鋼球の衝突により硝子板に生ずる衝撃応力の解析*

宇治橋 貞幸**, 足立 忠晴***
井上 裕嗣***, 松本 浩之**An Analytical and Experimental Study of Impulsive Stresses in a Glass Plate
Subjected to the Transverse Impact of Steel Ballsby Sadayuki UJIHASHI, Tadaharu ADACHI,
Hirotsugu INOUE, and Hiroyuki MATSUMOTO

In this paper, an attempt is made to analyze the impulsive stresses in a glass plate subjected to the transverse impact of steel balls. For the case of a mass striking an infinite glass plate, the contact force variation is obtained by solving a nonlinear integral equation given by the use of Lagrange's classical plate theory and Hertz's law of contact. By regarding this force as an impact load for the case of the central impact of a steel ball on a supported circular glass plate, the impulsive stresses in a glass plate are analyzed using the three-dimensional dynamic theory of elasticity. Finally, it is shown that these analytical results are in good agreement with the experimental results.

Key Words: Structural Analysis, Glass Plate, Steel Ball, Air Gun, Impulsive Stress, Classical Plate Theory, Three-Dimensional Theory, Hertz's Contact Law, Numerical Laplace Inverse Transformation

1. 緒 言

板硝子の衝撃破壊試験では、鋼球の落下による曲げ衝撃試験が行われている⁽¹⁾。しかしこの試験では、破壊時の鋼球の落下高さをもって板硝子の強度を表す方法が採用されているだけで、硝子板に生ずる衝撃応力によって破壊強度を評価する試みはほとんど行われていないようである。この場合の衝撃応力を理論的に明らかにするためには、まず集中衝撃荷重の作用する平板の衝撃応答問題が解析されなければならない。この動弾性問題が解析されれば、上記の試験における破壊強度の解明も大いに進展するものと思われる。

しかし、理論解析上に問題が二点あった。その第一は、球形物体が平板に衝突したときの衝撃荷重が不明な点であり、第二点は従来の板理論では集中力の作用点における応力を明らかにすることができない点である⁽²⁾。本論文は、球形物体の衝突によって硝子板に生ずる衝撃応力を近似的に解析する手法を提案したものである。まず球形物体の衝突をうける無限平板につい

て衝撃荷重を Lagrange の古典板理論と Hertz の接触理論を用いて解析し、これが周辺を支持された円板の中央に落球衝撃を与えた場合の衝撃荷重であると仮定した。次に、この荷重が集中荷重として円板の中央に作用する問題を、三次元動弾性理論により解析した。最後に、硝子板の中央に鋼球を衝突させる実験を行い、計測されたひずみ波形と理論波形とを比較し、本論文で示した応力解析手法の適用性を明らかにした。

2. 衝撃荷重の解析

図 1 のように質量 M の球が速度 V_0 で無限平板に衝突する問題を考え、衝突点を原点とする円柱座標 (r, z) をとり、衝突の瞬間を時刻 $t=0$ とする。球には質点の運動方程式を、平板には古典板理論である Lagrange の運動方程式をそれぞれ適用するものとし、衝突によって両者の間に生ずる接触力の大きさを F_0 、時刻変化の関数を $f(t)$ とする。

球の移動量を u とすれば、運動方程式は

$$M(d^2u/dt^2) = -F_0f(t) \dots\dots\dots (1)$$

となり、衝突した瞬間を $u=0$ とすれば、初期条件は

$$(u)_{t=0} = 0, (du/dt)_{t=0} = V_0 \dots\dots\dots (2)$$

となる。式(2)を用いて式(1)を解けば

* 昭和 60 年 10 月 1 日 第 63 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 4 月 2 日。

** 正員、東京工業大学工学部(〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*** 学生員、東京工業大学大学院。

$$u = V_0 t - \frac{F_0}{M} \int_0^t \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi \quad (3)$$

