積層平板座屈固有値のヘッセ行列に基づく最適設計*

中 桐 滋**, 高 畑 秀 行***

Optimum Design of FRP Laminated Plates under Axial
Compression by Use of the Hessian Matrix

by Shigeru NAKAGIRI and Hideyuki TAKABATAKE

The optimization technique of the buckling eigenvalue of FRP laminated plates is presented on the basis of the Hessian matrix. The fiber orientation is taken as design variable. The buckling eigenvalue problem is dealt with by the finite element method. The rates of change of the eigenvalue up to the second order are evaluated with the aid of the second order perturbation technique in order to constitute the Hessian matrix which is used to determine the changes of the design variables needed to maximize the eigenvalue approximately. The procedure of such approximation is to be repeated until the eigenvalue converges to the largest value. The numerical analyses with respect to Boron/Epoxy laminated plates under axial compression show that optimization, that is, maximization of the lowest buckling eigenvalue is made possible by use of the Hessian matrix.

Key Words: Structural Analysis, Optimization, FRP, Laminated Plates, Buckling, Hessian Matrix

1. 緒 言

繊維強化形複合材積層平板(積層平板と以後略記する)は繊維積層角と積層厚を選定することによりテーラリングデザインが可能である。金属材料に比べて構造設計の自由度の高いことは、積層平板の構造・材料設計において最適化を常に念頭におかねばならないことを示唆している。圧縮もしくはせん断を受ける長方形積層平板などの座屈応力の積層角に対する最適化はすでに解析的な手法により試みられている^{(1)~(3)}。本研究においては複雑な負荷、境界条件に対処し得る有限要素座屈固有値解析を基に、設計変数として積層角をとり、座屈固有値の設計変数に関する変動率を二次摂動法により求める。そして、二次変動率により構成されるヘッセ行列に基づき座屈固有値を極値とする積層角を定める過程を反復することにより最適化を行う手法を示す。

本研究での最適化は最小固有値の最大化とする。積層平板の座屈解析にあたっては、曲げについてはキル

ヒホッフ・ラブの仮定が成立するものとする。

2. 積層平板の座屈固有値問題

振動固有値問題の場合と同様に各層の弾性定数、積層角、積層厚および積層数 N により定められる面内剛性、カップリング剛性、面外剛性⁽⁴⁾を用いれば積層平板の面内・カップリング・面外剛性マトリックス $[K_p]$, $[K_c]$, $[K_b]$ が導き出される。その際、使用有限要素としては面内変形は定ひずみ三角形要素、面外変形については BCIZ 要素⁽⁵⁾を用いる。外力により発生する面内力とたわみ w の空間微係数から定められる初期応力マトリックス $[K_G]$ は式(1)の形にまとめられる⁽⁶⁾。

$$[K_G] = \int [G]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] d\text{area} \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで $[G]$ は $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$ と節点面外変位ベクトル $\{\phi_i\}$ を結び付けるマトリックス、 N_x , N_y , N_{xy} は単位外力により発生する面内力(単位長さ当たり; 圧縮を正にとる)である。以後、面内変形については添字 p 、面外変形については添字 b を用いる。また、積層平板とその座標を図 1 に示す。

積層序列によってはカップリング剛性マトリックス $[K_c]$ が非零となり、積層平板が面内外力のみを受け

* 昭和 60 年 12 月 5 日 第 935 回講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 5 月 1 日。

** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

*** 正員、高松工業高等専門学校 (〒761 高松市勅使町 355)。

でも面外変位を生ずることもあり得る。この場合の座屈荷重の決定は厳密に言えば非線形解析によらねばならない。しかしながら、面外と面内の変形にカップリングを生ずる場合であっても、後述の数値計算例において用いた種々の積層序列に関して行った予備計算では、一様面内圧縮荷重に対して面外変位は座屈時においても総板厚の1/10程度と小さい。また、一様圧縮荷重に対して発生する内力 N_x も一様であり、 N_y と N_{xy} は N_x に対して無視し得るほど小さい。したがって、本研究においては座屈前変形の影響は無視し得るとして座屈荷重は式(2)の線形固有値問題より定めることとする。

$$\left(\begin{bmatrix} [K_p] & [K_c] \\ [K_c]^T & [K_b] \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_c] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで λ は固有値、 $\{\phi_p\}$ は面内節点変位固有ベクトルである。 λ の決定は式(2)より $\{\phi_p\}$ を消去して式(3)の標準固有値問題による。

$$([K_b] - \lambda[K_c])\{\phi_b\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

$$[K_b] = [K_b] - [K_c]^T [K_p]^{-1} [K_c] \quad \dots\dots\dots (3 \cdot b)$$

なお、式(2)、(3)は面内、面外境界条件処理後のものである。

3. 二次摂動法に基づく固有値変動率評価

本研究においては k 層の積層角 $\theta_k (k=1 \sim N)$ を設計変数とし、最適化のための積層角変化を式(4)により表す。上付記号 $\bar{}$ は初期値を表す。

$$\theta_k = \bar{\theta}_k + \alpha_k \quad \dots\dots\dots (4)$$

α_k の変動に対する剛性マトリックスの変動は確率有限要素法の手法⁽⁴⁾により、例えば $[K_b]$ について

$$[K_b] = [\bar{K}_b] + \sum_{k=1}^N [K_{b_k}^I] \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N [K_{b_{kl}}^{II}] \alpha_k \alpha_l \quad \dots\dots\dots (5)$$

と評価される。添字 I, II は一次、二次変動率を意味す

図1 積層平板とその座標系

る。 $[K_c]$, $[K_p]$, $[K_c]$ についても同様に評価する。ただし、 $[K_c]^T$, $[K_p]^{-1}$, $[K_c]$ と $[K_c]$ の二次変動率までを評価するのは演算時間、記憶容量が過大となる。このマトリックス三乗積項は $[K_{p_k}^I]$, $[K_{c_k}^I]$, $[K_{c_k}^I]$ の一次変動率を用いた式(6)の一次変動率までの評価で打ち切っている。

$$\begin{aligned} & [K_c]^T [K_p]^{-1} [K_c] \text{ の } \alpha_k \text{ に関する一次変動率} \\ & = [\bar{K}_c]^T [\bar{K}_p]^{-1} [K_{c_k}^I] \\ & - [\bar{K}_c]^T [\bar{K}_p]^{-1} [K_{p_k}^I] [\bar{K}_p]^{-1} [\bar{K}_c] \\ & + [K_{c_k}^I]^T [\bar{K}_p]^{-1} [\bar{K}_c] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

これと同様に $[K_c]$ の二次変動率も λ_{ki}^{II} 評価の際に省略する。 α_k の変動に対する座屈固有値 λ の変化も

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sum_{k=1}^N \lambda_{ki}^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \lambda_{kli}^{II} \alpha_k \alpha_l \quad \dots\dots\dots (7)$$

と二次近似する。上述のマトリックスの変動率に対して固有値の変動率 λ_k^I , λ_{ki}^{II} は固有値問題の二次摂動解⁽⁹⁾に従って式(8), (9)と求められる。

$$\lambda_k^I = \{\bar{\phi}_b\}^T ([K_{b_k}^I] - \bar{\lambda} [K_{c_k}^I]) / \{\bar{\phi}_b\}^T [\bar{K}_c] \{\bar{\phi}_b\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ki}^{II} = & \{\bar{\phi}_b\}^T \{ ([K_{b_{ki}}^{II}] - \bar{\lambda} [K_{c_{ki}}^{II}] \\ & - \lambda_k^I [\bar{K}_c] \{\bar{\phi}_{bi}\} + ([K_{b_{ki}}^I] - \bar{\lambda} [K_{c_{ki}}^I] \\ & - \lambda_l^I [\bar{K}_c]) \{\phi_{bk}\} + ([K_{b_{kl}}^{II}] - \lambda_k^I [K_{c_{kl}}^I] \\ & - \lambda_l^I [K_{c_{kl}}^I]) \{\bar{\phi}_b\} \} / \{\bar{\phi}_b\}^T [\bar{K}_c] \{\bar{\phi}_b\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

