多軸応力下でのセラミックスの信頼性解析に関する研究*
(第 2 報, 3 母数ワイブル分布の適用の検討)

市 川 昌 弘**

On Reliability Analysis of Ceramics under Multi-Axial Stress States
(2nd Report; Examination of Application of Three-Parameter Weibull Distributions)

by Masahiro ICHIKAWA

With respect to the application of the three-parameter Weibull distribution to the reliability analysis of ceramics under multi-axial stress states, the following two fundamental problems are studied theoretically; (1) whether the three-parameter Weibull distribution function holds through various different stress states without contradiction, and (2) whether the shape parameter (Weibull modulus) takes the same value independent of the stress states even if the three-parameter Weibull distribution function holds through various stress states without contradiction. Assuming that fracture strength under the equi-triaxial stress state follows a three-parameter Weibull distribution, it is shown that the same type of distributions can be derived for the uniaxial stress state and the equi-biaxial stress state. However, the shape parameter takes different values depending on the stress state. The location parameter is the same independent of the stress state.

Key Words: Fracture, Strength, Ceramics, Multi-Axial Stress State, Reliability, Three-Parameter Weibull Distribution, Shape Parameter

1. 緒 言

セラミックスの強度の信頼性に関しては、曲げ試験データにワイブル統計を適用するという手法が現在広く用いられているが、実際の機械部品や構造部材は多軸応力状態で使用されることが多いから、曲げのような一軸応力下での情報から多軸応力下での信頼性を予測することが必要になる。しかし多軸応力状態へのワイブル分布の適用については、未解明の問題が残されている。著者は前報で 2 母数ワイブル分布を多軸応力状態に適用する場合について検討した⁽¹⁾。本報では 3 母数ワイブル分布を適用する場合について検討する。

多軸応力状態に対する 3 母数ワイブル分布の適用については、第一にこの分布関数が種々の異なる応力状態下で矛盾なく成立するのか、すなわちある応力状態下での強度分布が 3 母数ワイブル分布に従うと仮定したとき他の応力状態に対してもこの分布形が理論的に導き出せるのか、という根本的な問題が解明されていない。第二に、仮に矛盾なく成立するとしても形状母数 (ワイブル係数) の値が応力状態によって異なるの

ではないかという問題がある。本報では以上の二つの問題について理論的解明を試みる。

2. 従来の研究の検討

主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とし、 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ で応力状態を表すものとする。Oh, Vardar, Finnie⁽²⁾は 1973 年に興味ある速報を発表した。彼らはだ円形欠陥が材料内に不規則分布し、そのいずれかにおける接線方向応力が限界値に達した時破壊が起こるというモデルを考え、二軸均等引張り $(\sigma, \sigma, 0)$ の下での強度分布が 3 母数ワイブル分布に従うと仮定した。そしてこの仮定の下で、一軸引張り $(\sigma, 0, 0)$ と二軸不均等引張り $(\sigma, 2\sigma, 0)$ での強度分布を数値計算により求めた。それによると強度の分布形は 3 母数ワイブル分布となるが、形状母数は二軸均等引張りの場合を 2.20 とした時、一軸引張りでは 2.62, 二軸不均等引張りでは 2.67 となった。ただし以上の結果は数値計算と図式解法によっており、その精度には疑問があると指摘⁽³⁾されている。さらにもう一つの問題はこの速報の連名者である Vardar-Finnie⁽⁴⁾がその後逆の趣旨の論文を発表していることである。すなわち、この論文で彼らは次のような議論を展開している。いま材料内にき裂が不規則分布しているとする。一軸引張り $(\sigma_1, 0, 0)$ に対する 3

* 昭和 59 年 11 月 30 日 第 929 回講演会において講演、原稿受付 昭和 59 年 4 月 24 日。

** 正員、電気通信大学 (〒182 調布市調布ヶ丘 1-5-1)。

母数ワイブル分布関数 $F(\sigma)$ を

$$F(\sigma_1) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_u}{\beta} \right)^m \right] \dots\dots\dots (1)$$

とする。き裂伝ば (不安定成長開始) にはき裂面に垂直な応力成分 σ_n (後述の式(6)と図1参照) だけが効くと仮定し、一般の三軸応力状態 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) に対し式(1)を次のように拡張する。

