周期的回転負荷を受ける中実円板の動的応力解析*

天 田 重 庚**

Dynamic Stress Analysis of a Solid Disc Subjected to Cyclic Rotations

by Shigeyasu AMADA

This paper presents an analysis of the dynamic stress in a solid disc subjected to cyclically varying rotations with respect to time, that is,

$$\bar{\omega}(\bar{t}) = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 \sin(\bar{\omega}_2 \bar{t}) \quad (\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 : \text{constants}).$$

The radial displacement and stress components are derived from a general solution for a solid disc, which was obtained previously by the author. A dynamic solution leads to the existence of two kinds of resonance circular frequencies. For $\bar{\omega}_1 \neq 0$ and $\bar{\omega}_0 = 0$, the resonance circular frequency $\bar{\omega}_2$ agrees with a half of λ_n which corresponds to the eigen-circular frequencies for in-plane vibrations of rotating discs. For $\bar{\omega}_1 \neq 0$ and $\bar{\omega}_0 \neq 0$, $\bar{\omega}_2$ agrees with both cases, λ_n and $\lambda_n/2$. It is finally discussed how the circular frequency $\bar{\omega}_2$ has influence on the stress components and their distribution.

Key Words: Elasticity, Structural Analysis, Rotating Disc, Dynamic Stress, Cyclic Rotation

1. 結 言

回転円板が急激な変動を行う場合、円板内に生ずる応力を精度良く評価するためには準定常解析は不十分であり、動的解析が必要となる。回転円板がランプ状、ステップ状、あるいは指数関数状に上昇回転する場合の動的応力解析^{(1)~(3)}の結果によると、円板の動的挙動は質量-バネ系の振動挙動と相似になることが判明した。この事実から、質量-バネ系の固有振動数に対応して、回転円板においても固有回転数の存在が推察される。一方、面内振動の立場から、回転円板の固有回転数についての検討が Bhuta ら⁽⁴⁾、Brunelle⁽⁵⁾、天田⁽⁶⁾、大滝⁽⁷⁾らによって行われた。このような固有回転数を有する円板が、周期的回転変動を受ける場合、円板内に生ずる応力挙動は単調増加、あるいは減少回転変動の場合と著しく異なることが予想される。Chowdhury ら⁽⁸⁾、菊池ら⁽⁹⁾によってこの問題は研究されたが、数値的な検討は行われていない。

本報告は前報⁽¹⁾で得られた変動回転円板の一般解を用い、周期変動回転を受ける中実円板の動的応力解析

を行う。特に、回転円板の固有回転数に円板の周期変動の振動数が近付く場合、応力変動がどのように変化するかを検討する。

2. 問題の設定と解

図1のような外半径 a の中実の円板が角速度 $\omega(t)$ にて変動回転している場合を考える。若干の仮定の下で半径方向の運動方程式は無次元形にて、次のように表せる。

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} - \bar{r} \bar{\omega}^2 \dots \dots \dots (1)$$

$\bar{u}$ は無次元の半径方向変位、 $\bar{\omega}$ は角速度、 $\bar{r}$ は半径、 $\bar{t}$ は時間である。無次元の半径方向応力 $\bar{\sigma}_r$ 、周方向応力

図1 回転円板

* 昭和60年10月1日 第63期全国大会講演会において講演、原稿受付 60年1月22日。

** 正員、運輸省船舶技術研究所(〒181 三鷹市新川 6-38-1)。

$\bar{\sigma}_\theta$ は、ポアソン比 ν を用いて次式にて与えられる。

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \nu \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right] \quad \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right] \quad \dots\dots\dots (2\cdot b)$$

ただし、無次元量と次元を有する量との間の関係は

$$\bar{u} = u/a, \bar{r} = r/a, \bar{\sigma}_r = \sigma_r/E \\ \bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/E, \bar{\omega} = (a\beta)\omega, \bar{t} = t/(a\beta) \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)にて、 E はヤング率である。 ρ を密度として、 β