本研究においては最低次の固有値 λ に着目する。

4. ヘッセ行列に基づく最適化

積層角変化 α_k に対して $\bar{\lambda}$ の近傍で変化する固有値 λ は式(10)で定められる α_k に対して極値をとる。

$$[\lambda_{ki}^{II}] \{\alpha_k\} = -\{\lambda_k^I\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)左辺の λ_{ki}^{II} をマトリックス形に配列したものはヘッセ行列と言われている。最適化として最大化を選ぶとき、ヘッセ行列が負定値性を有していることが望ましい。本研究においてはヘッセ行列の正、負定値性を厳密に調べることなく、行列の対角成分 λ_{kk}^{II} が負である積層角変化 α_k (M 個とする)に関する成分のみを抽出し、 $M \times M$ に縮小したヘッセ行列を用いて極値化を図ることとする。図3の白丸印で示される再解析結果に対して、上述の二次摂動解はあくまでも近似解であるので、1回の極値操作により最大値が得られる保証はない。したがって、 α_k により積層角を変化させて、この近似解法を反復する必要を生ずる。二次摂動近似解は図3に示されるように、カップリングが存在する場合、大きめの α_k を与える傾向にある。そこで、 $\lambda_k^I = 0$ となるまで反復するに際して、式(10)で定まる α_k を直接用いず、ステップ分割数 stp を用いて

積層角変化を α_k/stp と修正する。カップリングの存在しない場合には $\text{stp}=1$ 、存在する場合は $\text{stp}=3$ と選ぶと収束が単調でまた速くなることを確かめている。

座屈固有値は k 層の応力-ひずみ関係 ($2\theta_k, 4\theta_k$ の周期性を有する) に応じた周期性を示す。そこで、 $|\alpha_k|$ が 22° 以上と算出された場合、 λ_k が正のとき $\alpha_k=22^\circ/\text{stp}$ 、 λ_k が負のとき $\alpha_k=-20^\circ/\text{stp}$ とする。 λ_k の正負により変化量を変えているのは反復の循環をさけるためである。

一方、対応するヘッセ行列対角成分 λ_k が正である α_k ($N-M$ 個) に関しては、その値を定める規準は見当たらないので、対応する λ_k が正のとき $\alpha_k=10^\circ/\text{stp}$ 、 λ_k が負のときは $\alpha_k=-7^\circ/\text{stp}$ と人為的に設定した。正負で $10, -7$ と変化量をちがえているのは上述と同様に反復循環をさけるためである。

さらに、ヘッセ行列の対角成分がすべて正の場合、その積層角近傍では固有値が極小となると推測されるため、 λ_k の正負に応じて、 α_k を $22.5, -14^\circ$ と強制的に変化させて反復を行うこととした。

5. 数値計算例

正方および長方形平板の圧縮に対する座屈応力最適化の数値計算例を以下に示す。要素分割と面内変位境界条件を図2に示す。面外変位境界条件は全周単純支持とする。材料定数はポロン/エポキシ材を想定し、 $E_L=206.9\text{ GPa}$, $E_T=20.69\text{ GPa}$, $G_{LT}=6.89\text{ GPa}$, $\nu_{LT}=0.3$ とし⁽⁷⁾、各層厚はすべて 0.3 mm とする。

5.1 1層内に $+\theta_k, -\theta_k$ 方向繊維が等量存在する場合 図3は $a=b=400\text{ mm}$, $\theta_2=\theta_3=45^\circ$ の3層平板の座屈荷重の θ_1 に対する依存性を再解析 (reanalysis) により求めた結果と摂動解との比較を示す。再解析では $\theta_1=45^\circ$ で最大荷重が得られている。二次変動率 (近似式 (9) を使用) まで用いた場合の摂動解の追従性の程度が示されているが、設計変数 θ_1 の変