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1 - \exp \left[- K \int \int \int_A (\sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \theta - \sigma_u)^m \times \sin \theta d\theta d\varphi \right] \dots\dots\dots (2)$$

式(2)は式(1)の σ_1 を σ_n で置き換え、き裂の方向のランダム性を考慮したものである。また、係数 K は $\sigma_u = 0$ とした時式(1)と式(2)が両立するように定めるもので、 $K = (2m+1)/(2\pi\beta^m)$ である。式(2)の積分は $\sigma_n \geq 0$ の範囲について行う。さて、式(2)にて $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ とおくと

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[- K \int \int \int_A (\sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sigma_u)^m \times \sin \theta d\theta d\varphi \right] \dots\dots\dots (3)$$

となるが、この式の積分は $(\sigma_1 - \sigma_u)^m$ に比例するという形にならない。すなわち、式(1)と式(3)は連続的につながらない。このことから Vardar-Finnie は 3 母数ワイブル分布を多軸応力の場合に拡張することは困難であると述べている。

一方、松尾⁽⁵⁾は三軸均等引張り (σ, σ, σ) の下で 3 母数ワイブル分布が成立すると仮定して、一軸引張りとは二軸均等引張り下での強度分布を理論的に導いた。き裂伝ば条件としては、 σ_n だけで規定される場合と $\sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$ によって規定される場合を考えた。ここで τ_n はき裂面に平行なせん断応力である。この結果をみると、いずれの場合も強度分布はワイブル分布の形となっていない。類似の計算は Evans⁽⁶⁾ や Batdorf ら⁽⁷⁾ によっても行われているが、これらの結果も一般にワイブル分布の形になっていない。

以上のように、3 母数ワイブル分布が種々の応力状態を通じて矛盾なく成立するか否かについては、否定的な研究結果が多い。しかしここで注意すべきことは、これらの研究ではき裂数が多い場合に現れる極値の漸近分布の性質が考慮されていないことである。次章で示すように、この点に着眼すれば結論は異なったものとなる。

3. 理論解析

3・1 破壊モデル セラミックスの試験片を考え

る。応力分布は一様とする。次の前提の下に理論解析をすすめる。

(1) 試験片は寸法や方向の異なる多数の欠陥を含み、試験片の強度は最弱欠陥によって決まる。なお、欠陥同士の相互干渉は無視できるものとする。

(2) 欠陥としては円板状の内部き裂を考える。

(3) き裂の方向 (き裂面の法線方向) はすべての方向に等確率である。

(4) き裂の伝ば条件 (不安定成長開始条件) としては、次の式(4)または式(5)を仮定する。

$$\sigma_n \geq \sigma_{cr} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \geq \sigma_{cr} \dots\dots\dots (5)$$

(5) 試験片の強度は三軸均等引張り下で 3 母数ワイブル分布に従う。

仮定(1)~(3)はセラミックスの強度の理論的取扱いは一般に広く用いられているものである。仮定(4)は後述のように、混合モードき裂に対する破壊力学的仮定から導かれる。ただし混合モードき裂の問題は現在まだ十分解明されていないので、破壊力学的仮定としては既往の研究^{(5)~(7)}で用いられているのと同様の仮定を用いた。仮定(5)も既往の研究⁽⁵⁾⁽⁶⁾に従ったものである。これは三軸均等引張り下ではどの方向のき裂も同じ力学的条件下におかれるので、この場合を基準にとったものである。以上のように本破壊モデルは、セラミックスの静的破壊に対し現状で考え得るモデルとしては一般に容認され得るものと思われる。なお仮定(5)を変えた場合は 4 章でふれる。

式(4)、(5)の σ_n と τ_n はき裂面に垂直な応力成分とき裂面に平行なせん断応力であり、図1のようにき裂の中心を原点として主応力軸をとり、き裂面の法線方向を (θ, φ) で表すと次式で与えられる。

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \theta \dots\dots\dots (6)$$

$$\tau_n = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi]^{1/2} \dots\dots (7)$$

また式(4)、(5)の σ_{cr} はき裂伝ばに必要な σ_n または $(\sigma_n^2 + \tau_n^2)^{1/2}$ の限界値であり、その物理的内容は次のとおりである。いま図2の円板状内部き裂の P 点におけるモード I、II、III に対する応力拡大係数を K_I, K_{II}, K_{III} とすると

