競合リスク理論に基づく破壊位置の確率論とその応用*

松 尾 陽太郎**, 北 上 浩 一***

On the Statistical Theory of Fractured Location Combined
with Competing Risk Theory and its some Applications

by Yōtarō MATSUO and Koichi KITAKAMI

Finnie et al. developed the statistical theory of fractured location which can estimate not only fracture stress but also fractured location. Some researchers analysed several problems using this theory and proved its validity. However, these studies are restricted to only one kind of fracture origin. In this work we have suggested a new theory combining the competing risk theory with the statistical theory of fractured location. Using this theory we derived the distributions of fractured location, corrected stress (a stress at the location of the fracture origin), the depth of the fracture origin, and the defect size. The fitnesses between the theory and the experimental data were fairly good.

Key Words: Fracture, Statistics, Fractured Location, Competing Risks, Weibull Distribution, Si₃N₄.

1. 緒 言

構造用セラミックスは、種々の優れた性質から新しい素材として注目されている。こうした状況に対応して確率統計論と破壊力学に基づく強度の信頼性解析が盛んに行われるようになった。

中でも Bolotin⁽¹⁾, 著者の一人^{(2)~(5)}, Johnson⁽⁶⁾は多種類の破壊源を持つぜい性材料の強度に関する研究を最弱リンク説に基づいて行ってきた(多重モードワイブル分布を使用)。また、多軸応力状態にも適用できる多軸分布関数も著者の一人^{(3)~(5)}, Batdorf⁽⁷⁾, Evans⁽⁸⁾らによって求められている。さらに著者らは多重モードワイブル分布のパラメータ推定法として競合リスク理論⁽⁹⁾および不完全データ理論⁽¹⁰⁾を導入した多段最尤法を提唱し推定精度の向上を計った⁽¹¹⁾。

一方、Finnie ら⁽¹¹⁾は破壊応力のみならず破壊位置も推定できる理論(位置の確率論と呼ぶ)を提唱しガラス板への鋼球の押し込み問題の解析、ガラス試験片の三点曲げ問題の解析を行っている。また、AOKI ら⁽¹²⁾は破壊応力と破壊位置の分布の時間的变化に関

する解析やガラス平板の三点および四点曲げ遅れ破壊の解析を行っている。しかし破壊源が複数ある場合の位置の確率論についてはまだ研究がなされていない。

本論文では、競合リスク理論と位置の確率論とを結合した理論を新たに提案し、その応用として破壊位置の分布、修正応力(破壊源位置での応力)の分布、破壊源深さの分布、欠陥を円板状き裂と仮定した場合の欠陥寸法の分布を求め、その有効性を明らかにするものである。

2. 理 論 解 析

Finnie による破壊応力と破壊位置に関する理論⁽¹¹⁾を次のように拡張する。すなわち基準応力^{*1} σ_m が $(\sigma_m, \sigma_m + d\sigma_m)$ の間にある物体が領域 A_i における位置 ξ にて破壊する確率は $h_{A_i}(\sigma_m, \xi)$ をその結合密度関数とすると次式のように書き下せる⁽¹¹⁾。

$$h_{A_i}(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m = \exp(-B_i) \frac{\partial}{\partial \sigma_m} (G_i) d\xi d\sigma_m \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで i は破壊源の種類を表し、 A_i は破壊源によって分類された各々の領域を表す。 B_i は破壊源 i による破壊の危険率(ハザード関数)である。破壊源とし