は次式にて定義される定数である。

$$\beta^2 = (1-\nu^2)\rho/E \quad \dots\dots\dots (4)$$

円板の外周上に外力の作用がないとすれば、境界条件は次式にて与えられる。

$$\bar{\sigma}_r = 0 \quad \text{at } \bar{r} = 1 \quad \dots\dots\dots (5)$$

円板は初期に停止状態にあるとすると、初期条件は

$$\bar{u} = \partial \bar{u} / \partial \bar{t} = 0 \quad \text{at } \bar{t} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

条件(5)、(6)の下で式(1)を解くと、変位 $\bar{u}$ は次のようになる⁽¹⁾。

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = 4(1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \int_0^{\bar{t}} \bar{\omega}^2(\bar{t}-\xi) \sin \lambda_n \xi d\xi \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 λ_n は次式を満足する n 番めの根である。

$$\lambda_n J_0(\lambda_n) + 2\nu J_1(\lambda_n) - \lambda_n J_2(\lambda_n) = 0, \quad \lambda_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(7)における関数 $\Phi(\lambda_n, \nu)$ は次式にて与えられる。

$$\Phi(\lambda_n, \nu) = -\lambda_n^2(3+\nu)J_0(\lambda_n) - \lambda_n \left(4\nu - \frac{3}{2}\lambda_n^2 \right) J_1(\lambda_n) + \lambda_n^2(3+\nu)J_2(\lambda_n) - \frac{1}{2}\lambda_n^3 J_3(\lambda_n) \quad \dots\dots\dots (9)$$

応力成分 $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$ は式(2)より次のように求まる。

$$\bar{\sigma}_r = \frac{2}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2\nu/\bar{r})J_1(\lambda_n \bar{r}) - \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \int_0^{\bar{t}} \bar{\omega}^2(\bar{t}-\xi) \sin \lambda_n \xi d\xi \\ \bar{\sigma}_\theta = \frac{2}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu \lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2/\bar{r})J_1(\lambda_n \bar{r}) - \nu \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \int_0^{\bar{t}} \bar{\omega}^2(\bar{t}-\xi) \sin \lambda_n \xi d\xi \quad \dots\dots\dots (10)$$

3. 周期回転による円板の動的応力

円板の回転変動として、図2に示すような周期変動の場合を考える。

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Omega_1 \sin \Omega_2 t \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 Ω_0 は平均の角速度である。式(11)の諸量は式(3)を用いて無次元化される。式(11)を式(7)に代入すると

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。 $\bar{u}_0$ はステップ状回転 Ω_0 によって生ずる変位、 $\bar{u}_1$ は周期変動回転と Ω_0 、 $\bar{u}_2$ は周期変動回転のみで生ずる変位であり、それぞれ次式にて与えられる。

$$\bar{u}_0 = 4(1+\nu) \bar{\Omega}_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \bar{r})(1-\cos \lambda_n \bar{t})}{\lambda_n \Phi(\lambda_n, \nu)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{u}_1 = 4(1+\nu) \bar{\Omega}_0 \bar{\Omega}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \left[\frac{\sin \lambda_n \bar{t} + \sin \bar{\Omega}_2 \bar{t}}{\lambda_n + \bar{\Omega}_2} - \frac{\sin \lambda_n \bar{t} - \sin \bar{\Omega}_2 \bar{t}}{\lambda_n - \bar{\Omega}_2} \right] \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{u}_2 = 2(1+\nu) \bar{\Omega}_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \left\{ \frac{1-\cos \lambda_n \bar{t}}{\lambda_n} + \frac{\cos \lambda_n \bar{t} - \cos 2\bar{\Omega}_2 \bar{t}}{2} \left[\frac{1}{\lambda_n + 2\bar{\Omega}_2} + \frac{1}{\lambda_n - 2\bar{\Omega}_2} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