図2 有限要素分割および面内境界条件

更による反復計算が必要となるのは明らかである。表1に3, 4, 6層平板に関してアスペクト比と初期積層角に対する最適積層角, 収束座屈応力 ϕ , 収束までの反復回数を平野の結果⁽⁷⁾と比較して示す。

なお、以下の図と表において ϕ は式 (11) で定義される無次元座屈応力である⁽⁷⁾。

$$\phi = 12\lambda \cdot N_x \cdot b^2 / (\pi^2 t^3 Q_{22}) \dots \dots \dots (11)$$

上式で t は総板厚, $Q_{22}=E_T/(1-\nu_{LT}\nu_{TL})$ は弾性定数から定められる。

有限要素近似に起因する若干の差は認められるが、表1に示されている一致はヘッセ行列に基づく本手法が最適値探索に有効であることを示している。

図4に4層平板 (ケース6) の積層角と座屈反力 ϕ の収束状況を平野の結果 (図中の中黒記号) と対比して示す。本手法では状況はおおむね単調であるので、収束の判定が容易である。収束までの反復回数は12と、平野の結果にくらべやや多い。また、本手法においても積層角の収束が座屈応力の収束よりも遅いことが示されている。所要反復回数についてはステップ分割数 stp の選択およびヘッセ行列の対角項が正值となる設計変数の処理により、その低減は可能と考えられる。

図5と図6はアスペクト比0.5と0.8の3層平板に関する積層角と座屈応力 ϕ の収束状況を示す。アスペクト比が1以下の場合の積層平板の圧縮座屈モードは比が1の場合と同じで、図に示されているように単調収束により最適化されている。しかしながら、アスペクト比が1.25の場合、図7に6層積層平板の例を示すように座屈モードが変わる。つまり、圧縮方向半波数 m が1と2と遷移する。すなわち、座屈モード遷移点で座屈応力が最大となるので、一座屈モードに関する最適化のみでは積層角は最適値への接近、離脱を繰

図3 第1層積層角変化による座屈固有値変化

表 1 積層平板の最適積層角および座屈固有値

Case	No. of layers	Aspect ratio a/b	Orientation (deg)						Reduced critical stress ϕ		Half wave No. m	No. of iter.
			θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6		*		
1	3	0.5	S 10.0 F 0.19	20.0 0.12	30.0 0.19	-	-	-	34.72 40.86	- 42.17	1 1	14
2		0.8	S 10.0 F 36.75 F (37.48)	20.0 36.75 (37.48)	30.0 36.75 (37.48)	-	-	-	18.37 22.16 (22.28)	- 23.15 23.15	1 1 1	13
3		1.0	S (0.0) F (45.0)	(0.0) (45.0)	(0.0) (45.0)	-	-	-	(12.55) (21.09)	12.92 22.00	1 1	2
4		1.0	S 10.0 F 44.98	20.0 44.98	30.0 44.98	-	-	-	14.90 20.86	- 22.00	1 1	10
5	4	1.0	S 90.0 F 135.0	90.0 135.0	90.0 135.0	90.0 135.0	-	-	9.02 20.86	8.42 22.00	2 1	2
6		1.0	S 10.0 F 45.00	20.0 45.03	30.0 44.93	40.0 44.96	-	-	14.78 20.86	14.43 22.00	1 1	12
7	6	0.8	S 0.0 F 36.67	0.0 36.67	0.0 36.67	0.0 36.67	0.0 36.67	0.0 36.67	17.81 22.16	- 23.15	1 1	4
8		1.0	S 90.0 F 135.0	0.0 44.93	90.0 135.1	0.0 45.05	90.0 135.0	0.0 44.99	12.17 20.85	12.92 22.00	1 1	19
9		1.0	S 10.0 F 44.93	20.0 44.96	30.0 45.01	40.0 44.90	30.0 44.92	20.0 44.93	15.44 20.85	- 22.00	1 1	16
10		1.25	S 0.0 F 50.50	0.0 50.50	0.0 50.50	0.0 50.50	0.0 50.50	0.0 50.50	9.70 22.08	- 23.12	1 1&2	**