* 昭和 60 年 7 月 11 日 北陸信越支部北陸地方講演会において講演、原稿受付 昭和 59 年 10 月 31 日。

** 正員、東京工業大学(〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*** 学生員、東京工業大学大学院。

*1 基準応力としては通常物体内の最大応力をとる。

て、内部き裂($i=1$)、表面き裂($i=2$)、エッジき裂($i=3$)の3種類を想定すると、ワイブルの一軸分布関数に対する B_i , G_i は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \int_{\xi} G_1 d\xi, \quad G_1 = \left(\frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} Y(\sigma, \sigma_{u1}) \left(\frac{dV}{d\xi} \right) \\ B_2 &= \int_{\xi} G_2 d\xi, \quad G_2 = \left(\frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} Y(\sigma, \sigma_{u2}) \left(\frac{dA}{d\xi} \right) \\ B_3 &= \int_{\xi} G_3 d\xi, \quad G_3 = \left(\frac{\sigma - \sigma_{u3}}{\sigma_{03}} \right)^{m_3} Y(\sigma, \sigma_{u3}) \left(\frac{dL}{d\xi} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで σ は任意点における最大主応力, $m_i, \sigma_{0i}, \sigma_{ui}$ ($i=1\sim3$) はワイブルパラメータ, dV, dA, dL は各々無次元の体積要素, 面積要素, 線素, $Y(\quad)$ はヘビサイドのステップ関数である。また多軸応力状態に適用できる多軸分布関数に対しては, G_i は次式で表される⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{Z - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} Y(Z, \sigma_{u1}) \sin\varphi d\varphi d\theta \left(\frac{dV}{d\xi} \right) \\ G_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{Z^* - \sigma_{u2}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} Y(Z^*, \sigma_{u2}) d\psi \left(\frac{dA}{d\xi} \right) \\ G_3 &= \left(\frac{Z^+ - \sigma_{u3}}{\sigma_{03}} \right)^{m_3} Y(Z^+, \sigma_{u3}) \left(\frac{dL}{d\xi} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで Z, Z^*, Z^+ は等価垂直応力で、想定したき裂の不安定伝ば条件から導かれる応力の次元を持つ量である⁽³⁾。さてここで一般には式(1)で表される個々の結合密度関数 $h_{Ai}(\sigma_m, \xi)$ を用いて破壊位置と破壊応力に関する競合リスク理論を新たに構築しよう。最弱リンク説が成立する時の競合リスク理論⁽⁹⁾(直列モデル)を用いると破壊原因が n 種類ある時の競合リスクに対する密度関数はただちに次式のように定式化できる。

$$h_A(\sigma_m, \xi) = \prod_{i=1}^n R_i(\sigma_m) \times \sum_{j=1}^n \lambda_j \dots\dots\dots (4)$$

ここで R_i は信頼度, λ_j は故障率で各々次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R_i(\sigma_m) &= 1 - \int_0^{\sigma_m} \int_{\xi_i} h_{Ai}(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m \\ \lambda_j &= h_{Aj}(\sigma_m, \xi) / R_j(\sigma_m), \quad A = \sum_{i=1}^n A_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし $\int_{\xi_i}$ は ξ について全領域にわたり積分を実行することを表す。式(4)は応力状態、破壊の種類のいかなを問わず成立する一般式である。最も簡単で重要な例として内部き裂と表面き裂の2種類のみが破壊に関与する場合を想定する。ただし内部き裂に対する領域を D , 表面き裂に対する領域を ∂D で表し、ワイブル分布である式(2)を用いる。式(1), (4), (5)からただちに次式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} h_{\partial D \cup D}(\sigma_m, \xi) &= h_D(\sigma_m, \xi) R_{\partial D}(\sigma_m) + h_{\partial D}(\sigma_m, \xi) R_D(\sigma_m) \\ &= h_D(\sigma_m, \xi) \left\{ 1 - \int_0^{\sigma_m} \int_{\xi_i} h_{\partial D}(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m \right\} \\ &\quad + h_{\partial D}(\sigma_m, \xi) \left\{ 1 - \int_0^{\sigma_m} \int_{\xi_i} h_D(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m \right\} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

次に式(4), (5)を用いて強度に関する周辺分布 $F(\sigma_m)$ を求めてみる。

すると,

$$\begin{aligned} F(\sigma_m) &= \int_0^{\sigma_m} \int_{\xi} h_A(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m = \int_0^{\sigma_m} \int_{\xi} \sum_{j=1}^n \left\{ h_{Aj}(\sigma_m, \xi) \prod_{i \neq j} R_i(\sigma_m) \right\} d\xi d\sigma_m \\ &= \int_0^{\sigma_m} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{d\sigma_m} B_j \right) \exp(-\sum_{i=1}^n B_i) d\sigma_m = 1 - \exp(-\sum_{i=1}^n B_i) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

上式はいわゆる多重モードワイブル分布と正確に一致している。

3. 三点曲げ試験の解析

前章で求めた一般式をセラミックス等ぜい性材料の三点曲げ問題に適用し、その密度関数と分布関数を求める。細長い矩形断面梁が三点曲げ荷重を受ける時(図1参照)材料内の曲げ応力 σ は次式で表される。