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma_n \sqrt{\pi a} \dots\dots\dots (8)$$

$$K_{II} = \frac{4 \cos \alpha}{\pi(2-\nu)} \tau_n \sqrt{\pi a} \dots\dots\dots (9)$$

$$K_{III} = \frac{4(1-\nu)\sin\alpha}{\pi(2-\nu)} \tau_n \sqrt{\pi a} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 a はき裂半径、 ν はポアソン比である。いま

$$K_I \geq K_{Ic} \quad \dots\dots\dots (11)$$

なるき裂伝ば条件を考えると、式(8)、(11)より

$$\sigma_n \geq (\pi K_{Ic}^2 / 4a)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。 K_{Ic} は平面ひずみ破壊じん性である。式(12)の右辺を σ_{cr} とすれば式(4)が得られる。次に式(5)は次のようにして得られる。き裂伝ばはき裂面と同一平面内に生じ、エネルギー解放率がある限界値 G_c に達すると伝ばが起こるという条件⁽⁶⁾を考えると、これは次式で表される。

$$\frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \geq G_c \quad \dots\dots\dots (13)$$

E はヤング係数である。式(8)～(10)を上式に代入して

$$\sigma_n^2 + \frac{4\tau_n^2}{(2-\nu)^2} \geq \frac{\pi E G_c}{4(1-\nu^2)a} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)にて $\nu=0$ とすると次式が得られる。

$$\sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \geq \sqrt{\pi E G_c / 4a} \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式の右辺を σ_{cr} とおけば式(5)が得られる。 $\nu=0$ としたのは強度分布の解析的導出を可能ならしめ、本論文で取り上げた問題に対し明確な結論を得るためである。なお、式(4)は Batdorf⁽⁷⁾や松尾⁽⁵⁾により、また式(5)は松尾⁽⁵⁾により用いられている。

以上からわかるように、式(4)、(5)の σ_{cr} はき裂半径 a と破壊じん性の関数である。 a は確率変数であ

るから、破壊じん性の確率的変動を考慮するか否かにかかわらず、 σ_{cr} は確率変数となる。 σ_{cr} の分布関数を $G(\sigma_{cr})$ と表すことにする。

以下では Evans⁽⁸⁾や松尾⁽⁵⁾と同様に、三軸均等引張りの場合に3母数ワイブル分布が成立すると仮定して、一軸引張りとは二軸均等引張りとの下の強度分布を理論的に導く。なお、2母数ワイブル分布の場合にはき裂伝ば条件の具体的な形を仮定せず、また任意の応力状態を対象として一般的な議論を展開できるが⁽¹⁾、3母数の場合にはそうした一般的議論は困難なので、上記のようにき裂伝ば条件を仮定し、また典型的な応力状態を対象として解析をすすめる。

3・2 強度分布の理論計算(き裂伝ば条件を $\sigma_n \geq \sigma_{cr}$ とした場合)

3・2・1 三軸均等引張りの場合 図1において、 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma, \sigma, \sigma)$ とする。式(6)より

$$\sigma_n = \sigma \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。破壊強度の分布関数を $F(\sigma)$ とする。三軸均等引張りに対し3母数ワイブル分布が成立するという前提より、 $F(\sigma)$ は次式で表される。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\beta} \right)^m \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

m は形状母数、 β は尺度母数、 σ_u は位置母数である。き裂伝ば条件 $\sigma_n \geq \sigma_{cr}$ における σ_{cr} は前述のように確率変数である。式(17)が成り立つためには σ_{cr} の分布関数 $G(\sigma_{cr})$ がなんらかの条件を満たす必要がある。本項ではその条件を明らかにする。

いま、き裂を1個だけ含む仮想試験片を考え、その強度の分布関数を $F_1(\sigma)$ とする。き裂の方向が (θ, φ) であるという条件の下でのこの仮想試験片の破壊確率は次式で与えられる。

$$P_r(\sigma_{cr} < \sigma_n(\theta, \varphi)) = P_r(\sigma_{cr} < \sigma) = G(\sigma) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで $P_r(\quad)$ はかつこ内の事象の起こる確率を表す。 $F_1(\sigma)$ は式(18)の確率を θ, φ について積分すれば求まる。図1にてき裂中心を中心とする球面を考えると、き裂の方向の等確率性の仮定により、き裂面の法線と球面との交点は球面上に一様分布する。法線が $(\theta, \theta + d\theta), (\varphi, \varphi + d\varphi)$ の範囲にある確率は $\sin\theta d\theta d\varphi / 4\pi$ である。よって $F_1(\sigma)$ は