となる。一方、Lagrange の運動方程式は、変位を w 、分布荷重を $q(r, t)$ とすれば、次のようになる。

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, t) \quad (4)$$

ここで、 $\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial r^2 + \partial / r \partial r$ 、 $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ であり、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 ρ は質量密度、 h は板厚である。原点 $r=0$ を中心とした半径 c の円形領域内に等分布荷重 q_0 がステップ関数状に作用するものと考えて、式(4)をラプラス変換およびハンケル変換を用いて解けば、次のようになる。

$$\bar{w} = c J_1(cs) q_0 / s p (Ds^4 + \rho h p^2) \quad (5)$$

ここで、

図 1 球形物体の衝突を受ける無限平板

$$\bar{w} = \int_0^\infty w e^{-pt} dt, \quad \bar{w} = \int_0^\infty r w J_0(sr) dr$$

分布荷重 q_0 を合力の等しい集中荷重 F_0 に置き換えれば $(q_0 \pi c^2 \rightarrow F_0, J_1(cs)/cs \rightarrow 1/2)$ 、式(5)は

$$\bar{w} = F_0 / 2\pi p (Ds^4 + \rho h p^2) \quad (6)$$

となる。これをハンケル逆変換して、さらにラプラス逆変換し衝突点 $r=0$ における解を求めれば、

$$(w)_{r=0} = F_0 t / 8\sqrt{\rho h D} \quad (7)$$

となる。いま荷重が関数 $f(t)$ で表される時刻変化をする場合は、式(7)とラプラス変換の合成則より

$$(w)_{r=0} = (F_0 / 8\sqrt{\rho h D}) \int_0^t f(\xi) d\xi \quad (8)$$

となる。 u と $(w)_{r=0}$ の差が球と板の接近量であり、これは Hertz の接触理論によれば次式で与えられる。

$$u - (w)_{r=0} = \{F_0 f(t) / K\}^{2/3} \quad (9)$$

ここで、 $K = 4\sqrt{R} / 3(\delta_1 + \delta_2)$ 、 $\delta_1 = (1 - \nu^2) / E$ 、 $\delta_2 = (1 - \nu'^2) / E'$ であり、 ν' 、 E' および R はそれぞれ球のポアソン比、縦弾性係数および半径である。式(3)および(8)を式(9)に代入すれば

$$\{F_0 f(t) / K\}^{2/3} = V_0 t - (F_0 / M) \int_0^t \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi - (F_0 / 8\sqrt{\rho h D}) \int_0^t f(\xi) d\xi \quad (10)$$

となる。これを解けば、衝撃荷重 $F_0 f(t)$ が求められる。式(10)を無次元化して

$$A \{\bar{F}(\tau)\}^{2/3} = \tau - \int_0^\tau \int_0^\xi \bar{F}(\eta) d\eta d\xi - \int_0^\tau \bar{F}(\eta) d\eta \quad (11)$$

のように表せば、パラメータは A だけとなる。

ここで、

$$A = \frac{32(\rho h D)^{5/8}}{M V_0^{1/3} K^{2/3}}, \quad \tau = \frac{8(\rho h D)^{1/2}}{M} t$$

$$\bar{F}(\tau) = \frac{F_0 f(t)}{8 V_0 (\rho h D)^{1/2}}$$

図 2 無次元衝撃荷重の時間変動

なお、 $A=0$ とすれば接触による局部変形を考慮しない場合の結果となり、この場合の解は解析的に求められ

$$\bar{F}(\tau) = \exp(-\tau) \dots\dots\dots (12)$$

となる。式(11)の数値計算には差分法を用いた⁽³⁾。その結果は図2のとおりである。図中の破線は接触による局部変形を無視した場合($A=0$)で式(12)に基づく結果であり、時刻零において不連続な立上りを有することになる。これに対して局部変形を考慮した場合はゆるやかな立上り部を有する。この傾向はパラメータ A が大きいほどすなわち相対的に平板の剛性が高いほど強くなる。しかし、結果を時刻で積分した量に注目するといずれの結果にも大きな差は認められないことがわかる。球の衝突によって生じた応力波が平板中を伝ばして有限な境界からの反射波が再び衝突点に戻ってくるまでの時間範囲では、平板が有限板であっても無限板であっても衝撃荷重の波形にはなんの相違もない。この事実を考慮すれば、図2の結果の主要部がその時間範囲内にあれば、無限板に対する本解析結果は有限板に対する衝突問題へも十分に適用することが可能である。