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{hL} x(h-y), \sigma_{\max} = \frac{3WL}{4bh^2} \quad (8)$$

ここで座標 x, y の原点は三点曲げの一方の支点とした。 $\sigma_{ui}=0 (i=1\sim 3)$ とし、はり側面からの破壊を無視できるものとする、式(2)、(8)より破壊の危険率 B_i は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= V_{e0} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1}, V_{e0} = \frac{2bLh}{(m_1+1)^2}, B_2 = A_{e0} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \\ A_{e0} &= \frac{2bL}{m_2+1}, B_3 = L_{e0} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{03}} \right)^{m_3}, L_{e0} = \frac{4L}{m_3+1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで V_{e0}, A_{e0}, L_{e0} は各々無次元の有効体積、有効面積、有効長さである。

一軸分布関数を用い、内部、表面の2種類のき裂のみを考慮した場合には、式(6)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} h_{DU\partial D}(\sigma_m, \xi) &= h_D(\sigma_m, \xi) \exp \left\{ -A_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \right\} + h_{\partial D}(\sigma_m, \xi) \exp \left\{ -V_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \right\} \\ h_D(\sigma_m, \xi) &= 2bm_1 \sigma_m^{m_1-1} \left\{ \frac{x(h-y)}{\sigma_{01}Lh} \right\}^{m_1} \exp \left\{ -V_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \right\} \\ h_{\partial D}(\sigma_m, \xi) &= 2bm_2 \sigma_m^{m_2-1} \left(\frac{x}{\sigma_{02}L} \right)^{m_2} \exp \left\{ -A_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \right\}, \sigma_m = \sigma_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

よって結合分布関数は

$$\begin{aligned} H_{DU\partial D}(\sigma_m, \xi) &= \int_0^{\sigma_m} \int_0^{\xi} h_{DU\partial D}(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m \\ &= \left(\frac{x}{L} \right)^{m_1+1} \left\{ 1 - \left(\frac{h-y}{h} \right)^{m_1+1} \right\} \int_0^{\sigma_m} \frac{dB_1}{d\sigma_m} \exp(-B_1-B_2) d\sigma_m \\ &\quad + \left(\frac{x}{L} \right)^{m_2+1} \int_0^{\sigma_m} \frac{dB_2}{d\sigma_m} \exp(-B_1-B_2) d\sigma_m \quad (11) \end{aligned}$$

となる。

4. 窒化珪素の曲げ試験データの解析と考察

解析に用いたデータは伊藤ら⁽¹⁴⁾によって行われた窒化珪素の三点曲げ試験データであって総数415個である。これには破壊位置のデータも含まれており、今回の解析には有効である。また、以下の解析で用いられているワイブルパラメータ $m_i, \sigma_{0i} (i=1, 2)$ の値を表1に示す。これは先に提唱した多段最尤法⁽¹⁵⁾により求めた値である⁽¹⁶⁾。

4.1 破壊位置に関する周辺分布 まず破壊位置 x, y の各々に関する周辺分布 $S_{DU\partial D}(x)$ および $U_{DU\partial D}(y)$ を式(10)の結合密度関数から求めると、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_{DU\partial D}(x) &= \int_0^x \int_0^h \int_0^\infty h_{DU\partial D}(\sigma_m, x, y) d\sigma_m dy dx \\ &= \left(\frac{x}{L} \right)^{m_1+1} \int_0^\infty \frac{dB_1}{d\sigma_m} \exp(-B_1-B_2) d\sigma_m + \left(\frac{x}{L} \right)^{m_2+1} \int_0^\infty \frac{dB_2}{d\sigma_m} \exp(-B_1-B_2) d\sigma_m \\ U_{DU\partial D}(y) &= \int_0^y \int_0^L \int_0^\infty h_{DU\partial D}(\sigma_m, x, y) d\sigma_m dx dy \\ &= \left\{ 1 - \left(\frac{h-y}{h} \right)^{m_1+1} \right\} \int_0^\infty \frac{dB_1}{d\sigma_m} \exp(-B_1-B_2) d\sigma_m + \int_0^\infty \frac{dB_2}{d\sigma_m} \exp(-B_1-B_2) d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また内部破壊のみに関する x の周辺分布 $S_D(x)$ と表面破壊のみに関する x の周辺分布 $S_{\partial D}(x)$ を式(10)の第2、3式から求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} S_D(x) &= \int_0^x \int_0^h \int_0^\infty h_D(\sigma_m, x, y) d\sigma_m dy dx = \left(\frac{x}{L} \right)^{m_1+1}, \\ S_{\partial D}(x) &= \int_0^x \int_0^\infty h_{\partial D}(\sigma_m, x) d\sigma_m dx = \left(\frac{x}{L} \right)^{m_2+1} \quad (13) \end{aligned}$$

