度の解を得ることが可能である。

(3) 上記の手法は、内点から境界要素までの垂直距離を h 、要素長さを l とする時、 $h/l \geq 0.1$ の範囲内にある内点に対し有効に適用される。なお、要素長さ l に対し、 $h/l < 0.1$ の範囲内にある内点に関しては、 $h/l' \geq 0.1$ となるよう要素長さ l' を決定し直すことにより本論文の手法が適用される。

(4) 有限要素法の場合と同様、領域要素内での変位を補間することにより、内点での変位やひずみを求める手法によれば、数値積分に伴う繰返し計算を全く必要としない。したがって、補間のピボットに用いる内点での値が高精度に得られている場合については、有効に適用し得る。

等の点が明らかとなった。本論文をとりまとめるにあたっては、大堀真敬助手および山田直志氏の助力を得た。両氏のご好意に感謝する。なお本研究は一部科学研究費58420022, 58750078によって行われたことを記し、関係各位に深謝する。

文 献

- (1) Higashimachi, T. ほか・4名, (Brebbia, C. A. ほか2名編), *Boundary Elements*, (1983), 847, Springer-Verlag.
- (2) 仙波・ほか2名, 生産研究, 35-8 (昭58), 21.
- (3) 鷲津・ほか2名, 境界要素法-基礎と応用, (昭57), 137, 丸善.
- (4) Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, (1978), Pentech Press; 神谷・ほか2名共訳, 境界要素法入門, (昭55), 培風館.
- (5) 森, 数値積分, (昭56), 情報処理センター.

討 論

〔質問〕 田中正隆〔信州大学工学部〕

(1) 弾性および熱弾性問題の境界要素解析では、表面上の変位と表面力(トラクション)が簡単に求められるが、応力値やひずみ値は積分方程式による数値計算では精度よく求められない。このため、差分法を

併用した方法により近似計算を行っているのが現状である。本論文で考察している方法によれば、境界表面の応力(またはひずみ)値も精度よく計算できるのか。

(2) 正方形板の問題を例に取り上げたのは、かど点での処理の正当性を示すことも目的の一つであると

推察する。かど点近傍の内点では数値解はどのような挙動を示すのかご教示願いたい。

(3) 境界近傍の変位やひずみ値を積分方程式により精度よく求めるために、薦ら(付1)は別法を提案している。この方法では、数値積分について特別な工夫を行うことなく妥当な計算結果が得られるので、工学的に極めて有用であると考えられる。薦らの方法について著者らの見解を伺いたい。

(4) 熱弾性問題の例は定常熱伝導状態にあり、温度に関連した領域積分は容易に境界積分に変換しうる。これを行うことなく数値計算を行い計算精度を比較検討されている理由をお聞きしたい。

〔回答〕 (1) 内点での変位や応力(ひずみ)を求めるにあたり、被積分関数の対称性を考慮した積分区間の分割を行った後に数値積分を行う本論文の手法は、論文中 2387 ページ左欄 19 行めにも明記したとおり、内点と対向する境界要素の長さを l 、内点から境界要素までの垂直距離を h とする時、 $0.1 < h/l < 1$ の範囲内にある内点に関してのみ有効に適用される。したがって、 $h/l=0$ となる境界上の任意の点に対し本論文の手法を適用したとしても、高精度の解を得ることは期待できない。むしろこのような場合には、境界要素節点での変位を求めた後、境界積分方程式の離散化に際して用いる変位の近似式 $U = \Phi U_i$ (例えば線形要素の場合 $i=1, 2$) をもとにひずみを求め、それを構成式に代入して応力を求めるのが有効であると考えている。

(2) かど点で境界処理を行うことの効果は、離散化された境界積分方程式を解いて得られる、境界要素節点での解の精度にただちに反映される。例えば単軸伸張変形を受ける 5×5 mm の正方形板を想定した場合、 $y=5$ mm の境界上にある要素節点での y 軸方向変位 $(u_y)_{y=5}$ に関する解の精度は、境界処理を行うことにより付図 1 に白印で示したとおり向上する。すなわちかど点における境界処理の有効性は、境界要素節点での解析精度に着目することにより検証される。一方本論文で取り上げた内点に関する解の精度は、この境界要素節点での解の精度だけでなく、数値積分の精度にも依存し変化する。したがって本論文では、境界処理を行い要素節点での解の精度を確保した上で、数値積分の精度の向上に関する考察を試みている次第である。