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} G(\sigma) d\varphi = G(\sigma) \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式より、 σ_{cr} の分布関数 $G(\sigma_{cr})$ は $F_1(\sigma)$ と同じ形をもつことがわかる。次に、多数のき裂(個数を n とする)を含む実際の試験片の強度の分布関数を $F(\sigma)$

図1 円板状き裂の方向の表示

図2 円板状き裂の応力拡大係数

とすると、最弱リンクの仮定(前提(1))より次式が成り立つ。

$$F(\sigma) = 1 - [1 - F_1(\sigma)]^n \quad \dots\dots\dots (20)$$

極値統計学⁽⁸⁾によれば、 n が大きい時 $F(\sigma)$ が式(17)の形をとるためには、 $F_1(\sigma)$ はその左すそ野 ($\sigma = \sigma_u$ の近傍) で次の形をもたねばならない。

$$F_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\beta_1} \right)^m \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで β_1 は式(17)の β とは異なる定数である。しかるに式(19)に示したように $G(\sigma) = F_1(\sigma)$ であるから、 $G(\sigma_{cr})$ は $\sigma_{cr} = \sigma_u$ の近傍で次式の形をもたねばならない。

$$G(\sigma_{cr}) = \left(\frac{\sigma_{cr} - \sigma_u}{\beta_1} \right)^m \quad \dots\dots\dots (22)$$

以上により、三軸均等引張りに対して3母数ワイブル分布が成立するために σ_{cr} の分布が満足すべき条件が明らかにされた。なお、式(22)は σ_{cr} の分布の左すそ野において満足されればよいことに注意を要する。以下では式(22)を用いて一軸引張りとは二軸均等引張りにおける強度分布を理論的に求める。

3・2・2 一軸引張りの場合 図1にて $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, \sigma)$ とする。式(6)より

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots (23)$$

き裂を1個だけ含む仮想試験片の強度の分布関数を $F_1(\sigma)$ とする。き裂の方位が (θ, φ) であるという条件下でのこの仮想試験片の破壊確率は

$$\begin{aligned} P_r(\sigma_{cr} < \sigma_n(\theta, \varphi)) &= P_r(\sigma_{cr} < \sigma \cos^2 \theta) \\ &= G(\sigma \cos^2 \theta) \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

であり、 $G(\sigma_{cr})$ はその左すそ野で式(22)の形をもつから、 $F_1(\sigma)$ は $\sigma = \sigma_u$ の近傍では次のようになる。

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \frac{1}{4\pi} \iint_A G(\sigma \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_A \left(\frac{\sigma \cos^2 \theta - \sigma_u}{\beta_1} \right)^m \sin \theta d\theta d\varphi \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

積分は $\sigma \cos^2 \theta \geq \sigma_u$ の範囲について行う。よって

$$F_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \int_0^{\cos^{-1}\sqrt{\lambda}} (\cos^2 \theta - \lambda)^m \sin \theta d\theta \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\lambda = \sigma_u / \sigma$$

$y = \cos^2 \theta - \lambda$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \int_0^{1-\lambda} \frac{y^m}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{y}{\lambda} \right)^{-1/2} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \int_0^{1-\lambda} \left(y^m - \frac{y^{m+1}}{2\lambda} + \dots \right) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \left[\frac{(1-\lambda)^{m+1}}{m+1} + O\{(1-\lambda)^{m+2}\} \right] \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

上式は $\sigma = \sigma_u$ の近傍に対するものであることに留意すると、 $F_1(\sigma)$ はその左すそ野では結局次式のように表されることがわかる。

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{2(m+1)} \frac{(\sigma - \sigma_u)^{m+1}}{\beta_1^m \sigma_u} \quad \dots\dots\dots (28)$$

すなわち、 $F_1(\sigma)$ はその左すそ野では $F_1(\sigma) \propto (\sigma - \sigma_u)^{m+1}$ の形をもつ。多数のき裂を含む実際の試験片の強度の分布関数 $F(\sigma)$ は $F_1(\sigma)$ の漸近分布であるから、極値統計学⁽⁸⁾により $F(\sigma)$ は3母数ワイブル分布となり、その形状母数は $m+1$ 、位置母数は σ_u で与えられることがわかる。