ここで上式と式(12)の第1式を比較すると次のことがわかる。内部き裂と表面き裂とを同時に考慮した x に関する周辺分布 $S_{DU\partial D}(x)$ は式(13)に示した $S_D(x)$ と $S_{\partial D}(x)$ に基準応力に関する積分項をそれぞれ掛けて加え合わせた形を取っている。さらにこの積分項は次のような意味を持つ。

$$\int_0^\infty \frac{dB_1}{d\sigma_m} \exp(-B_1-B_2) d\sigma_m$$

は、基準応力 σ_m のみから計算される内部破壊の割合、

$$\int_0^\infty \frac{dB_2}{d\sigma_m} \exp(-B_1 - B_2) d\sigma_m$$

は、基準応力 σ_m のみから計算される表面破壊の割合。つまり式(12)の第1式は、内部破壊と表面破壊に関する混合分布 (mixture) になっていることがわかる。表1のパラメータを用いて $h_{DUBD}(x)$, $h_{DUBD}(y)$, $h_D(x)$, $h_{SD}(x)$ と $h_D(y)$ を数値計算した結果を図2(a), (b)に示す。ここで横軸は各々破壊位置 x, y , 縦軸は確率密度である。図2(a)においては内部破壊と表面破壊の相互作用がみられ, $S_{DUBD}(x)$ について先に述べたことを裏付けている。

内部破壊のみに関する y の周辺分布 $U_D(y)$ を式(10)の第2式から求めると次式となる。

$$U_D(y) = \int_0^y \int_0^L \int_0^\infty h_D(\sigma_m, x, y) d\sigma_m dx dy \\ = 1 - \left(\frac{h-y}{h} \right)^{m_1+1} \dots \dots \dots (14)$$

この y に関する周辺分布 $U_D(y)$ については4.3節で改めて述べる。

式(13)より求めた理論曲線と平均ランク法によりプロットした実験値を図3(a), (b)に示す。理論曲線は実験値と非常によく一致している。このことから、破壊応力が未知でも試験片長手方向(x 方向)についての破壊位置がわかっているならば、ワイブル分布の形状母数は推定可能であることがわかる。

4.2 修正応力 ワイブル確率紙を用いて実験データからワイブル係数を求める際に、修正応力(破壊源位置での応力)を計算してこれをプロットし、それらのデータ点に最良フィットさせるように引いた直線を使用すべきであるとの見解がある。これに対して我々は今回の“破壊応力と破壊位置に関する競合リス

ク理論”を用いて上述の見解が誤りであることを示す。まず初めに式(10)に示された基準応力 σ_m (最大曲げ応力) と破壊位置 ξ に関する結合密度関数を修正応力 σ_c と ξ に関する結合密度関数に変数変換する。変数変換式と積分の変換公式に関するヤコビアンは以下のとおりである。

$h_D(\sigma_m, \xi)$ に対しては、

$$\sigma_m = \frac{Lh}{x(h-y)} \sigma_c \\ |J| = \left| \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_c} \right| = \frac{Lh}{x(h-y)}$$

$h_{SD}(\sigma_m, \xi)$ に対しては、

$$\sigma_m = \frac{L}{x} \sigma_c, |J| = \left| \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_c} \right| = \frac{L}{x} \dots \dots \dots (15)$$

これらを使って、式(10)の第2, 3式について変数変換すると次式となる。

$$h_D(\sigma_c, \xi) = 2bm_1 \sigma_c^{m_1-1} \left(\frac{1}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \\ \times \exp \left[-V_{e0} \left\{ \frac{\sigma_c L h}{\sigma_{01} x (h-y)} \right\}^{m_1} \right] \\ h_{SD}(\sigma_c, \xi) = 2bm_2 \sigma_c^{m_2-1} \left(\frac{1}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \\ \times \exp \left[-A_{e0} \left(\frac{\sigma_c L}{\sigma_{02} x} \right)^{m_2} \right] \dots \dots \dots (16)$$