(3) 江澤ら(付2)は内点での c^i の値を一義的に 1 とせず、剛体変位条件より c^i の値を求めようとする薦らの手法を引用し、特異積分公式を用いた場合に得られる結果との比較を示している。それによると薦ら

の手法を用いた場合、境界に極めて近接した内点 ($h/l=1/25$) に関しては、変位で最大 1.5% 程度の誤差が生じており、必ずしも高精度な結果は得られていないようである。また厳密には c^i のもつ物理的意味も不明りようである。しかしながら薦らの手法によれば、特殊な数値積分や積分領域の細分化を行わないため、江澤らや本論文の手法に比べ大幅な演算時間の短縮化が期待される。したがって本来対象となる工学上の問題が、特に境界に極めて近接した内点での解析精度を必要としないものであれば、極めて有効に適用される手法であると考えている。

(4) ご指摘のとおり、本論文で対象とした問題に限定すれば、温度の上昇が面内で一様であることから、領域に関する積分項は容易に、

$$\int_{\Omega_e} \mu \theta u_{m\kappa, \kappa}^* d\Omega = \mu \int_{\Gamma_e} \theta u_{m\kappa}^* n_{\kappa} d\Gamma \quad \cdots \cdots (i)$$

と境界に関する積分項に変換される。また非定常問題との連成を考えたとしても、同式は

$$\int_{\Omega_e} \mu \theta u_{m\kappa, \kappa}^* d\Omega = \mu \int_{\Gamma_e} \theta u_{m\kappa}^* n_{\kappa} d\Gamma - \mu \int_{\Omega_e} \theta_{, \kappa} u_{m\kappa}^* d\Omega \quad \cdots \cdots (ii)$$

と部分積分され、領域積分に対する取扱いは式(9)をいわば強引に数値積分する本論文の手法に比べるとはるかに簡単になる。一方実験的な手段でしか非定常な温度の変化が求められないような場合には、式(9)を直接解かざるをえない。このような場合を想定し、本論文では式(9)を直接数値積分することとした。

〔質問〕 村 上 敬 宜〔九州大学工学部〕

本論文ではいくつかの方法が検討および提案されているが一般に応力の値を知りたい切欠底などに本論文で提案された手法は変更なく容易に適用できるか。

〔回答〕 切欠きまたはき裂先端部における応力集中問題の境界要素解析には、しばしば有限要素法と類似の特異要素が用いられている。すなわちき裂先端部からの距離を r とするとき、変位に対しては $\sqrt{r}$ 、応

付図 1 表面変位にみられる境界処理の効果

力に関しては $1/\sqrt{r}$ の変化を有するような境界要素が考案され、その有用性が確かめられている。しかしこのような特異要素を用いたとしても、離散化すべき境界積分方程式の形は基本的に式(3)のそれとなんら異なるものではない。したがって本論文で示した、内点での解析精度の高精度化に関する手法は、ご指摘のような場合にも応用されるものと考えている。

〔質問〕 平松 力〔福井大学工学部〕

貴論文の特異積分と岡本らの double exponential formula による積分とを精度と計算時間の点から比較して示されたい。

〔回答〕 平面弾性 BEM を例にとると、図 2 に○

印で示した従来の手法を用いた場合に要する演算時間は、FACOM M-180 AD にて 17 s、図 5 に□印で示した式(7)の方法によれば 90 s、図 7 に△印で示した式(8)の方法によれば 24 s、図 12 に□印で示した式(9)の方法によれば 8 s であった。したがって本論文 中 2389 ページ右欄 18 行め以下にも明記しているとおり、領域要素を構成する内点に関してのみ式(8)の手法を適用し、他の領域要素内にある内点に関しては、式(9)の手法を用いることにより高精度の解を効率よく得ることが可能であると考えている。

(付 1) 葛・山地, 機講論, No.800-10(昭 55-10), 104.

(付 2) 江澤・ほか 3 名, 機講論, No. 830-1(昭 58-1), 4.

51 巻 468 号, A 編 (昭 60-8) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
横堀 寿光 ほか	1997 2001	図 5 左	図説 下 11	動的取扱 $0.2 = s = x/d < 0.8$	静的取扱 $0.2 < s = x/d < 0.8$