3. 三次元動弾性理論による円板の応力解析

図3のように半径 a の円板が中央の半径 c の円形領域内に等分布衝撃荷重 $q_0 f(t)$ をうける場合を考え、円板に生ずる衝撃応力を解析する。

3.1 基礎方程式 円板の中央に原点をとった円柱座標 (r, z) に対応した変位成分を (u_r, w_z) とし、垂直応力成分を $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)$ 、せん断応力成分を (τ_{rz}, τ_{zr}) とする。

まず、運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

図3 中央に部分分布衝撃荷重をうける円板

応力成分と変位成分との関係式は、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \left(\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_\theta &= 2G \left(\varepsilon_\theta + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \tau_{rz} &= G \gamma_{rz}, \tau_{zr} = \tau_{rz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial r}, e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$$

式(14)を式(13)に代入すれば、次のような変位の方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ であり、 G はせん断弾性係数である。

式(15)を解くために変位ポテンシャル (φ_0, ψ_3) を導入して、変位成分を次のように置く。

$$u_r = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r \partial z}, w_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3 \dots\dots\dots (16)$$

式(16)を式(15)に代入すれば、 φ_0 および ψ_3 に対する支配方程式として次の2種類の波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \nabla^2 \psi_3 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$c_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{G}{\rho}, c_2^2 = \frac{G}{\rho}$$

また、式(16)を式(14)に代入することにより応力成分と変位ポテンシャルの関係が求められ、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{2G} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial r^2 \partial z} \\ \frac{\sigma_\theta}{2G} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r \partial z} \\ \frac{\sigma_z}{2G} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial z^3} - \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi_3 \\ \frac{\tau_{rz}}{2G} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

3.2 応力解析 荷重の作用する直前には、円板

は無応力状態で静止しているものとし、変位ポテンシャルに対する初期条件として次式が成立するものとする。

$$(\varphi_0, \psi_3)_{t=0} = (\partial\varphi_0/\partial t, \partial\psi_3/\partial t)_{t=0} = 0 \quad \cdots \cdots (19)$$

式(19)のもとで、式(17)をラプラス変換すれば

$$\nabla^2 \bar{\varphi}_0 = (p^2/c_1^2) \bar{\varphi}_0, \nabla^2 \bar{\psi}_3 = (p^2/c_2^2) \bar{\psi}_3 \quad \cdots \cdots (20)$$

となる。円板の周辺 $r=a$ における境界条件として、次式が成立するものとする。

$$(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_3)_{r=a} = 0 \quad \cdots \cdots (21)$$

そこで、零次の第一種ベッセル関数 $J_0(\xi_i a) = 0$ を満足する i 番目の根 ξ_i を用いて、ハンケル変換

$$(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_3) = \int_0^a r(\varphi_0, \psi_3) J_0(\xi_i r) dr \quad \cdots \cdots (22)$$

を導入すれば、式(20)は次のような常微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\varphi}_0}{dz^2} - \left(\xi_i^2 + \frac{p^2}{c_1^2} \right) \bar{\varphi}_0 &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{\psi}_3}{dz^2} - \left(\xi_i^2 + \frac{p^2}{c_2^2} \right) \bar{\psi}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (23)$$

式(23)の一般解は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= A_1 \exp(\alpha_i z) + A_2 \exp(-\alpha_i z) \\ \bar{\psi}_3 &= B_1 \exp(\beta_i z) + B_2 \exp(-\beta_i z) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (24)$$

ここで、

$$\alpha_i = \sqrt{\xi_i^2 + \frac{p^2}{c_1^2}}, \quad \beta_i = \sqrt{\xi_i^2 + \frac{p^2}{c_2^2}}$$