また、応力成分 $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$ についても次式にて与えられる。

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_{r0} + \bar{\sigma}_{r1} + \bar{\sigma}_{r2}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_{\theta0} + \bar{\sigma}_{\theta1} + \bar{\sigma}_{\theta2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$\bar{\sigma}_{r0} = \frac{2\bar{\Omega}_0^2}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2\nu/\bar{r})J_1(\lambda_n \bar{r}) - \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n \Phi(\lambda_n, \nu)} [1 - \cos \lambda_n \bar{t}] \\ \bar{\sigma}_{\theta0} = \frac{2\bar{\Omega}_0^2}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu \lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2/\bar{r})J_1(\lambda_n \bar{r}) - \nu \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n \Phi(\lambda_n, \nu)} [1 - \cos \lambda_n \bar{t}] \\ \bar{\sigma}_{r1} = \frac{2\bar{\Omega}_0 \bar{\Omega}_1}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2\nu/\bar{r})J_1(\lambda_n \bar{r}) - \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \left[\frac{\sin \lambda_n \bar{t} + \sin \bar{\Omega}_2 \bar{t}}{\lambda_n + \bar{\Omega}_2} - \frac{\sin \lambda_n \bar{t} - \sin \bar{\Omega}_2 \bar{t}}{\lambda_n - \bar{\Omega}_2} \right] \\ \bar{\sigma}_{\theta1} = \frac{2\bar{\Omega}_0 \bar{\Omega}_1}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu \lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2/\bar{r})J_1(\lambda_n \bar{r}) - \nu \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \left[\frac{\sin \lambda_n \bar{t} + \sin \bar{\Omega}_2 \bar{t}}{\lambda_n + \bar{\Omega}_2} - \frac{\sin \lambda_n \bar{t} - \sin \bar{\Omega}_2 \bar{t}}{\lambda_n - \bar{\Omega}_2} \right]$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{r2} &= \frac{\bar{Q}_2^2}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2\nu/\bar{r}) J_1(\lambda_n \bar{r}) - \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1 - \cos \lambda_n \bar{t}}{\lambda_n} + \frac{\cos \lambda_n \bar{t} - \cos 2\bar{Q}_2 \bar{t}}{2} \left[\frac{1}{\lambda_n + 2\bar{Q}_2} + \frac{1}{\lambda_n - 2\bar{Q}_2} \right] \right\} \\
\bar{\sigma}_{\theta 2} &= \frac{\bar{Q}_2^2}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu \lambda_n J_0(\lambda_n \bar{r}) + (2/\bar{r}) J_1(\lambda_n \bar{r}) - \nu \lambda_n J_2(\lambda_n \bar{r})}{\Phi(\lambda_n, \nu)} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1 - \cos \lambda_n \bar{t}}{\lambda_n} + \frac{\cos \lambda_n \bar{t} - \cos 2\bar{Q}_2 \bar{t}}{2} \left[\frac{1}{\lambda_n + 2\bar{Q}_2} + \frac{1}{\lambda_n - 2\bar{Q}_2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{17}$$

式(13)～(17)の $\bar{Q}_0, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ は無次元量であり、式(3)の定義と同様に $\bar{Q}_0 = (a\beta)Q_0, \bar{Q}_1 = (a\beta)Q_1, \bar{Q}_2 = (a\beta)Q_2$ のごとく定義される。式(14)～(17)より $\bar{Q}_0 = 0, \bar{Q}_1 \neq 0$ の場合、周期回転の円振動数 $\bar{Q}_2$ の2倍が λ_n に等しくなると、変位や応力の発散を招く共鳴振動数となる。一方、 $\bar{Q}_0 \neq 0, \bar{Q}_1 \neq 0$ の場合、共鳴振動数は $\bar{Q}_2$ と $2\bar{Q}_2$ の2種類が存在することになる。したがって、 $\bar{Q}_0 = 0, \bar{Q}_1 \neq 0$ の場合、 $2\bar{Q}_2$ が λ_n に近づくにつれて変位や応力は $1/|\lambda_n - 2\bar{Q}_2|$ に従って増大し、 $\bar{Q}_0 \neq 0, \bar{Q}_1 \neq 0$ の場合は $2\bar{Q}_2$ が λ_n に近づくにつれて $1/|\lambda_n - 2\bar{Q}_2|$ に従い、 $\bar{Q}_2$ が λ_n に近づくにつれて $1/|\lambda_n - \bar{Q}_2|$ に従って増大することになる。