式(16)から修正応力 σ_c に関する周辺分布を求めると、内部破壊〔図4(a)〕の場合も表面破壊〔図4(b)〕の場合も、なだらかではあるが上に凸の曲線となり、 σ_c が2母数ワイブル分布に従わないことがわかる^{*)2}。従って σ_c がワイブル確率紙上で直線になるとしてワイブル係数を求めることは誤りであることがわかる。さらに、式(10)の第1式に示された $h_{DUBD}(\sigma_m, \xi)$ についても式(15)の変数変換を行うと次のようになる。

$$h_{DUBD}(\sigma_c, \xi) = 2b \left(\frac{m_1}{\sigma_{01}} \right) \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{01}} \right)^{m_1-1} \exp \left[-V_{e0} \left\{ \frac{\sigma_c L h}{\sigma_{01} x (h-y)} \right\}^{m_1} - A_{e0} \left\{ \frac{\sigma_c L h}{\sigma_{02} x (h-y)} \right\}^{m_2} \right] \\ + 2b \left(\frac{m_2}{\sigma_{02}} \right) \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{02}} \right)^{m_2-1} \exp \left[-V_{e0} \left(\frac{\sigma_c L}{\sigma_{01} x} \right)^{m_1} - A_{e0} \left(\frac{\sigma_c L}{\sigma_{02} x} \right)^{m_2} \right] \dots \dots \dots (17)$$

この式(17)から σ_c に関する周辺分布を求めると、図4(a), (b)と同様に上に凸の曲線となる〔図4(c)〕。図4

図1 三点曲げ荷重を受けるはり

表1 ワイブルパラメータ

	$\hat{m}_i$	$\hat{Q}_{0i}$
Inner crack ($i=1$)	15.79	95.99
Surface crack ($i=2$)	12.73	129.5

(a), (b), (c)においては, 同時に最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ に関するデータ点と計算値も載せてある。 $\sigma_{\max}$ の分布に比べて σ_c の分布はより低応力側に位置し, かつその傾きがゆるやかになっている。なお, 実験データは最大曲げ応力, 修正応力ともにジョンソンランク法⁽¹⁷⁾によるものであり, いずれの場合も理論曲線と実験データはよい一致を示している。

4・3 破壊源深さの分布 次に式(16)の第1式, すなわち

$$h_D(\sigma_c, \xi) = 2bm_1\sigma_c^{m_1-1} \left(\frac{1}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \exp \left[-V_{e0} \left\{ \frac{\sigma_c L h}{\sigma_{01} x (h-y)} \right\}^{m_1} \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

から y に関する周辺分布をとれば, 破壊源深さの分布式(14)を得る。図5に破壊源深さ y に関する実験データのヒストグラムと式(14)から計算した理論曲線(実線)を示す。両者は $y=0$ の近傍を除くと非常によく一致している。

4・4 欠陥寸法の分布 式(18)から破壊源における欠陥寸法の分布を求めてみる。欠陥は円板状き裂であって, き裂面は試験片の長手方向と垂直であると仮定する。遠方で一様な垂直応力 σ_c を受ける場合を想定すると次式が成立する。

$$K_{Ic} = \frac{2}{\pi} \sigma_c \sqrt{\pi a} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで K_{Ic} はモード I における破壊じん性値, a は円板状き裂の半径である。さてここで, 実験データとの比較のために式(19)の両辺を $\sqrt{2}$ 倍し, 円板状き裂の直径に関する式を求める。

図2 破壊位置に関する密度関数

図3 破壊位置に関する周辺分布

$$\sqrt{2} K_{Ic} = \frac{2}{\pi} \sigma_c \sqrt{\pi d}, d = 2a \dots \dots \dots (20)$$

式(18)中の σ_c に関して式(20)の変数変換を行うと次式となる。

$$h_D(d, \xi) = b m_1 \left(\frac{K_{Ic} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \sigma_{01}} \right)^{m_1} \cdot d^{-(m_1+2)/2} \cdot \exp \left[-V_{e0} \left\{ \frac{K_{Ic} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \sigma_{01}} \frac{Lh}{x(h-y)\sqrt{d}} \right\}^{m_1} \right] \dots \dots \dots (21)$$