係数 A_1, A_2, B_1, B_2 を決定する境界条件は、次のとおりである。

(i) $z = -h/2$ において

$$\sigma_z = -H(c-r)q_0 f(t), \tau_{zr} = 0 \quad \cdots \cdots (25)$$

(ii) $z = h/2$ において

$$\sigma_z = \tau_{zr} = 0 \quad \cdots \cdots (26)$$

ここで、 $H(c-r)$ は単位ステップ関数である。式(25)および(26)をラプラスおよびハンケル変換すれば

(I) $z = -h/2$ において

$$\bar{\sigma}_z = -c J_1(\xi_i c) q_0 \bar{f}(p) / \xi_i, \bar{\tau}_{zr} = 0 \quad \cdots \cdots (27)$$

(II) $z = h/2$ において

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{zr} = 0 \quad \cdots \cdots (28)$$

ここで、

$$\bar{\sigma}_z = \int_0^a r \sigma_z J_0(\xi_i r) dr$$

$$\bar{\tau}_{zr} = \int_0^a r \tau_{zr} J_1(\xi_i r) dr$$

式(18)の σ_z および τ_{rz} をラプラス変換およびハンケル変換すれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_z}{2G} &= \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{d^2 \bar{\varphi}_0}{dz^2} - \frac{\nu}{1-2\nu} \xi_i^2 \bar{\varphi}_0 + \xi_i^2 \frac{d \bar{\psi}_3}{dz} \\ \frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} &= -\xi_i \frac{d \bar{\varphi}_0}{dz} - \frac{1}{2} \left(\xi_i^3 \bar{\psi}_3 + \xi_i \frac{d^2 \bar{\psi}_3}{dz^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (29)$$

これに式(24)を代入した上で式(27)および(28)に代入すれば、係数 $A_1 \cdot A_2 \cdot B_1 \cdot B_2$ を決定する四元連立代数方程式が得られる。この代数方程式を解けば、ラプラスおよびハンケルの二重変換領域において変位ポテンシャルすなわち変位成分および応力成分の解が求められたことになる。

3・3 ハンケルおよびラプラス逆変換 ハンケル逆変換を先に行い、次にラプラス逆変換を行う。ハンケル逆変換は次のような級数で定義される。

$$(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_3) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_3) \frac{J_0(\xi_i r)}{\{J_1(\xi_i a)\}^2} \quad \cdots \cdots (30)$$

ラプラス逆変換は高速フーリエ変換法を利用した数値逆変換法により行った⁽⁴⁾。計算式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \psi_3)_k &= \frac{\exp(\gamma k \cdot \Delta t)}{T} \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_3)_n \\ &\times \exp(i 2 \pi n k / N), (k=0, 1, 2, \cdots, N-1) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (31)$$

ここで、

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \psi_3)_k &= \{\varphi_0, \psi_3\}_{t=k \cdot \Delta t} \\ (\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_3)_n &= \{\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_3\}_{p=\gamma + i n \cdot \Delta \omega} \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned}$$

であり、 γ および ω はそれぞれラプラス変換パラメータ p の実部および虚部、 N および T はそれぞれサンプリング数および打ち切り時間であり、 $\Delta t = T/N$, $\Delta \omega = 2\pi/T$, $\gamma > 0$ である。

4. 実験による理論解析結果の検討

4・1 実験方法 理論解析結果の妥当性を検討するために、硝子板の中央に鋼球を衝突させる実験を行った。実験に供した硝子板は厚さ 3 mm、辺の長さが 250 mm の正方形フロート板硝子であり、鋼球は直径が 5 mm のものを主に用いた。

硝子板の周辺の支持条件は木製枠による固定および自由の 2 種類とした。空圧式発射装置により鋼球を発射させ、得られる速度は直径 5 mm の鋼球の場合で約 40 m/s ~ 130 m/s の範囲である。衝撃速度は衝突直前の距離が 10 cm の二定点間通過時間の計測により求めた。

原則として、硝子板のボトム面に衝撃を加え、反対側のトップ面に電気抵抗線ひずみゲージを接着した。ひずみ応答の計測には直流方式のブリッジ回路、直流増幅回路(周波数特性 DC ~ 70 kHz, ± 3 dB), 高速 AD 変換方式の波形記憶装置(サンプリング・レート 0.1 μ s) およびペン・レコーダを用いた。使用したひずみゲージはゲージ長さ 2 mm の二軸直交のもので、接