式(8)の固有値 λ_n は、中実回転円板の面内の無次元固有振動数 $\bar{\omega}_n$ を与える⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾。これは、半径方向の変位の増加による慣性モーメントの増加が変位や応力の発散を招くもので、Bhutaら⁽⁴⁾はこれを“静的共鳴(static resonance)”と呼んだ。式(8)はポアソン比 ν を含んでおり、 ν が変化することによって当然 λ_n の値は変化することが考えられる。 ν の λ_n に及ぼす影響を調べた結果を、 $n=1\sim 5$ の範囲にて、また $\bar{\omega}_n = \lambda_n$ として図3に示す。 $\bar{\omega}_1$ については ν の増加とともに若干の増加はあるものの、 $\bar{\omega}_1 \sim \bar{\omega}_5$ においては ν によらずほぼ一定とみなしうる。 $\bar{\omega}_n$ を次元を有する危険角速度 $\omega_n(\text{rad/s})$ に書き表すと

$$\omega_n = \frac{\bar{\omega}_n}{a\sqrt{1-\nu^2}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{18}$$

図2 周期変動の回転過程

のようになる。これより、危険角速度 ω_n は外径が大きくなれば低下し、 $\sqrt{E/\rho}$ に比例する。すなわち、やわらかくて重い材料ほど危険角速度 ω_n は低い値を持つことになる。これらの詳しい議論については文献(4)～(7)を参照されたい。

4. 計算結果

外半径 $a=0.15\text{ m}$ 、円板の材料としてSNCM 8を想定し、 $E=205.95\text{ GPa}$ ($2.1 \times 10^8\text{ kg/cm}^2$)、 $\rho=7.702 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ ($0.786 \times 10^{-5}\text{ kgf}\cdot\text{s}^2/\text{cm}^4$)、 $\nu=0.278$ を用いて計算を実行する。式(8)により固有値 λ_n ($n=1\sim 10$)の計算結果を表1にかかげる。円板の周期回転過程、式(11)においては $Q_0=0, Q_1=104.7\text{ rad/s}$ ($N=1000\text{ rpm}$ に相当)を採用し、 $\bar{Q}_2$ を種々に変えて計算を行い、応力の時間応答を求めた。前述の値を採用したことにより、応力成分は $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_{r2}, \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_{\theta 2}$ となり、これらの値は $1/|\lambda_n - 2\bar{Q}_2|$ なる項によって最も影響を受けることになる。

図4は $\bar{Q}_2=0.8$ の場合、円板の中心上における応力 $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta$ の時間変動を示したものである。図中の点

図3 面内振動の固有円振動数の ν に対する変化

線は準静的解であり、次式にて与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r^q &= \frac{\bar{\omega}^2}{8} \frac{3+\nu}{1-\nu^2} (1-\bar{r}^2) \\ \bar{\sigma}_\theta^q &= \frac{\bar{\omega}^2}{8} \frac{(3+\nu)-(1+3\nu)\bar{r}^2}{1-\nu^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

時間は無次元時間 $\bar{t}$ の代わりに、現象の直感的に把握することが便利のために t を採用した。動的応力は回転開始とともに正弦状の周期変動を行うが、その振幅は2周期めにて、すなわち $t=1.65 \times 10^{-4}$ s にて最大となった後に減少し、4周期めにて最低となり、それ以後は同様の変動過程を繰返す。動的応力の変動振幅の最大値の1/2 (図7参照)、 $\bar{\sigma}_{r,\max}^d$ は準静的応力の最大値 $\bar{\sigma}_{r,\max}^q$ の約2.65倍となる。

図5は $\bar{Q}_2=0.98$ の場合、円板の中心上にて生ずる動的応力 $\bar{\sigma}_r=\bar{\sigma}_\theta$ の時間応答を、 $t=0 \sim 4.5 \times 10^{-4}$ s の範囲にて示したものである。この範囲では、正弦状の応力変動の振幅は時間とともに直線状に増加する。以後、増加の割合は漸次減少し、振幅の最大値は第13周期め、すなわち $t=11.2 \times 10^{-4}$ s にて生ずる。この後、振幅は減少して $t=22.6 \times 10^{-4}$ s にて最小となり、以後は同様の変動過程を繰返す。このように、正弦状に変動する動的応力の時間応答は“うなり現象”を呈する。動的応力の最大値 $\bar{\sigma}_{r,\max}^d$ と準静的応力の最大値 $\bar{\sigma}_{r,\max}^q$ との比は14.55と増大する。これは、周期回転の円振動数 $\bar{Q}_2$ の2倍が1.96となって、第1次の面内振動の固有値 $\lambda_1=2.035$ に近づいたことによるものである。