3・2・3 二軸均等引張りの場合 図1において $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma, \sigma, 0)$ とする。式(6)より

$$\sigma_n = \sigma \sin^2 \theta \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって、き裂を1個だけ含む仮想試験片の強度の分布関数 $F_1(\sigma)$ は $\sigma = \sigma_u$ の近傍では次のように書ける。

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \frac{1}{4\pi} \iint_A G(\sigma \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_A \left(\frac{\sigma \sin^2 \theta - \sigma_u}{\beta_1} \right)^m \sin \theta d\theta d\varphi \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

積分は $\sigma \sin^2 \theta \geq \sigma_u$ の範囲について行う。よって

$$F_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \int_{\sin^{-1}\sqrt{\lambda}}^{\pi/2} (\sin^2 \theta - \lambda)^m \sin \theta d\theta \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\lambda = \sigma_u / \sigma$$

$y = \sin^2 \theta$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \int_{\lambda}^1 \frac{(y-\lambda)^m}{\sqrt{1-y}} dy \\ &= \frac{1}{2} B\left(m+1, 1/2\right) \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m (1-\lambda)^{m+(1/2)} \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ここで $B(m+1, 1/2)$ はベータ関数である。上式は $\sigma = \sigma_u$ の近傍に対する式であることに留意すると、 $F_1(\sigma)$ は結局次のように表される。

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{2} B\left(m+1, \frac{1}{2}\right) \frac{(\sigma - \sigma_u)^{m+(1/2)}}{\beta_1^m \sqrt{\sigma_u}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

上式より $F_1(\sigma)$ はその左すそ野では $F_1(\sigma) \propto (\sigma - \sigma_u)^{m+(1/2)}$ の形をもつ。したがって、多数のき裂を含む実際の試験片の強度分布は $F_1(\sigma)$ の漸近分布であり、形状母数が $m+1/2$ 、位置母数が σ_u の3母数ワイブル分布となることが極値統計学からわかる。

3・3 強度分布の理論計算 (き裂伝ば条件を $\sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \geq \sigma_{cr}$ とした場合)

3・3・1 三軸均等引張りの場合 図1において

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma, \sigma, \sigma)$ の場合には, σ_n と τ_n は式(6), (7)より

$$\sigma_n = \sigma, \quad \tau_n = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

となるから, $\sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \equiv \sigma_{eq}$ と表すと

$$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} = \sigma \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる。 σ_{eq} は等価垂直応力とよばれている⁽⁵⁾。き裂を1個だけ含む試験片の強度の分布関数 $F_1(\sigma)$ は

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} P_r(\sigma_{cr} < \sigma_{eq}(\theta, \varphi)) d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} P_r(\sigma_{cr} < \sigma) d\varphi \\ &= P_r(\sigma_{cr} < \sigma) = G(\sigma) \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる。したがって, 以下3・2・1項と同様の議論により, 三軸均等引張りの下での強度分布が式(17)の3母数ワイブル分布に従うためには, σ_{cr} の分布関数 $G(\sigma_{cr})$ はその左すそ野 ($\sigma = \sigma_u$ の近傍) で式(22)の形をもたねばならないことがわかる。そこで次に式(22)を用いて一軸引張りとは二軸均等引張りに対する強度分布を計算する。

3・3・2 一軸引張りの場合 図1にて $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, \sigma)$ とする。式(6), (7)より

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \theta, \quad \tau_n = \sigma \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots\dots (37)$$

したがって σ_{eq} は次のようになる。

$$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} = \sigma |\cos \theta| \quad \dots\dots\dots (38)$$

き裂を1個だけ含む仮想試験片の強度の分布関数 $F_1(\sigma)$ は, $\sigma = \sigma_u$ の近傍では次のように計算される。

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left(\frac{\sigma |\cos \theta| - \sigma_u}{\beta_1} \right)^m \sin \theta d\theta d\varphi \quad \dots\dots\dots (39)$$

積分は $\sigma |\cos \theta| \geq \sigma_u$ の範囲について行う。よって

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \int_0^{\cos^{-1}\lambda} (\cos \theta - \lambda)^m \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m (1-\lambda)^{m+1} \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$\lambda = \sigma_u / \sigma$$