着位置は衝撃点と硝子板の辺に引いた垂線上の衝撃点から距離 40 mm および 80 mm の点の合計三点である。

4.2 実験結果 硝子の材料定数は、縦弾性係数が $E'=69\text{ GPa}$ 、ポアソン比が $\nu'=0.22$ 、質量密度が $\rho'=2.5\times 10^3\text{ kg/m}^3$ であるから⁽⁵⁾、 $G'=E'/2(1+\nu')$ の関係を用いて応力波の伝ば速度を計算すると縦波が $c_1=5600\text{ m/s}$ 、せん断波が $c_2=3400\text{ m/s}$ となる。したがって、衝撃点から伝ばしたせん断波が硝子板の辺で反射され衝撃点に戻ってくるまでの最短時間は約 $74\text{ }\mu\text{s}$ となる。すなわち衝撃点における応答は、衝撃の瞬間からこの時間が経過するまでの範囲内であれば板の周囲における境界条件の影響をほとんど受けないことになる。直径 5 mm の鋼球を速度 40 m/s で周辺自由の硝子板に衝突させたときの各位置における測定結果は図 4～8 の破線により示したとおりである。硝子板の最大引張ひずみは衝撃点の反対側において衝撃直後に生じ、その持続時間は約 $10\text{ }\mu\text{s}$ である。

衝撃点におけるひずみの応答波形には周辺自由と周辺固定の場合の差がほとんど認められなかった。

また同一の点における表と裏すなわち衝撃側とその反対側のひずみ波形は衝撃点を除けば、正と負すなわち引張りと圧縮が正反対であり、板の変形は曲げ変形が支配的であることがうかがわれる。

そこで、周辺自由の硝子板のボトム面に直径 5 mm

の鋼球を速度 40 m/s で衝突させた場合のトップ面に生ずるひずみ波形について理論解析結果と比較することとした。

4.3 実験結果と理論解析結果の比較 理論結果を計算するためには、まず鋼球が硝子板に衝突した際の衝撃力を求めなければならない。直径 5 mm の鋼球が速度 40 m/s で硝子板（無限板）に衝突した場合の衝撃力を式(10)により荷重の値が正となる範囲内で計算した結果が図 9 の実線である。材料定数には、硝子については 4.2 節で記した数値を、鋼球については縦弾性係数が $E=206\text{ GPa}$ 、ポアソン比が $\nu=0.3$ 、質量密度が $\rho=7.86\times 10^3\text{ kg/m}^3$ の数値をそれぞれ用いた。荷重の持続時間は約 $12\text{ }\mu\text{s}$ であるから、この結果を一辺が 250 mm の正方形硝子板の中央に鋼球を衝突させた場合の衝撃力であるとみなしても理論的に誤りはないと考えられる。式(10)による結果をもとに応力計算を行う際に、波形を解析的に積分可能な関数で近似しておくとは非常に便利である。

そこで、力積がほとんど等しくなるように図 9 の実線を破線で示される次のような関数で近似した。

$$F_0 f(t) = \begin{cases} a \exp(-bt) \sin ct & : 0 \leq t < \pi/c \\ 0 & : \pi/c \leq t \end{cases} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで、

$$a = 5.47\text{ KN}$$

$$b = 4.3 \times 10^4\text{ s}^{-1}, c = 2.9 \times 10^5\text{ s}^{-1}$$

図 4 衝撃点におけるひずみの時間変動
($R=2.5\text{ mm}$, $V_0=40\text{ m/s}$
($r=0$, $z=1.5\text{ mm}$, $I=250$, $N=512$)

図 5 衝撃点から離れた位置におけるひずみ変動
($r=40\text{ mm}$, $z=1.5\text{ mm}$, $I=100$, $N=256$)

式(32)で与えられる荷重が板厚 3 mm・直径 250 mm の硝子円板の中央に集中衝撃荷重として作用する場合のひずみ応答を、第 3 章で示した三次元動弾性理論による解析結果に基づいて計算した。計算に際しては $\pi c^2 q_0 \rightarrow F_0$, $c \rightarrow 0$ として集中衝撃荷重に対する結果を導いた。その結果は図 4~8 で実線により示したとおりであり、破線の実験結果と比較している。