図6は図5と同様に、 $\bar{Q}_2=1.0$ の場合、 $t=0 \sim 4.5$

表1 式(8)による固有値 λ_n

n	λ_n	n	λ_n
1	2.0350	6	18.0310
2	5.3852	7	21.1775
3	8.5693	8	24.3228
4	11.7299	9	27.4672
5	14.8824	10	30.6110

図4 $\bar{Q}_2=0.8$ の場合の応力の時間応答

$\times 10^{-4}$ s における動的応力の時間応答を示したものである。図に示す範囲において、周期変動の増加の割合は図5の場合と比較して大きくなる。また、振幅の最大は $t=25.85 \times 10^{-4}$ s にて生ずる。 $\bar{\sigma}_{r,\max}^d$ は $\bar{\sigma}_{r,\max}^q$ の約31倍にも達する。このように、 $2\bar{Q}_2$ が λ_1 に近づくにつれて、“うなり”の振幅も大きく、周期も長くなる。

図4～6にて示したように、周期回転過程において円板の中心上の動的応力は、 $2\bar{Q}_2$ が λ_n に近い値を採る場合に正弦状の周期変動しながら、その振幅自身も周期変動する、いわゆる“うなり現象”を呈する。図7に代表的な円板の中心上の応力変動を示す。正弦状の応力変動の振幅の1/2を $\Delta\bar{\sigma}_r$, $\Delta\bar{\sigma}_\theta$ の最大値を $\bar{\sigma}_{r,\max}^d$, 準静的応力の最大値を $\bar{\sigma}_{r,\max}^q$ と定義する。

図8は、正弦状に変動する動的応力の“うなり”の振幅や周期が、周期回転過程関係式(11)の円振動数 $\bar{Q}_2$ の無次元量 $\bar{Q}_2$ により、どのような影響を受けるかを示したものである。縦軸は図7で定義した $\Delta\bar{\sigma}_r$, 横軸には回転開始直後からの経過時間を取り、 $\bar{Q}_2=1.0, 0.98, 0.95$ の3種類について描いたものである。図より、 $2\bar{Q}_2$ が λ_1 に近づくにつれて、“うなり”の振幅は著しく増大することがわかる。一方、“うなり”の周期は $\bar{Q}_2=0.95$ の場合が 1.29×10^{-3} s, $\bar{Q}_2=1.0$ の場合は 4.99×10^{-3} s となって、約3.9倍と長くなる。

図5 $\bar{Q}_2=0.98$ の場合の応力の時間応答

図6 $\bar{Q}_2=1.0$ の場合の応力の時間応答

$\bar{Q}_2$ の変化に対して、図 7 にて定義した動的応力の最大値 $\bar{\sigma}_{r,\max}^d$ がどのように変化するかを示したのが図 9 である。縦軸に動的応力の最大値 $\bar{\sigma}_{r,\max}^d$ と準静的応力の最大値 $\bar{\sigma}_{r,\max}^s$ との比 η を、横軸には $\bar{Q}_2$ を採用した。横軸上に 1 次の共鳴振動数として、 $\lambda_1/2 = 1.0175$ を記入してある。図中の丸印は計算結果であり、点線は動的応力の値に最も影響する項であるところの $1/|\lambda_1 - 2\bar{Q}_2|$ の値である。 $\bar{Q}_2 = 0.8$ の場合、 η の値 2.65 に対して、 $1/|\lambda_1 - 2\bar{Q}_2| = 2.30$ となって、 η に対するその差は約 13.2% である。 $\bar{Q}_2 = 0.98$ の場合、 η の値は 14.55 に対して、 $1/|\lambda_1 - 2\bar{Q}_2| = 13.33$ となって、 η に対するその差は 8.4% と小さくなる。 $\bar{Q}_2 = 1.0$ の場合、 $\eta = 31.02$, $1/|\lambda_1 - 2\bar{Q}_2| = 28.54$ となって、相対的な差はさらに小さくなって 7.9% となる。