この式からき裂直径 d に関する周辺分布を求めれば、欠陥寸法に関する分布を得る。図6は欠陥寸法 d のヒストグラムであって、 $d = 35 \mu\text{m}$ 付近に最頻値を持つ。これに対して、実線で示した理論曲線は最頻値は一致しているが、分布の幅は狭くなっている。これは、複雑な形状をした欠陥を円板状き裂という単純モデルに置き換えたことによるものと思われる。

5. 結 言

本論文では、多重モードワイブル分布とFinnieらによる位置の確率論とを結合した理論を新たに定式化し、その応用として種々の周辺分布等を計算し、これを用いて伊藤らの行った窒化珪素三点曲げ試験の実験データを解析した結果、以下のことがわかった。

(1) 新たに提唱した理論から試験片の長手方向および厚さ方向における破壊位置の分布関数を求め、実験データと比較した結果、両者はよく一致した。

(2) 修正応力 σ_c に関する周辺分布を求めたところ、2母数ワイブル分布とはならずそのワイブルプロットは上に凸となった。そのため、修正応力を用いてワイブル係数(2母数)を求める方法は誤りであることが明らかとなった。

(3) 欠陥の形状を円板状き裂と仮定して、破壊源の欠陥寸法の分布の解析を行ったところ、最頻値に関してはほぼ実験データと一致した。

終わりに、貴重な実験データの詳細を提供して下さい工業技術院名古屋工業試験所の伊藤正治氏に深く感謝する。

〔付 録〕

一般に、破壊応力(基準応力) σ_m と破壊位置に関する結合密度関数を $h(\sigma_m; x, y, z)$ とすると、基準応力が $(\sigma_m, \sigma_m + d\sigma_m)$ 、位置が $[(x, x+dx), (y, y+dy), (z, z+dz)]$ の範囲で破壊する確率は、式(1)および式(2)の第1式を用いると、下式のように表される〔デカルト座標系 (x, y, z) を採用、位置母数は零とする〕。

$$\begin{aligned} h(\sigma_m; x, y, z) d\sigma_m dx dy dz \\ = \exp \left[- \left\{ \int_V f^m(x, y, z) dx dy dz \right\} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^m \right] \\ \times \left\{ \frac{f(x, y, z)}{\sigma_0} \right\}^m \cdot m \sigma_m^{m-1} \cdot d\sigma_m dx dy dz \end{aligned} \dots \dots \dots (22)$$

ただし、 $\sigma = \sigma_m \cdot f(x, y, z)$ であり、 $f(x, y, z)$ は考えている物体の形状と境界条件によって定まる座標の

図4 最大曲げ応力と修正応力のワイブルプロット(+..... σ_{max} , Δ σ_c)

*2 σ_c に関する周辺分布は、均等引張試験の場合は2母数ワイブル分布と一致するが、応力こう配がある場合にはこれと一致しない(付録1参照)。

図 5 破壊源深さの分布

図 6 欠陥寸法の分布

みの関数である。

式(22)中の σ_m を修正応力 σ_c へ変換すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\sigma_c}{f(x, y, z)}, |J| = \left| \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_c} \right| = \frac{1}{f(x, y, z)} \\ \therefore h(\sigma_c; x, y, z) d\sigma_c dx dy dz &= m \sigma_c^{m-1} \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^m \cdot \exp \left[- \left\{ \int_V f^m(x, y, z) dx dy dz \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{\sigma_c}{\sigma_0 \cdot f(x, y, z)} \right\}^m \right] d\sigma_c dx dy dz \quad \cdots \cdots (23) \end{aligned}$$

上式で、物体の全領域 V に関する積分項を便宜上 V_e と置くと、

$$\begin{aligned} h(\sigma_c; x, y, z) d\sigma_c dx dy dz &= m \sigma_c^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^m \cdot \exp \left[- V_e \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \right. \\ &\quad \times \left. f^{-m}(x, y, z) \right] d\sigma_c dx dy dz \end{aligned}$$

よって、 σ_c に関する周辺分布 $F(\sigma_c)$ は

$$\begin{aligned} F(\sigma_c) &= \int_0^{\sigma_c} \int_V h(\sigma_c; x, y, z) d\sigma_c dx dy dz \\ &= \int_0^{\sigma_c} m \cdot \sigma_c^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^m \int_V \exp \left[- V_e \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \right. \\ &\quad \times \left. f^{-m}(x, y, z) \right] dx dy dz d\sigma_c \quad \cdots \cdots (24) \end{aligned}$$