硝子板の周囲における条件が、実験と理論とは大きく異なっている。その第一点は実験で用いている硝子板が 250 mm×250 mm の正方形であるのに対して、理論計算では直径 250 mm の円板としている点である。第二点は実験では硝子板の周辺を自由としているのに対して、理論解析では式(21)の境界条件を用いている点である。式(21)の境界条件を物理量で表すと

$$(w_z)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。これは支持に近い条件であり、実験条件とは

大きく異なる。しかし、4・2 節で記述したように境界の影響が応答波形に現れるのは、せん断波の伝ば速度で計算して衝撃点においては $t=74 \mu\text{s}$ 以降、衝撃点より 40 mm の位置では $t=62 \mu\text{s}$ 以降、衝撃点より 80 mm の位置では $t=50 \mu\text{s}$ 以降である。したがって、その時間が経過するまでは実験条件と理論解析条件とはほぼ完全に一致しているといって差し支えない。そのような視点から図 4 以下の実験結果と理論結果とを比べてみると、境界の影響が現れる時刻以前においては両者が極めてよく一致していることがわかる。

ただし、衝撃点におけるひずみ波形の衝撃直後に生ずる鋭いピークでは理論結果に対して実験結果は約 25 % 程度小さくなっており、他の位置における波形に比べて差が少々大きくなっている。そこで、衝撃点では実験によるピークが低く出る可能性が高いことを

図 6 衝撃点から離れた位置におけるひずみ変動
($r=40 \text{ mm}$, $z=1.5 \text{ mm}$, $I=100$, $N=256$)

図 7 衝撃点から離れた位置におけるひずみ変動
($r=80 \text{ mm}$, $z=1.5 \text{ mm}$, $I=100$, $N=256$)

図 8 衝撃点から離れた位置におけるひずみ変動
($r=80 \text{ mm}$, $z=1.5 \text{ mm}$, $I=100$, $N=256$)

図 9 衝撃荷重の時間変動と近似波形
($R=2.5 \text{ mm}$, $V_0=40 \text{ m/s}$, $h=3 \text{ mm}$)

指摘しておかなければならない。その原因として主なものを挙げると、第一点は鋼球をひずみゲージが接着されている部分に正確に衝突させることが極めて困難であること、第二点はゲージが2 mmの長さをもっていることにより出力が平均化されること、第三点は測定機器単体としてではなく測定装置全体としての周波数特性によって極めて鋭いピークは丸くなる傾向が強いことである。これらの原因を含めた実験における各種の因子はほとんど鋭いピークを低くおさえる効果を有するので、衝撃点における初期のピークの25%の差は他の位置における差と同程度に評価しなければならないと考える。

本問題において最も重要となる最大引張ひずみは衝撃点の反対側において衝撃直後に生ずる鋭いピークであり、これをある程度正しく予測できる理論解析手法を提案することが本研究の主目的であったが、図4以下の結果は所期の目的を十分に達成できたことを示しているものと思う。

なお、図4~8の内の I はハンケル逆変換公式(30)の i に関する無限級数の打ち切り項数であり、 N はラプラス逆変換の計算式(31)におけるサンプリング数である。図4以下では $T \approx 200 \mu\text{s}$, $\gamma = 6/T$ として計算

を行った。

5. 結 言

鋼球を衝突させる硝子板の曲げ衝撃問題では、板に生ずる最大応力は衝撃点から伝ばした応力波が境界で反射されて戻ってくる以前の衝撃初期に生ずる。したがって、本論文で示したように無限板に質点が衝突した場合の衝撃力をLagrangeの古典板理論により求め、この衝撃力のもとでの板の最大衝撃応力を軸対称の三次元動弾性理論と有限ハンケル変換を用いて解析する方法が適用可能であり、その結果の妥当性が実験的に確認された。

また、高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス逆変換法が、本問題の解析解に対する数値計算においても極めて有効な手法であることが実証された。

文 献

- (1) 板ガラス建材総合カタログ, (昭58), 178, 旭硝子(株).
- (2) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 63, McGraw-Hill.
- (3) 松本・ほか3名, 非破壊検査, 32-11 (昭58), 895.
- (4) 足立・ほか2名, 機論, 51-467, A (昭60), 1886.
- (5) 中原, 材料力学(上巻), (昭40), 367, 養賢堂.