これまでの議論は円板の中心上の動的応力に着目したが、円板の中心以外の点で応力変動がどのようになるかを検討してみる。 $\bar{Q}_2 = 1.0$ の場合に注目し、図 10 にて示すように、円板の中心上において正弦状に変動する動的応力の振幅が最大になった時刻、すなわち $t = 25.85 \times 10^{-4}$ s から半サイクルの間の半径方向応力 $\bar{\sigma}_r$ 、周方向応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布の変動について調べてみ

る。図中の曲線 N は、その時間範囲での回転数の変化を示したものである。

図 11(a), (b) に図 10 中の丸印で示した時刻での半径方向と周方向応力分布をかかげる。図 11(a) では円板中心上の応力が最大値から零を通過する範囲の応力分布を与える。時間の経過とともに、円板の中心に近い領域ほど急速に減少し、曲線⑤では $\bar{\sigma}_r$ は半径に対してほとんど平坦な分布となる。図 11(b) は、半サイクルの後半における応力分布の経過を示したものである。負の値での増加傾向は、零軸に対して図 11(a) とほとんど対称となっている。両図の結果より、円板の中心以外の点での動的応力の変動は、振幅の値は異なるものの、正弦状の変動を行うことがわかる。

5. 結 論

中実の円板が周期的回転

$$\bar{Q}(\bar{t}) = \bar{Q}_0 + \bar{Q}_1 \sin(\bar{Q}_2 \bar{t})$$

を受ける場合、前報で得られた一般解を用いて動的応力解析を行い、次のような結論を得た。

(1) 動的変位や応力は $\bar{Q}_0$ のみによって影響を受ける項、 $\bar{Q}_0$ と $\bar{Q}_1$ によって影響を受ける項と $\bar{Q}_1$ のみ

図 7 代表的な円板中心上の応力の時間応答

図 9 周期回転の円振動数に対する最大応力値の変化

図 8 変動応力の振幅の時間に対する変化

図 10 図 11 中の応力分布に相当する時間

図 11 $\bar{Q}_2=1.0$ の場合の応力分布の変化

による項との和によって表される。

(2) $\bar{Q}_0=0, \bar{Q}_1 \neq 0$ の場合、共鳴円振動数 $\bar{Q}_2$ は式(8)で与えられる回転円板の面内固有振動の円振動数 $\omega_n (= \lambda_n)$ の $1/2$ に一致する。 $2\bar{Q}_2$ が λ_n に近づくにつ

れて、変位や応力は $1/|\lambda_n - 2\bar{Q}_2|$ によって支配される。

(3) $\bar{Q}_0 \neq 0, \bar{Q}_1 \neq 0$ の場合、共鳴円振動数 $\bar{Q}_2$ は ω_n に一致する場合と、 $\bar{\omega}_n/2$ に一致する場合とがあり、 $\bar{Q}_2$ が $\bar{\omega}_n (= \lambda_n)$ に近づく場合には、変位と応力は $1/|\lambda_n - \bar{Q}_2|$ によって支配される。

$\bar{Q}_0=0, \bar{Q}_1=104.7 \text{ rad/s} (N=1000 \text{ rpm})$ の場合について、 $\bar{Q}_2$ を種々変えて計算を行い、次の結果を得た。

(4) 動的応力は回転開始とともに正弦状の周期変動を行い、変動の振幅自身もまた周期的に変動する“うなり現象”を呈する。

(5) $\bar{Q}_2$ に対して、円板の中心上の動的応力の最大値 $\bar{\sigma}_{\theta, \max}$ と準静的応力の最大値との比は、 $\bar{Q}_2$ が $\lambda_1/2$ に近づくにつれて増大し、近似的にこの比は $1/|\lambda_1 - 2\bar{Q}_2|$ によって表せる。