上式は $\sigma = \sigma_u$ の近傍に対する式であるから, 結局

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{m+1} \frac{(\sigma - \sigma_u)^{m+1}}{\beta_1^m \sigma_u} \quad \dots\dots\dots (41)$$

となって, $F_1(\sigma)$ はその左すそ野にて $F_1(\sigma) \propto (\sigma - \sigma_u)^{m+1}$ の形をもつことがわかる。多数のき裂を含む実際の試験片の強度分布は $F_1(\sigma)$ の漸近分布であるから, 形状母数が $m+1$, 位置母数が σ_u の3母数ワイブル分布となることが極値統計学からわかる。この結果はき裂伝ば条件として $\sigma_n \geq \sigma_{cr}$ を仮定した3・2・2項の結果と同じである。

3・3・3 二軸均等引張りの場合 図1において $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma, \sigma, 0)$ とおく。この場合は

$$\sigma_n = \sigma \sin^2 \theta, \quad \tau_n = \sigma \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots\dots (42)$$

であるから

$$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} = \sigma \sin \theta \quad \dots\dots\dots (43)$$

となる。したがって, き裂を1個分だけ含む仮想試験片の強度の分布関数 $F_1(\sigma)$ は, $\sigma = \sigma_u$ の近傍に対しては式(22)を用いて次のように計算される。

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left(\frac{\sigma \sin \theta - \sigma_u}{\beta_1} \right)^m \sin \theta d\theta d\varphi \quad \dots\dots\dots (44)$$

積分は $\sigma \sin \theta \geq \sigma_u$ の範囲について行う。よって

$$F_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \int_{\sin^{-1}\lambda}^{\pi/2} (\sin \theta - \lambda)^m \sin \theta d\theta \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$\lambda = \sigma_u / \sigma$$

いま, $y = (\sin \theta - \lambda) / (1 - \lambda)$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m (1-\lambda)^{m+(1/2)} (1+\lambda)^{-1/2} \\ &\quad \times \int_0^1 y^m [\lambda + (1-\lambda)y] (1-y)^{-1/2} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} y \right)^{-1/2} dy \\ &= \left(\frac{\sigma}{\beta_1} \right)^m \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} [\lambda(1-\lambda)^{m+(1/2)} I_1 \\ &\quad + (1-\lambda)^{m+(3/2)} I_2] \quad \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

ここで I_1 と I_2 は次式の積分である。

$$I_1 = \int_0^1 y^m (1-y)^{-1/2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} y \right)^{-1/2} dy \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$I_2 = \int_0^1 y^{m+1} (1-y)^{-1/2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} y \right)^{-1/2} dy \quad \dots\dots\dots (48)$$

しかるに

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 y^m (1-y)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} y + \dots \right) dy \\ &= B(m+1, 1/2) + O(1-\lambda) \quad \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 y^{m+1} (1-y)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} y + \dots \right) dy \\ &= B(m+2, 1/2) + O(1-\lambda) \quad \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

式(49), (50)を式(46)に代入し, 式(46)は $\sigma = \sigma_u$ の近傍に対する式であることに留意すると, $F_1(\sigma)$ は結局次のように表される。

$$F_1(\sigma) = \frac{B(m+1, 1/2)}{\sqrt{2}} \frac{(\sigma - \sigma_u)^{m+(1/2)}}{\beta_1^m \sqrt{\sigma_u}} \quad \dots\dots\dots (51)$$

すなわち, $F_1(\sigma)$ はその左すそ野では $F_1(\sigma) \propto (\sigma - \sigma_u)^{m+(1/2)}$ の形をもつ。したがって極値統計学により, 多数のき裂を有する実際の試験片の強度分布は, 形状母数が $m+(1/2)$, 位置母数が σ_u の3母数ワイブル分

表1 応力状態とパラメータの関係

Stress state	Shape parameter	Location parameter
Uniaxial	α	σ_u
Equi-biaxial	$\alpha - 1/2$	σ_u
Equi-triaxial	$\alpha - 1$	σ_u