討 論

〔質問〕 内山 常雄〔警察庁科学警察研究所〕

大変興味深い研究である。結果を使う立場の者として、次の点についてご教示願いたい。

(1) 衝撃端が半球状の円柱棒で衝撃した場合は、式(110)の M を変えるだけで衝撃力は求められるのか。

(2) 衝撃点の裏側に生じる最大応力は、式(10)により求められる最大衝撃荷重を静的に加えた場合に生じる応力の何倍にあたるか。

(3) 硝子板に衝撃荷重を加えた場合の最大応力点では、薄板の場合は衝撃点の裏側、厚板の場合は衝撃点側の衝撃体との接触円の円周部といわれているが、厚板の場合の計算例はあるか。

〔回答〕 ご討論に感謝する。

ご指摘の点に関し、以下のように回答いたしますので、ご検討のほどお願い申し上げます。

(1) 短い棒であれば求められる。しかし、棒が長くなるにつれて正しい衝撃力は求められなくなる。

長い棒に対しては質点の運動方程式(1)の代わりに棒の縦衝撃理論に基づく運動方程式を用いたほうが正

しい結果が得られる。棒の長さに関する式(1)の適用領域と棒の縦衝撃理論の適用領域との境界は調べてみなければはっきりとはわからない。

(2) 正確には計算をしてみなければわからない。定性的には式(10)による衝撃荷重の継続時間に依存する。すなわち、最大衝撃応力は継続時間が短ければ小さくなり、長くなれば大きくなる。したがって、継続時間の長さによって静的に作用した場合の応力よりも小さい場合も逆に大きい場合もある。

(3) 現在のところ実験に用いたガラス板に対してだけしか計算を行っていない。ご指摘の現象は大変に興味深いので、一度計算を行ってみたいと思う。

〔質問〕 黒川 知明〔京都大学工学部〕

板の曲げ理論と、三次元弾性論を巧みに組合せて解いておられる点敬意を表する。荷重関数 $f(t)$ に関して、次の点ご教示願いたい。

(1) 図2によれば A の値が小さいほど(すなわち板の剛性が低いほど) $\hat{F}(\tau)$ は鋭いパルスとなるがこの傾向は $f(t)$ に関してもそのままいえるか。もしそうなら逆説的なように思えるがこの点いかがか。

(2) $\bar{F}(\tau)$ の積分値は A の値により大きな差が認められないとあるが、このことは力積がほぼ一定、すなわち衝突に際する反撥係数が板の剛性に大きく依存しないことを示していると考えてよいか。またもし衝突後のはね返り速度に関する測定データがあれば $f(t)$ の積分値と比較できて興味深いが、この点いかがか。

〔回答〕 ご討論に感謝する。ご指摘の点に関し、以下のように回答する。

(1) 図2の説明は無次元衝撃荷重 $\bar{F}(\tau)$ に対するもので、その内容をそのまま $f(t)$ に対してあてはめることはできない。説明にやや配慮の欠けている点、おわびする。

(2) 衝撃荷重の解析では、球と板は衝突後は一体となって運動をし、両者は離れないとの条件〔式(9)がこれに相当する〕を用いているので、力積が A の値によらずほぼ一定の値になっているものと考えている。

また、衝突後の球のはね返り速度に関する測定は行っていない。ガラスが破壊する限界の力積を求めることを目的として、本実験では主に貫通後の球の速度に注目して計測を行っている。しかし現在のところ、ガラス自体の強度に大きなバラツキがあり、そのデータを公表するまでにはいたっていない。はね返るときはガラスが破壊しない場合なので、力積すなわち運動量変化は破壊限界の力積より小さいと思われる。