(6) “うなり”の周期は $\bar{Q}_2$ が $\lambda_1/2$ に近づくにつれて長くなる。

文 献

- (1) 天田, 機論, 49-448, A(昭58), 1540.
- (2) Johnson, G. R., *AIAA J.*, 17-9 (1979), 975.
- (3) 天田, 機論, 50-458, A(昭59), 1719.
- (4) Bhuta, P. G. ほか1名, *J. Acoust. Soc. Am.*, 35-7 (1963), 982.
- (5) Brunelle, E. J., *AIAA J.*, 9-4 (1971), 758.
- (6) 天田, 機論, No. 810-1 (昭56-4), 164.
- (7) 大滝, 機論, 47-421, A(昭56), 908.
- (8) Chowdhury, K. L. ほか1名, *Bull. L'Academie Polonaise Sci.*, 14-5 (1966), 339.
- (9) 菊池・諸江, 防衛庁技術研究本部, 技-462(昭46).
- (10) 天田, 山梨地方講義, (昭55-4), 7.

討 論

〔質問〕 大滝 英 征〔埼玉大学工学部〕

(1) 回転円板が急激な変動を行う場合を解析しておられるが、このような場合は ω のみならず $\dot{\omega}$ も大きな影響を持つと考えられる。解析にても $\Omega(t) = \bar{\Omega}_0 + \bar{\Omega}_1 \sin(\bar{\Omega}_2 t)$ $\dot{\Omega}_1(t) = \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2 \cos(\bar{\Omega}_2 t)$ ($\bar{\Omega}_1 = 104.7 \text{ rad/s}$, $\bar{\Omega}_2 = 0.8 \sim$) とオーダ的にはほとんど同じであり、しかも t を 10^{-4} s と極めて短い時間域で論じている。したがって運動方程式としては

$$\left\{ \begin{aligned} r^2 u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \\ + \frac{2(1+\nu)}{E} (\rho r \omega^2 - \rho \ddot{u}) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} r^2 v + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \\ - \frac{2(1+\nu)}{E} (\rho r \dot{\omega} + \rho \ddot{v}) = 0 \end{aligned} \right.$$

のように、 v をも考慮する必要性があるのではないかと。

(2) 半径方向の変位の増加による慣性モーメントの増加が共鳴振動をきたすとしているが、式(18)より振動数は極めて高いものであり、この振動をきたす以前の回転数で円板が破壊することはないかと。

〔回答〕 有意義なご質問に感謝する。次のように回答させていただく。

(1) コリオリの加速度成分を無視した半径方向の運動方程式⁽¹⁾は次式にて与えられる。

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} - \bar{v} \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} - (\bar{r} + \bar{u})\bar{\omega}^2 \quad \cdots \cdots \cdots (i)$$

右辺において、 $\bar{u} \ll \bar{r}$ なので $\bar{v} d\bar{\omega}/d\bar{t}$ と $\bar{r}\bar{\omega}^2$ の項を比較すれば十分だと思う。

$$|\bar{r}\bar{\omega}^2| \sim |\bar{r}||\bar{\Omega}_1^2| \sim \bar{\Omega}_1^2 \quad \cdots \cdots \cdots (ii)$$

周方向の変位⁽³⁾については

$$\bar{v} \sim \bar{r}\dot{\bar{\omega}} \quad \cdots \cdots \cdots (iii)$$

で与えられるので、

$$|\bar{v} \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}}| \sim |\bar{r}||\bar{\Omega}_1^2||\bar{\Omega}_2^2| \sim \bar{\Omega}_1^2 \cdot \bar{\Omega}_2^2 \quad \cdots \cdots \cdots (iv)$$

となる。本報では $\bar{\Omega}_2$ のオーダーは 1 なので、ご指摘のごとく $\bar{v}$ の影響は無視できないと思われる。しかし、本報は緒言でも述べたとおり、固有回転数に円板の周期変動の振動数が近づく場合の応力変動の挙動に注目した基礎的研究の段階のものである。次報において、ご指摘の周方向変位の影響を検討させていただくことにしたいと思う。

(2) 図 8 にて示したように $\bar{\Omega}_2 = 0.98$ の場合でも、円板中心上にて最大相当応力は 12.39 MPa {163.3 kg/cm²} であり、SNCM 8 の破壊強度 ≈ 686.5 MPa {7000 kg/cm²} に比較して低く、破壊には至らないと思われる。