S : Starting value

* Hirano's

F : Final value

** Convergence instable

()内数値は要素数 144 の場合、他は要素数 64

返す。この場合にもステップ分割数 stp を大きくとり ($stp=20.0$ とした), 積層角変化量を小さくすることにより, 最適積層角を見いだすことは可能である。

5・2 1 層内に θ_k 方向繊維のみが存在する場合

これは 5・1 節より異方性の度合いが強いといえる場合である。表 2 に 3 層正方形平板の座屈応力収束値, および収束積層角の積層角初期値依存性を示す。また, 図 8 にケース 12 の積層角と座屈応力の収束状況を示すが, 前者の変化がおおむね単調であるのに対し, 後者は 2 段状になっている。本例にみられるように, 積層構成いかんによっては現れる初期値依存性の処理が今後最適化手法を開発していくうえでの課題と考えられる。

6. 結 論

繊維強化形複合材積層平板の座屈固有値最適化問題にヘッセ行列に基づく手法を適用し, 以下の結果が得られた。

(1) 積層角を設計変数として有限要素固有値問題の設計変数近傍での摂動解に基づき, ヘッセ行列の近

†: 本法解析, ††: 平野⁽⁷⁾

図 4 4 層積層平板の収束性の比較

似解を求める手法を定式化した。

(2) ヘッセ行列を用いて設計変数の変化量を定め, その反復により固有値の最大化がはかれることを圧縮座屈応力について数値計算例をもって示した。

(3) 1 層内に $+\theta_k$ と $-\theta_k$ 方向の繊維が等量存在する積層構成の場合, 本手法による収束値は初期値依

表 2 積層平板の最適積層角および座屈固有値 (1 層内 1 方向繊維の場合)

Case	No. of layers	Aspect ratio a/b	Orientation (deg)			Reduced critical stress ϕ	Half wave No. m	No. of iter.
			θ_1	θ_2	θ_3			
11	3	1.0	S 0.0	0.0	0.0	12.67(12.55)	1	4
			F -41.25	-41.25	-41.25	14.54(13.88)	1	
			F (-42.03)	(-42.03)	(-42.03)	(13.88)	1	
12	3	1.0	S 10.0	20.0	10.0	12.88	1	22
			F 42.51	-44.40	42.51	15.70	1	

S : Starting value F : Final value

() 内数値は要素数 144 の場合, 他は要素数 64

図 5 3 層積層平板の収束状況
(ケース 1, アスペクト比 0.5) 図 7 6 層積層平板の収束状況
(ケース 10, アスペクト比 1.25) 図 6 3 層積層平板の収束状況
(ケース 2, アスペクト比 0.8) 図 8 3 層積層平板の収束状況
(ケース 12, アスペクト比 1.0)

存性を示さず, また座屈半波数の遷移する場合についても本手法により最大値を見いだせることを示した。

(4) 1 層内の繊維方向が θ_* のみという異方性の強い積層構成の場合には初期値いかんにより局所的極大値に収束し, 本手法による大局的極大値の探索にはまだ問題が残されている。

文 献

- (1) Hirano, Y., *J. Compos. Mater.*, 13-10 (1979), 329.
- (2) 三木, 機論, 50-455, A (昭 59), 1325.

- (3) 福永, 航字誌, 30-343 (昭 57), 482.
- (4) 高畑・谷・中桐・久田, 機論, 51-465, A (昭 60), 1510.
- (5) Zienkiewicz, O. C. (吉識・山田監訳), マトリックス有限要素法, (昭 59), 235, 培風館.
- (6) 中桐・久田, 機論, 49-438, A (昭 58), 239.
- (7) Hirano, Y., *AIAA J.*, 17-9 (1979), 1017.