布となることがわかる。この結果は $\sigma_n \geq \sigma_{cr}$ なるき裂伝ば条件を仮定した 3・2・3 項の結果と同じである。

4. 考 察

4.1 分布形と応力状態 3章で明らかにされたように、三軸均等引張りに対する強度が3母数ワイブル分布に従うならば一軸引張りおよび二軸均等引張りに対する強度も3母数ワイブル分布に従う。これは仮定した二つのき裂伝ば条件のいずれの下でも成立する。2章に述べた Vardar ら⁽⁴⁾、松尾⁽⁵⁾、Batdorf ら⁽⁷⁾、Evans⁽⁶⁾の結果は本報の結果と相違しているが、これはこれらの研究では極値の漸近分布の性質を考慮していないためであると考えられる。き裂を1個だけ含む仮想試験片の強度関数を $F_1(\sigma)$ 、多数のき裂を含む実際の試験片の強度の分布関数を $F(\sigma)$ とする時、 $F(\sigma)$ が3母数ワイブル関数となるためには $F_1(\sigma)$ がその左すそ野においてのみ $\sigma - \sigma_u$ のべき乗の形をとればよいということに留意すれば、本論文のような結果が得られるのである。

次に、三軸均等引張りの下で3母数ワイブル分布が成立すると仮定する代わりに、一軸引張り（または二軸均等引張り）の下で3母数ワイブル分布が成立すると仮定した場合を考えてみる。この場合には式(22)が必要条件であるかどうかは検討を要するが、十分条件であることは3章の議論から明らかである。したがって一軸引張り（または二軸均等引張り）の下で3母数ワイブル分布が成立するということを出発点として、二軸均等引張り（または一軸引張り）および三軸均等引張りの下でも3母数ワイブル分布が成立することを示すこともできる。

4.2 形状母数と応力状態 3章の結果より形状母数と応力状態の関係を整理すると、表1のようになる。ただしこの表では一軸引張りの場合の値を α とし、これを基準にとって示した。位置母数も併記した。このように位置母数の値は応力状態に無関係であるが、形状母数は応力状態によって値が異なり、材料定数とはならない。前報⁽¹⁾で示したように、2母数ワイ

ブル分布の場合には形状母数は応力状態に依存しない。したがって、形状母数(ワイブル係数)と応力状態の関係は2母数の場合と3母数の場合で異なる。なお、表1の結果は3章で仮定した二つのき裂伝ば条件のいずれについても成り立つ。

2章で述べた Oh ら⁽²⁾の研究は、本論文とは破壊モデルの詳細が異なり、また解析の手法によるものではないが、二軸均等引張りに対する形状母数を2.20とした時一軸引張りに対し2.62となり、その差の0.42が本論文による0.5に近い値となっていることは興味深い。

なお、セラミックスの強度分布形としてワイブル分布のほかに二重指数分布を推奨する説もあるが⁽⁹⁾、これについては別に検討したい。

5. 結 論

多軸応力下でのセラミックスの信頼性解析に3母数ワイブル分布を適用する場合の基本的問題について理論的検討を行い、次の結論を得た。

(1) 3母数ワイブル分布が異なる応力状態で矛盾なく成立するか否かについて従来否定的な研究結果が多かったが、本論文の解析により2章の前提の下で3母数ワイブル分布が一軸引張り、二軸均等引張り、三軸均等引張りに対し矛盾なく成立することが明らかにされた。

(2) しかし、形状母数(ワイブル係数)の値は表1に示すように応力状態によって異なる。これは2母数ワイブル分布の形状母数が応力状態に依存しないことと対照的である。なお、位置母数の値は応力状態によらず一定である。

終わりに、本研究に対しご助言をいただいた田中栄学長に深く感謝の意を表する。

文 献

- (1) 市川, 機論, No. 840-10 (昭59-10), 55.
- (2) Oh, K. P. L., ほか2名, *Int. J. Fract.*, 9-3 (1973), R. 372.
- (3) 松尾, 機論, 46-407, A (昭55), 763.
- (4) Vardar, Ö. and Finnie, I., *Int. J. Fract.*, 11-3 (1975), 495.
- (5) 松尾, 機論, 46-411, A (昭55), 1203.
- (6) Evans, A. G., *J. Amer. Ceramic Soc.*, 61-7/8 (1978), 302.
- (7) Batdorf, S. B. and Crose, J. G., *Trans. ASME, Ser. E*, 41-2 (1974), 459.
- (8) Gumbel, E. J., *Statistics of Extremes*, (1958), Columbia Univ. Press.
- (9) 加瀬, セラミックス, 17-7 (昭57), 545.