となる。

式(24)は、次に示す等式が成立する場合にのみ、2母数ワイブル分布となる。

$$\begin{aligned} \int_V \exp \left[- V_e \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \cdot f^{-m}(x, y, z) \right] dx dy dz &= V_e \cdot \exp \left[- V_e \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad \cdots \cdots (25) \end{aligned}$$

上式は、均等引張 ($f(x, y, z)=1$, $V_e=V$) 以外の応力状態に対しては一般に成立しない。したがって、応力こう配がある場合、 $F(\sigma_c)$ は2母数ワイブル分布とはならない。このことは式(2)中の第2、第3式に対しても同様に成立する。

文 献

- (1) Bolotin, V. V., *Statistical Methods in Structural Mechanics*, Holden-Day, (1969).
- (2) 松尾・佐藤, 機論, 45-390, A (昭54), 171.
- (3) 松尾, 機論, 46-406, A (昭55), 605.
- (4) 松尾, 機論, 46-411, A (昭55), 1203.
- (5) 松尾, 機講論, No.810-7 (昭56-7), 83.
- (6) Johnson, C. A., in *Fracture Mechanics of Ceramics* (Bradt ほか編), 5 (1983), 365, Plenum Press.
- (7) Batdorf, S. B., in *Fracture Mechanics of Ceramics* (Bradt ほか編), 3 (1978), 1, Plenum Press.
- (8) Evans, A. G., *J. Amer. Ceram. Soc.*, 61-302 (1978).
- (9) Moeschberger, M. L. and David, H. A., *Biometrics*, 27 (1971), 909.
- (10) 宮川, 品質, 12 (昭57), 23.
- (11) Finnie, I., *Int. J. Fract. Mech.*, 6 (1970), 287-300.
- (12) AOKI, S., OHTA, I., OHNABE, H., and SAKATA, M., *Int. J. Fract. Mech.*, 21 (1983), 285.
- (13) 森口・ほか2名, 数学公式 I, 53.
- (14) 伊藤・ほか2名, 材料, 30-1019 (昭56).
- (15) 松尾・ほか1名, 材料, 33-375 (昭59).
- (16) 松尾・ほか2名, 窯業協会昭和59年年会講演予稿集, 581.
- (17) Johnson, L. G., *The statistical treatment of fatigue experiment*, Elsevier, New York (1964).
- (18) 村田・松尾・宮川・北上, 機講論, No.840-10 (昭59-10), 62.

討 論

〔質問〕 中 川 隆 夫〔神戸大学工学部〕

ぜい性材料の破壊に関する多重モードワイブル分布の適用について不断の努力を重ねられており、その成果を挙げておられることに敬意を表す。以下の点につき二、三質問する。

(1) 式(15), (16)の前後の文章で、2母数ワイブル分布に従うか否かを論じているが、図4(a), (b)では2母数ワイブル分布に従わない(直線にならず、なだらかだが上に凸の曲線になる)とあるが、図からは3母数ワイブル分布なら合うように見える。なぜ2母数ワイブル分布の適合性のみを述べているのか。確率紙上で分布の適合性を論ずるときには、当然、3母数も考えねばならない(∵ 2母数で適合しなくても3母数で適合することもある)。

(2) 質問(1)と関係して、付録の6行め、位置母

数をなぜ零にしたのか。

〔回答〕 (1) 該当の文意は、 $\sigma_{\max}$ が2母数ワイブル分布に従ったとしても σ_c はそれに従わず、そのワイブルプロットが非線形になることを述べたものである。

なお、図4(a), (b)に示した $\sigma_{\max}$ の分布について3母数ワイブル分布を当てはめたところ、位置母数がほぼ零に近い値 ($\sigma_{u1}=0.707, \sigma_{u2}=0.553$) となったので、実用的には2母数ワイブル分布で十分と考えて、表1に示したパラメータの推定値を計算に用いた。

(2) 付録で位置母数を零と置いたのは、 $\sigma_{\max}$ が2母数ワイブル分布に従ったとしても、変数変換によって得られる σ_c の分布がこれに従わない(すなわちワイブル・プロットが非線形となる)ことを証明するためである。